

С. КАРЛИН

Математические методы

в теории игр

программировании

и экономике

Sp. 891

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«М И Р»

MATHEMATICAL METHODS AND THEORY IN GAMES, PROGRAMMING, AND ECONOMICS

by SAMUEL KARLIN
Stanford University



PERGAMON PRESS

LONDON — PARIS

1959

Перевод с английского
Н. А. Бодина, Л. И. Горькова,
А. А. Корбута, А. Н. Ляпунова,
Н. М. Митрофановой, А. Н. Смирнова
и Е. Б. Яновской

Под редакцией
Н. Н. Воробьева

С. КАРЛИН

**Математические методы
в теории игр
программировании
и экономике**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1964

Эта книга посвящена математическому анализу ситуаций, возникающих при управлении самыми разнообразными формами деятельности человека с целью достижения максимального эффекта.

Книга состоит из трех частей: матричные игры, программирование и математическая экономика, бесконечные игры. Первая и третья части имеют много точек соприкосновения, в то время как вторая часть является более самостоятельной.

Основное внимание автор уделяет теории антагонистических игр, изложение которой является наиболее полным из имеющихся в мировой литературе.

Книга адресована широкому кругу читателей: студентам-математикам, изучающим теорию игр, линейное и нелинейное программирование, студентам-экономистам, имеющим определенную математическую подготовку, научным работникам самых разнообразных специальностей, занимающимся исследованием операций.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В последнее время идеи и приемы исследования операций начинают приобретать все большее значение в процессах принятия решений, а математические методы исследования операций складываются в широко разветвленные научные дисциплины. Эти математические теории можно классифицировать по самым различным признакам. Несколько таких классификаций приводятся в этой книге (см. Введение, § 2).

Одна из них основана на противопоставлении статических задач динамическим. Первые можно охарактеризовать как задачи, в которых процесс принятия решения сводится к некоторому единичному акту. В динамических же задачах принятие решения состоит из последовательности (быть может, бесконечной) принятия частичных решений. Такие задачи возникают, например, в связи со всевозможными процессами управления. Для задач динамического типа показательно изменение самого субъекта, принимающего решения, по мере принятия им решений. Именно в ходе многошагового процесса решения может приобретаться или, наоборот, теряться существенная для выбора решения информация, могут изменяться сравнительные ценности тех или иных последствий принятых решений, могут, наконец, открываться новые возможности или становиться недоступными старые.

Другая классификация связана с выделением детерминированного и стохастического вариантов задач. Детерминированные задачи отражают невероятностный, достоверный подход к явлениям, тогда как в задачи стохастического типа всегда входят случайные события, величины или процессы.

Укажем еще на одну возможную классификацию. Математические теории, используемые в процессах принятия решений, можно разбить на „дескриптивные“ теории, которые математически описывают изучаемые процессы, и на теории „управления“, отражающие целенаправленность принимаемых решений. В первом случае обычно выявляются последствия того или иного произвольно принятого решения; во втором — на передний план выдвигается то, что автор (на стр. 15) называет **нормативной сущностью теории**: основные усилия нап्रा-

входят на поиски именно того решения, последствия от принятия которого будут наиболее благоприятными („оптимальными“). Весьма характерным примером теории, относящейся к первому классу, может служить теория массового обслуживания; теории второго класса достаточно ярко представлены различными „программированиями“. Разумеется, эта классификация (как и всякая другая классификация научных направлений) не может претендовать на абсолютную четкость. Так, например, в теории массового обслуживания уже появились решения отдельных оптимизационных задач; с другой стороны, проблемы существования решений в ряде задач оптимального программирования, в сущности, являются чисто описательными, познавательными задачами, решение которых не связывается непосредственно с принятием того или иного решения.

После всего сказанного содержание данной монографии С. Карлина можно коротко описать следующим образом. Эта книга содержит строгое и систематическое изложение математического аппарата теории принятия решений и исследования операций, связанного с детерминированными статическими оптимизационными задачами. Именно, книга охватывает теорию антагонистических игр в нормальной форме (несколько более половины всего объема книги), линейное программирование, нелинейное программирование и некоторые разделы современной математической экономики, примыкающие к оптимальному программированию (модели типа „затраты — выпуск“, теория равновесия и др.).

„Динамичность“ игр с выбором момента времени и рассматриваемых автором экономических моделей чисто кажущаяся, потому что в обоих этих случаях решения принимаются единожды на весь процесс. Точно так же использование вероятностных соображений в излагаемых вопросах теории игр еще не составляет стохастического подхода к этим вопросам.

Стремление автора ограничиться детерминированными статическими оптимизационными задачами объясняет отсутствие в книге разделов, посвященных динамическим играм³ (в том числе статистическим решающим функциям), динамическому программированию, теории массового обслуживания, а также „самой операционной из теорий исследования операций“ — теории управления запасами (в которой, кстати сказать, автор является видным специалистом). Это обстоятельство нельзя считать ни пробелом в изложении, ни тем более недостатком книги. Оно является естественным следствием четкого определения ее предмета.

Хотя все проводимые автором математические рассуждения достаточно прозрачны, требования, формально предъявляемые к математической подготовке читателя, довольно скромны, а выходящие за пределы общеизвестного сведения по линейной алгебре, анализу и теории выпуклых множеств приведены в трех приложениях, назвать

книгу элементарной никак нельзя. Больше того, несмотря на независимое от каких-либо других руководств изложение предмета, начинающееся с исходных определений, ее едва ли можно рекомендовать как учебник для первоначального знакомства с теорией игр, программированием или математической экономикой. Лучше всего приступить к чтению этой книги, имея уже достаточно основательные познания о предмете (например, в объеме чрезвычайно доходчиво написанной книги Д. Гейла „Теория линейных экономических моделей“, ИЛ, 1963). Обладая же известной предварительной подготовкой читатель сможет извлечь из книги много полезного.

Во-первых, целенаправленное развитие „сюжета“ выявляет единство математических идей, лежащих в основе формально столь различных между собой теорий. Это обстоятельство педагогически чрезвычайно важно и делает целесообразным использование книги в качестве учебника для глубокого изучения предмета.

Во-вторых, разнообразие приложений убедительно показывает возможность применения излагаемых математических методов в самых различных областях человеческой деятельности. Конечно, при интерпретации математико-экономических вопросов автор выступает с обычных позиций буржуазного ученого. Однако ценность развиваемого при этом математического аппарата с этими интерпретациями непосредственно не связана. Например, ход разрешения споров между профсоюзом и предпринимателем (§ 4.5) хотя и рисуется в слишком уж упрощенном виде, но как условный пример даже интересен.

Наконец, в-третьих, приведенные в конце каждой главы задачи (общим числом более трехсот) иллюстрируют и развивают излагаемый в книге материал. Даже внимательный анализ читателем приведенных в книге решений этих задач (не говоря уже о самостоятельном их решении) несомненно принесет большую пользу.

Перевод книги выполнили Н. А. Бодин (главы 1—4), А. Н. Смирнов (главы 5—6), А. А. Корбут (главы 8—9), Л. И. Горьков (главы 7, 10—12), Е. Б. Яновская (главы 13—16), А. Н. Ляпунов (глава 17) и Н. М. Митрофанова (приложения). Обширная авторская библиография дополнена наиболее значительной новой литературой по тематике данной монографии. Эта работа выполнена А. А. Корбутом.

Н. Н. Воробьев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Разделы математики, используемые в процессах принятия решений, играют все более важную роль в анализе задач управления производством, в вопросах экономики, военной тактики и исследования операций. Эти области приложения привели к созданию математических дисциплин нового типа. Развитие теории игр, линейного и нелинейного программирования, а также математической экономики характеризует одну из значительных сторон такого рода математики.

По существу, настоящая книга является попыткой предварительного синтеза понятий теории игр и теории программирования с понятиями и методами математической экономики в единую систематическую теорию. Кроме того, мы надеемся, что данная книга окажется полезной в качестве учебника или справочника по этим предметам, а также послужит основой для последующего их изучения и разработки.

Содержание этой книги ни в коей мере не является исчерпывающим; мы придавали особое значение тем вопросам, которые считали более важными. В то же время мы пытались сообщить читателю основную традиционную информацию, от которой зависит правильное понимание теории игр и теории программирования. Изложение каждого предмета хотелось сделать замкнутым в себе и вполне строгим; вместе с тем мы стремились выявить идейную глубину и формальное изящество всей теории. В данной книге принципы теории игр и теории программирования применяются к большому числу упрощенных задач, связанных с экономическими моделями, с моделями принятия деловых решений и задачами военной тактики, для того чтобы пояснить рассматриваемые математические понятия и указать на их применимость к такого рода проблемам.

Каждая глава содержит некоторое количество более сложного материала, который обычно сведен в параграфы, отмеченные звездочкой (*). Элементарные вспомогательные сведения изложены в приложениях, а более сложные включены непосредственно в текст.

Каждая глава содержит задачи различной трудности; многие из этих задач приводят к обобщениям теории. Решения большинства

задач и краткие указания относительно решения остальных задач даны в конце каждой части.

Три части монографии, за исключением материала в разделах, отмеченных звездочкой, не зависят друг от друга: их можно изучать (вместе с относящимися к ним приложениями) независимо. Для удобства читателя на следующей странице дается схема, показывающая взаимосвязи основного материала, содержащегося в книге.

Каждая глава завершается разделом, содержащим исторические замечания, некоторые соображения, касающиеся тех или иных деталей, и перечисление книг и статей, которыми можно воспользоваться для получения дополнительной информации. Вся цитированная литература перечислена в библиографии в конце книги. В некоторых случаях исторические замечания состоят в указании на приоритет выдающихся открытий; любые неточности или упущения в этом отношении являются совершенно непреднамеренными, и автор заранее глубоко о них сожалеет.

Я многим выражаю свою признательность, и в первую очередь Станфордскому университету, Калифорнийскому технологическому институту, Корпорации РЭНД и Управлению морских исследований, которые вдохновили меня на создание этой книги и обеспечили благоприятные условия и поддержку при ее написании.

Среди моих университетских коллег я благодарен профессорам Боукеру, Либерману, Мадоу, Парзену и Скарфу (Станфордский университет) за их постоянную поддержку; профессору Боненбласту из Калифорнийского технологического института, познакомившему меня с этой областью науки и обучившему меня очень многому, за что я всегда буду перед ним в долгу; моим ученикам Р. Рестрепо и Р. Миллеру, записавшим мои лекции, на материале которых основана эта книга; моим ученикам У. Пруитту и Ч. Стоуну, каждый из которых сделал ценные предложения по организации и улучшению окончательного варианта рукописи; профессорам Удзава и Эрроу, которые научили меня большей части того, что я знаю по математической экономике; моим друзьям Мелвину Дрешеру, Рею Фулкерсону и Харвею Вагнеру за их полезные замечания по первым шести главам и Ирвингу Гликсбергу за помощь в написании приложений.

Наконец, я приношу благодарность моей жене, которая принимала теплое участие, проявила безграничное терпение и доброту в течение этих долгих лет писательства.

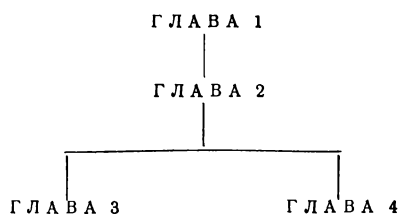
Станфорд, Калифорния

Август, 1959

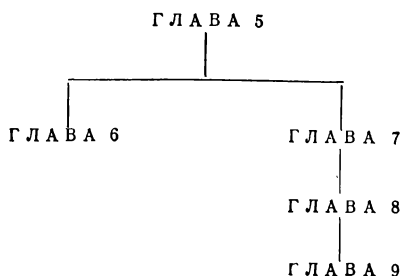
ЛОГИЧЕСКАЯ
ВЗАИМОЗАВИСИМОСТЬ
РАЗЛИЧНЫХ ГЛАВ

*(касается лишь тех разделов,
которые не отмечены звездочкой)*

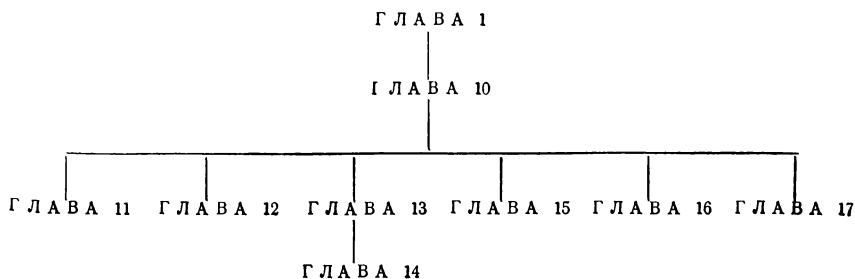
Часть I



Часть II



Часть III



ВВЕДЕНИЕ

СУЩНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРОЦЕССОВ РЕШЕНИЯ

1. Общие замечания. Искусство выработки наилучших (в смысле тех или иных критериев) суждений старо, как род человеческий; именно это искусство является сущностью любой сферы человеческой деятельности — от волейбола до организации тыла. Наука о выработке таких суждений является в отличие от искусства уже достаточно новым открытием, а математическая теория принятия решений еще моложе — она насчитывает немногим более двадцати лет. Эта теория создавалась довольно интенсивно. В последнее десятилетие наблюдалось быстрое распространение применений различных научных дисциплин в экономическом планировании, в военном деле, в управлении производством и в планировании больших систем. При этом имело место постоянное взаимодействие между более точной постановкой задач управления производством и техники снабжения и разработкой математического аппарата, необходимого для их решения. Наряду с этим и частично как результат успехов, достигнутых в теории игр, в линейном программировании и в теории очередей, появились новые прикладные дисциплины, самые названия которых лет сорок тому назад еще не были известны: исследование операций, наука об управлении производством, анализ систем и множество других. Все эти дисциплины имеют дело с одной и той же основной проблемой научного анализа ряда возможных способов действия с целью нахождения такого из них, который в данных условиях был бы наилучшим.

Что именно понимается под задачей принятия решений, должно быть четко определено. В частности, должны быть установлены все возможные способы действия, их последовательности, цели различных участников явления и природа влияющих на него случайных факторов. После этого необходимо попытаться оценить и сравнить различные альтернативы поведения в терминах окончательных целей. Обычно задача принятия решения состоит из четырех составных частей: (1) модели, выражающей множество допустимых эмпирических соотношений между множеством переменных; (2) точно определенного подмножества переменных, значения которых должны выбираться фирмой или другим принимающим решение коллективом;

(3) целевой функции переменных, сконструированной таким образом, что большему ее значению соответствует лучшая ситуация с точки зрения данной фирмы, и (4) методов анализа влияния на значение целевой функции значений переменных, выбираемых на основе решения.

Основной составной частью задачи принятия решения является построение модели. Следующее определение может помочь объяснить значение этого понятия и его объем. Модель — это надлежащая абстракция реального явления, сохраняющая существенную структуру задачи таким образом, чтобы ее анализ давал возможность проникнуть в сущность как первоначальной конкретной ситуации, так и других ситуаций, аналогичных ей по своей формальной структуре.

Создание моделей стало за последние годы все более распространенным явлением, особенно в социальных науках. Современные психологи подходят к изучению процессов обучения, используя модели, включающие случайные величины. Экономисты, опираясь на теорию игр и теорию математического программирования, разработали глобальные модели равновесия, являющиеся попыткой понять взаимоотношение между потреблением, производством и ценой единицы товара в условиях конкурентной экономики. При изучении политической конъюнктуры некоторые ученые используют идеи теории игр *n* лиц для анализа соотношения сил, влияющих на решения законодательных органов. Все большее и большее число деловых фирм применяют строгий математический подход к проблемам управления, учета и производства. Инженеры заняты интенсивными разработками в новой области анализа систем, основной метод которого состоит в имитации идеализированных моделей тех или иных процессов. Основной математический аппарат, используемый при этих исследованиях, является смесью математических понятий и методов, употребляемых в статистике, теории вероятностей и общей теории принятия решений.

Последние пятьдесят лет, с одной стороны, явились годами плодотворного брожения в таких дисциплинах, как теория вероятностей, стохастические процессы и статистика, а с другой — были свидетелями развития теории игр и линейного программирования. Эти математические дисциплины являются естественным аппаратом для аналитического исследования проблем, возникающих в социальных науках, а также в науке об управлении. В этом отношении представляется интересным кратко сопоставить полезность теории вероятностей, статистики и теории принятия решений с полезностью других отраслей чистой и прикладной математики.

Развитие классической математики стимулировалось главным образом задачами, связанными с явлениями из области физики и техники. В обычной задаче классической физики переменные величины, определяющие систему, удовлетворяют вполне определенным детерминированным соотношениям. Все параметры этой задачи предполагаются

известными или точно измеряемыми, и соотношения между ними отыскиваются для того, чтобы точно предсказать, что может произойти при сходных или аналогичных обстоятельствах в будущем. До последнего времени приходилось иметь дело именно с такими детерминистскими задачами, т. е. с задачами, которые, вообще говоря, могли быть решены при помощи дифференциальных уравнений в частных производных или родственными им математическими методами.

Однако очевидно, что эти детерминистские понятия и методы совершенно не подходят для социальных наук, для которых типичными являются задачи, связанные с неопределенными и изменчивыми величинами. В тех случаях, когда в формировании модели решающую роль играют люди, мы (если мы вообще хотим прийти к содержательным результатам) должны учитывать неизвестный, а иногда и случайный характер человеческих поступков, а также элемент случайного, присущий окружающей среде. Поэтому изучение поведения людей неизбежно должно быть достаточно тесно связано с теорией вероятностей, статистикой и тем анализом решений, который исследуется в теории игр и в линейном программировании.

Обратное также справедливо: математики и статистики все больше имеют дело с аналитическими проблемами, возникающими из анализа человеческой деятельности. Новые направления математических исследований указываются теперь не только физическими или техническими науками, но также науками социальными и административными.

Имеется два аспекта таких исследований: построение модели, в которой основную роль играют вероятность и стохастические процессы, и нормативная сущность этой модели (оптимизация), являющаяся сферой статистики, теории игр, теории принятия решений и исследования операций. Практически эти два аспекта неразделимы. Очевидно, чтобы понять, как оптимизировать целевую функцию, необходимо понять структуру и механизм модели, а чтобы адекватно построить модель, необходимо установить пути ее использования.

Для того чтобы надлежащим образом определить объем этих исследований, отметим описательную значимость в изучении построения математической модели. Ее следует отличать от нормативного существа модели, которому мы придаем особое значение. С точки зрения математического моделирования в психологии и социологии в большей части современной литературы исследуется ориентация модели в направлении некоторой эмпирической адекватности. С другой стороны, модель, отражающая ситуации, возникающие при управлении производством, в экономике и в статистике, более тесно связана с тем видом нормативных вопросов теории рационального поведения (теории игр, теории принятия решений), которым мы уделяем основное внимание.

Методы теории вероятностей, статистики и теории принятия решений необходимо взаимодействуют друг с другом, и открытия в

каждой из этих областей ведут к открытиям в других областях. Поэтому определение оптимальных процессов для задач, связанных с принятием решений, должно рассматриваться не с точки зрения десятка (или около того) более или менее разрозненных методов, а с точки зрения единой всеобъемлющей аналитической методологии.

Это и есть та методология в контексте теории игр, программирования и математической экономики, которую мы пытаемся описать в этой книге. Мы можем суммировать наши намерения как попытку объединить математический аппарат данной области и попытаться выкристаллизовать важнейшие понятия, лежащие в основе задач, связанных с принятием решений. Нашей целью не является четкое определение формальной структуры, которая охватывала бы все проблемы в этих областях. Мы не сосредоточиваемся на определениях и абстракциях *per se*. Скорее мы пытаемся детально разработать основные приложимые математические методы, делая, где это возможно, ударения на математических прототипах и их анализе.

2. Классификация математического аппарата задач принятия решений. Целью настоящего пункта является описание различных полезных математических классификаций задач принятия решений, приложимых также к теории игр, математическому программированию и математической экономике.

I. Задачи принятия решений можно разделить на два резко контрастирующих типа: статические и динамические задачи. Статическая задача принятия решения — это такая задача, в которой переменные величины не зависят явно от времени. В динамической же модели время играет решающую роль.

Это различие между статическими и динамическими задачами не всегда ясно выражено. Часто статическая ситуация является стационарным состоянием динамической ситуации, т. е. фазой равновесия, достигнутой динамическим процессом, развертывавшимся в течение долгого времени. С другой стороны, динамический процесс может рассматриваться как статический, когда одни и те же переменные, вводимые в последовательные моменты времени, рассматриваются как новые переменные. Тем не менее между этими двумя типами задач имеется существенное различие как принципиальное, так и техническое. Оно будет чувствоваться на всем протяжении последующего детального анализа.

Основное техническое различие между динамическими (многошаговыми) моделями и моделями статическими заключается в степени сложности описания любой данной стратегии или данного образа действия. В статической ситуации стратегия выбирается раз и навсегда и осуществляется непосредственно, тогда как стратегии, соответствующие динамической ситуации, обычно являются сложными функциями получаемой информации и действий, предпринятых на преды-

душих шагах. Теоретически, посредством подходящего определения стратегий, мы можем свести любую динамическую модель к статической. Однако практически эта операция настолько усложняет природу стратегии, что анализировать задачу в новых терминах часто бывает невозможно. По-видимому, сущность анализа динамической задачи состоит в использовании ее рекурсивной, зависящей от времени, природы и симметрий, вытекающих из неограниченности времени.

Важность динамических задач принятия решений очевидна, так как почти все человеческие действия разворачиваются во времени. Процессы обучения основаны на принципе последовательного изложения материала. Деловые решения включают в большинстве своем элемент времени. Экономисты давно уже пытаются учитывать динамические флуктуации во времени. Тем не менее постановка и математический анализ динамических задач принятия решений имеют недавнее происхождение. Выдающимся новатором в этом отношении был Вальд, созданный которым последовательный анализ статистических данных (см. Вальд [1])¹⁾ содержит сущность понятия последовательного принятия решений для накопления информации. Другие более частные результаты, связанные с задачей последовательного принятия решений, содержатся в работе Беллмана [1], который увидел общий характер „секвенциальной“ идеи и использовал его для построения некоторых многошаговых моделей принятия решений в управлении производством, и в работах Эрроу, Харриса и Маршака [1], которые сформулировали задачу принятия решений при управлении запасами в динамической форме. Теория многошаговых игр является распространением обычной теории игр на динамический случай. Недавно вышедший сборник [9] показывает важность развития в этом направлении.

Изучение статических моделей преследует две цели. Во-первых, статическая модель может наилучшим образом описывать статическую задачу, решение которой само по себе представляет интерес и позволяет проникнуть в суть функциональной и структурной сторон данной операции. Одной из общеизвестных статических задач такого сорта является задача оптимального, в смысле данного критерия, выбора среди различных процедур, где переменные пробегают предписанное множество значений, причем временная переменная особо не выделена. Далее, с технической точки зрения ко многим динамическим моделям следует подходить путем изучения видоизмененных статических задач. Так, например, часто оказывается удобным сводить бесконечный вариант динамической задачи к случаю конечного числа периодов N . Решение полученной таким образом задачи находится посредством простого распространения статической задачи,

¹⁾ Ссылки относятся к библиографии, приведенной в конце книги.

после которого переход к пределу по N дает решение всей динамической задачи.

II. Задачи принятия решений можно классифицировать в зависимости от числа участников, имеющих противоположные интересы. Мы отметим здесь три примера.

(1) Если имеется по крайней мере два непримиримых участника, то мы имеем дело с задачами теории игр. В тех случаях, когда имеется ровно два таких противника, их конечные цели ясны: каждая сторона стремится получить как можно больше, зная, что противник будет стремиться к той же цели, используя все свои возможности и способности. В тех случаях, когда имеется более чем два участника, их цели уже не столь ясны¹⁾. Еще не все принципиальные понятия такой модели сформулированы достаточно четко, поэтому для этого случая трудно развить соответствующую математическую методику.

(2) В тех случаях, когда имеется только один участник и его конечные цели точно определены, основная задача принятия решений технически сводится к строгой максимизации целевых функций, подчиненных естественным ограничениям, налагаемым моделью. В общем случае эта ситуация приводит к вариационным задачам, решения которых обычно находятся на границах области изменения переменных. Решение таких экстремальных задач с ограничениями требует создания новых методов. Линейное и динамическое программирование имеют дело с моделями именно такого рода.

(3) В том случае, когда налицо один участник и имеют место неопределенности, решение обычно может быть получено путем комбинации методов статистики с вариационными методами.

III. Третья точка зрения заключается в подразделении общей модели принятия решений на детерминированный и стохастический случаи. Естественно, что детерминистские модели и принципиально и технически значительно проще и более часто поддаются исчерпывающему аналитическому исследованию. Однако большинство практических задач содержит неопределенности, изменчивость и всякого рода случайные факторы. Решение таких задач требует основательного знакомства с теорией стохастических процессов и соответствующей теорией статистических выводов в стохастических процессах.

IV. Еще одна классификация может быть основана на сложности множества возможных стратегий (пространства стратегий). Пространства стратегий могут быть разбиты на конечномерные и бесконечномерные. Во многих из наших примеров бесконечномерное пространство отождествляется с подмножеством того или иного классического функционального пространства. Если это так, то при отыс-

¹⁾ Если число участников более двух, то между ними всегда возможны коалиции и компромиссы. — *Прим. ред.*

кании решения можно использовать специфическую структуру этого пространства. Этот метод используется для решения так называемых игр на единичном квадрате; он полезен также и в более общих конечношаговых статистических задачах принятия решений.

V. Наконец, классификация может быть проведена на основе содержания самого предмета, т. е. задачу принятия решения можно отнести к теории игр, к линейному программированию, к многошаговым задачам принятия решений, к статистической теории принятия решений и т. д. Хотя многие из этих областей частично перекрываются как идейно, так и технически, каждая из них имеет определенные доминирующие черты¹⁾. Это обстоятельство может быть использовано для решения задач, которые не поддаются решению другими методами.

В одной работе невозможно осветить все типы задач о принятии решений. Поэтому мы посвятили нашу книгу проблемам теории игр, математического программирования и математической экономики, оставляя некоторые аспекты статистической теории принятия решений и обсуждение динамических стохастических задач принятия решений до дальнейших книг, которые в настоящий момент находятся в стадии подготовки.

Вообще говоря, в данной книге приходится иметь дело преимущественно со статическими задачами принятия решений, для которых неопределенность и случайность в структуре модели не являются решающими. Мы посвящаем часть I (четыре главы) теории конечных игр, часть II (пять глав) линейному программированию, нелинейному программированию и математической экономике. Близость математической экономики идеям и приложениям теории программирования оправдывает такое расположение материала. В основном в этих двух частях излагаются статические, конечные задачи принятия решений. Понятие смешанной стратегии для конечных игр (сознательное введение элемента случайности) хотя и входит в решения игровых задач, однако не появляется в основных определениях теории игр.

Дальнейшие восемь глав, составляющие часть III, имеют дело с теорией бесконечных статических игр в том смысле, что пространства стратегий игроков бесконечномерны, а игра предполагается нормальной, т. е. состоящей из одной партии.

3. Основные дисциплины. В этом пункте путем указания того, как теория игр и теория программирования применяются к достаточно большому числу задач, мы дадим беглое описание четырех основных

¹⁾ Эти черты в известной мере связаны с типами предыдущих классификаций. Так, для теории игр характерна множественность числа участников (не менее двух), для линейного программирования — конечномерность пространства, многошаговые задачи принятия решений динамичны, а статистическая теория принятия решений стохастична. — *Прим. ред.*

дисциплин теории принятия решений. Необходимо, конечно, представлять себе, что надлежащее понимание любой из этих дисциплин может быть достигнуто лишь после детального изучения характерных задач и их решений.

1. Теория игр. На всем протяжении этой книги мы будем иметь дело преимущественно с нулевыми играми двух лиц. Математические исследования игр, предполагающих участие более двух лиц, носят предварительный характер, главным образом из-за принципиальных трудностей, присущих самой формулировке соответствующей модели. Имеется ряд изящных и математически законченных работ, в которых исследуются „решения“ игровых моделей n лиц Шёнберг [1], Льюс и Райфа [1], но приемы и понятия, связанные с этим предметом, разработаны недостаточно, и мы поэтому решили исключить их из рассмотрения. Тем не менее эти работы стимулировали дальнейшие исследования в теории игр n лиц, и можно надеяться, что упомянутые принципиальные затруднения будут вскоре преодолены.

В играх двух лиц с нулевой суммой (антагонистических) в распоряжении каждого игрока имеется некоторое пространство стратегий и известная игрокам функция выигрыша, которая представляет выигрыш игрока I, как функцию стратегий, применяемых обоими игроками. Очевидно, выигрыш игрока II равен выигрышу игрока I, взятому с обратным знаком.

Игрок I пытается максимизировать свой доход, но воздействует на функцию выигрыша лишь путем контроля над своей собственной стратегией; игрок II желает минимизировать доход игрока I, так как интересы игроков строго противоположны. Это приводит к принципу минимакса. Следует заметить, что принцип минимакса позволяет определить рациональный способ поведения для каждого из двух игроков с непримиримо противоположными интересами. Доказательство этого факта явилось фундаментальным вкладом Джона фон Неймана в теорию игр.

Антагонистичность интересов является реалистичным предположением в случае салонных игр и военных операций, а также в некоторых отдельных случаях при принятии деловых решений (особенно в задачах о дуополии). Вне этой довольно ограниченной области допущение об антагонистичности интересов является слишком сильным, для того чтобы быть точным отражением положения дел в реальной игровой задаче. Однако это уже не так важно; важность теории игр определяется не решением практических задач, а прояснением основных методов теории принятия решений. Успехи теории игр оказывают исключительно большое влияние на развитие статистики, линейного и нелинейного программирования, математической экономики и построения математических моделей вообще.

2. Теория программирования. Теория линейного и нелинейного программирования является разделом математики, содержащим методы максимизации функции нескольких переменных, подчиненных некоторым ограничениям. Прилагательное „линейное“ указывает на то, что ограничения и максимизируемые функции часто являются линейными функциями переменных. К сожалению, в задачах программирования классический анализ обычно неприменим, так как их решения неизбежно оказываются на границах области изменения переменных. В соответствии с этим задача теории программирования заключается в том, чтобы предложить там, где это возможно, аналитические методы определения решений, а при отсутствии таких методов — дать эффективные вычислительные способы получения приближенного решения. Некоторые (довольно скромные) успехи были достигнуты в обоих этих направлениях.

С формальной точки зрения теория линейного программирования эквивалентна теории матричных игр¹⁾. Взаимодействие между этими двумя теориями было полезно и ускорило их обоюдное развитие. Осуществлено также частичное распространение этой теории на случай нелинейных функций.

Теория линейного программирования имеет многочисленные приложения, особенно в области „анализа деятельности“, который связан с планированием производственных операций. Типичной моделью линейного программирования является задача о назначениях, в которой требуется назначить n лиц различных способностей на n работ разной важности таким путем, чтобы максимизировать ценности, полученные в результате выполнения этих работ. Очевидно, что столь общая модель должна иметь большое число практических приложений; то же справедливо и для некоторых других основных моделей программирования. В частности, нефтяная промышленность извлекала определенную пользу из применения линейного программирования для определения эффективных производственных процессов.

3. Многошаговые задачи принятия решений. Многошаговыми задачами принятия решений (иногда именуемыми задачами динамического программирования) называются задачи, в которых требуется определить несколько (обычно даже бесконечное число) решений, принимаемых последовательно. Каждое принятое решение зависит от всех прошлых решений и в свою очередь оказывает влияние на все будущие решения. Типичным примером является задача об управлении запасами. До какого уровня следует торговцу повысить запас товара на складе, для того чтобы максимизировать свой доход? На решение этой задачи влияют стоимости заказов,

¹⁾ То есть антагонистических игр, в которых каждый игрок располагает конечным множеством стратегий. — *Прим. ред.*

прибыли, стоимости хранения и штрафы (например, в виде убытка при торговле или убытка от потери фирмой репутации) за отсутствие товара для удовлетворения спроса. Дальнейшее осложнение может возникнуть из-за отставания поставки от заказа. Эту задачу о политике заказов приходится решать периодически, что, собственно, и делает ее динамической. Конечно, то, что произошло в предыдущие периоды, неизбежно будет воздействовать на последующие решения торговца.

Те же общие рассуждения применимы при составлении производственных планов, при определении поведения во время замены устаревшего оборудования, расхода гидроэлектроэнергии и т. п. Основные динамические модели находят также приложения в области социологии и физиологии, в изучении процессов обучения и в структурном анализе. Модели теории очередей являются почти неистощимым источником задач, связанных с динамическими процессами принятия решений и приложимых к организации погрузки грузов, транспортным системам, составлению расписания для врачей и т. д.

Наконец, очевидно, что и статистический последовательный анализ относится к категории многошаговых процессов. Фактически он является богатейшим предметом по своему математическому содержанию, тонкости и глубине, так как он основан на некоторых наиболее изящных выводах теории стохастических процессов, статистической теории принятия решений, теории игр и общих методов принятия решений.

4. Статистическая теория принятия решений. Статистическая теория принятия решений, разработанная Вальдом, есть, по существу, статистика, рассматриваемая с более широкой точки зрения. Почти все виды статистического анализа — проверка гипотез, оценка неизвестных параметров, предсказание, статистическое различение — могут быть погружены в эту общую проблему, а их уместность и эффективность могут быть оценены в терминах этой теории. Дух и математические методы статистической теории принятия решений и теории игр во многом одинаковы, но объекты их различны. Более точно, теория игр имеет дело с двумя противоположными интересами, в то время как статистическая теория принятия решений имеет дело с определением оптимальных методов при допущении неопределенности со стороны природы. В некотором смысле статистик и природа представляют собой двух игроков, участвующих в игре, но взаимоотношения между ними не являются антагонистическими противоречиями, которые были предметом теории игр.

Общая точка зрения теории принятия статистических решений помогает росту нашего понимания многих стандартных принципов, применяемых в статистической практике: например, принципа несмещенности, областей типа А, понятий инвариантности и теории мини-

макса. Каждый из них представляет собой критерий, согласно которому мы выбираем тот или иной образ действий. Классический метод испытания гипотез и оценки неизвестных параметров Неймана — Пирсона посредством доверительных интервалов охватывается теорией принятия статистических решений. Ясно, что сфера действия этой теории огромна, и ее будущее влияние на развитие статистической теории и практики должно быть исключительно большим.

Обозначения

Векторы

Вектор $\mathbf{x}$, состоящий из n компонент, обозначается через

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ означает, что каждая компонента x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) неотрицательна.

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ означает, что каждая компонента x_i неотрицательна и хотя бы одна положительна; значок $\geq$ используется для скаляров в смысле „больше или равно“.

$\mathbf{x} > \mathbf{0}$ означает, что $x_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (все компоненты положительны).

Скалярное произведение двух вещественных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в пространстве E^n обозначается через

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

а в случае комплексных векторов — через

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

где $\bar{y}_i$ — сопряженное комплексное число.

Расстояние между двумя векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ обозначается через $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Матрицы

Матрица $\mathbf{A}$ через свои элементы представляется так: $\|a_{ij}\|$.

Матрица $\mathbf{A}$, примененная к вектору $\mathbf{x}$ справа $\mathbf{x}\mathbf{A}$, дает вектор

$$(\sum x_i a_{i1}, \sum x_i a_{i2}, \dots, \sum x_i a_{in}).$$

Аналогично

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = (\sum a_{1j} y_j, \sum a_{2j} y_j, \dots, \sum a_{nj} y_j);$$

$(\mathbf{A}\mathbf{x})_j$ означает j -ю компоненту вектора $\mathbf{A}\mathbf{x}$.

Матрица, транспонированная к A , обозначается через A^T .

Определитель матрицы A обычно обозначается через $|A|$, или через $\det A$.

Выпуклые множества

Выпуклая оболочка множества S обозначается через $Co(S)$ или через $[S]$.

Выпуклый конус, натянутый на множество S , обозначается через P_S или $\wp_S$.

Распределения

Символы

$$x_{t_0}, y_{t_0} \text{ и } I_{t_0} \quad (0 \leq t_0 \leq 1)$$

равнозначно используются для обозначения распределения на единичном интервале, в котором вся масса сконцентрирована в точке t_0 , так что

$$x_{t_0}(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < t_0, \\ 1, & \xi \geq t_0. \end{cases}$$

Выражение

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i I_{\xi_i}$$

представляет функцию распределения со скачками величины λ_i соответственно в точках ξ_i .

Часть I

**ТЕОРИЯ
МАТРИЧНЫХ ИГР**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИГРЫ
И ТЕОРЕМА О МИНИМАКСЕ

1.1. Введение. Игры в нормальной форме. Математическая теория стратегических игр имеет дело с ситуациями, охватывающими двух или более участников с противоположными интересами. Обычно исход таких игр частично контролируется одной стороной и частично противной стороной или сторонами; до некоторой степени он зависит и от случая, но главным образом от сообразительности и мастерства участников. Кроме игр в обычном смысле, таких, как покер и шахматы, существует много конфликтных ситуаций, к которым также может быть применена теория игр. Такие конфликты можно встретить в некоторых областях исследования операций, экономики, политики и военного дела.

Вначале мы рассмотрим лишь игры двух игроков с нулевой суммой ¹⁾, т. е. игры только с двумя участниками (конкурирующие люди, команды, фирмы, страны), в которых один участник выигрывает столько, сколько проигрывает другой. Следует отметить, что эти условия исключают возможность какой-либо сделки между участниками игры. Мы будем иметь дело также с играми двух лиц с постоянной суммой, в которых два игрока непримиримо конкурируют из-за возможно большей доли разыгрываемой суммы. Посредством соответствующего преобразования такая игра может быть превращена в игру с нулевой суммой.

Основным понятием в теории игр является понятие *стратегии*. Стратегия игрока I представляет собой полное перечисление всех действий, которые этот игрок предпримет в каждом из возможных в процессе игры положений, возникнет ли оно случайно или будет создано в результате хода противника ²⁾. Понятие стратегии не следует толковать слишком наивно. Может показаться, что стоило игроку I выбрать стратегию, как каждый его ход на любой стадии

¹⁾ В принятой на русском языке терминологии игры с нулевой суммой обычно называются *антагонистическими*. Этим термином мы далее и будем пользоваться. — *Прим. ред.*

²⁾ Или в результате хода самого игрока. — *Прим. ред.*

определяется в том смысле, что уже в начале игры он знает всю последовательность ходов, которые он будет делать, как бы ни играл его противник. То, что мы понимаем под „стратегией“, является лишь правилом, определяющим выбор игроком каждого своего i -го хода на основе всего, что произошло в партии ранее. Причина, по которой игрок не изменяет своей стратегии в течение игры, заключается не в том, что эта стратегия предписала ему совершить какую-либо последовательность ходов независимо от действий его противника, а в том, что для любых обстоятельств, которые могут возникнуть, она задает игроку ход, который он должен сделать.

Обычно при описании игры принято все возможные действия, хорошие или плохие, считать возможными стратегиями. Даже в простых играх число возможных стратегий исключительно велико. Рассмотрим игру в крестики и нолики¹⁾. Предположим, что первый ход делает игрок I. Для его первого крестика имеется девять возможных местоположений. После первого хода игрока I игрок II может осуществить один из восьми возможных ходов, и то, что сделает игрок I при своем втором ходе, будет зависеть от предыдущего хода игрока II. В этой ситуации игрок I располагает семью возможными ходами. Третий ход игрока I будет, конечно, зависеть от всех предыдущих ходов обоих игроков и т. д.

Одну из стратегий можно охарактеризовать, например, следующим образом. Первый крестик игрок I должен поставить в правую верхнюю клетку. Если игрок II заполняет следующую клетку ниже или слева, то игрок I ставит свой второй крестик в центральную клетку; если игрок II заполняет центральную клетку, игрок I ставит свой второй крестик в левую нижнюю клетку; если игрок II заполняет любую из других пяти клеток, игрок I ставит свой второй крестик в клетку непосредственно под первым крестиком. Подобным образом описание игры можно продолжить и далее. Игрок I мог бы даже предусмотреть в своей стратегии возможность рандомизации в соответствии с некоторым фиксированным распределением вероятностей на множествах альтернатив на каждом данном шаге.

Ясно, что даже в такой простой игре, как только что описанная, имеется громадное число возможных стратегий. Хотя интуитивно представляется, что многие из них являются плохими, мы для полноты описания игры обязаны включить в рассмотрение все возможности. В этой книге излагается построение математического аппарата,

¹⁾ В крестики и нолики (ticktacktoe) играют на клеточной сетке размерами 3×3 . Игроки делают ходы поочередно, причем на каждом ходе игроку разрешается заполнить своим значком (т. е. крестиком или ноликом) одну из оставшихся свободных клеток. Первый игрок, который заполнит три клетки, находящиеся на одной горизонтали, вертикали или диагонали, выигрывает.

позволяющего оперировать с множествами стратегий больших объемов и анализировать их.

Вторым основным понятием теории игр является понятие *функции выигрыша*. Выигрыш есть связующее звено между множеством стратегий, возможных для игрока I, и множеством стратегий, доступных игроку II. Говоря точнее, функция выигрыша есть правило, которое указывает, сколько игрок I может ожидать выиграть у игрока II, если игрок I выбирает любую конкретную стратегию из своего множества стратегий, а игрок II выбирает любую стратегию из своего. Функция выигрыша всегда выражается в соответствующих единицах полезности (см. комментарии к этому пункту на стр. 48).

Теперь мы в состоянии дать формальное определение игры.

Игрой называется *тройка* $\{X, Y, K\}$, в которой X есть пространство стратегий игрока I, Y — пространство стратегий игрока II, а K — вещественная функция на X и Y . Игрок I выбирает некоторую стратегию x из X , а игрок II выбирает некоторую стратегию y из Y . Для пары $\{x, y\}$ выигрыш игрока I есть $K(x, y)$, а выигрыш игрока II равен $-K(x, y)$. Функцию K мы будем называть также *ядром игры*.

На всем протяжении этой главы, если только не оговорено противоположное, предполагаются выполненными следующие условия:

- (а) X — выпуклое замкнутое ограниченное множество в n -мерном евклидовом пространстве E^n ;
- (б) Y — выпуклое замкнутое ограниченное множество в m -мерном евклидовом пространстве E^m ;
- (в) функция выигрыша K является линейно-выпуклой по каждой переменной. Именно

$$K[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, y] = \lambda K(x_1, y) + (1 - \lambda)K(x_2, y)$$

и

$$K[x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] = \lambda K(x, y_1) + (1 - \lambda)K(x, y_2),$$

где λ — произвольное вещественное число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq \lambda \leq 1$.

Некоторые из этих ограничений будут в последующих главах ослаблены.

Свойство, которое в гл. 1—4 является существенным, состоит в том, что X и Y — выпуклые множества конечной размерности. (Представление игры в виде тройки, содержащей пространства стратегий, которые являются конечномерными множествами, уже представляет собой известное ограничение. Его можно оправдать тем, что многочисленные реальные игры принадлежат именно этому типу.) Отождествление стратегий с точками n -мерного евклидова пространства удобно и упрощает математический анализ явления.

Важный частный класс игр получается, когда в качестве X берется симплекс S^n в пространстве E^n , определяемый как множество всех векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) и

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

а Y есть аналогичный симплекс T^m в пространстве E^m . Функция выигрыша принимает в этом случае вид

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} y_j = (x, Ay),$$

где A — матрица $\|a_{ij}\|$. В случае таких *матричных* игр мы часто будем обозначать выигрыш, соответствующий стратегиям x и y вместо $K(x, y)$, через $A(x, y)$, чтобы подчеркнуть, что эти игры являются именно матричными играми, т. е. такими играми, для которых $K(x, y) = (x, Ay)$.

Стратегии, представляющие собой вершины симплекса X , обозначаются через $\alpha_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где единица стоит на i -м месте ($i = 1, \dots, n$). Это так называемые *чистые стратегии* игрока I. Аналогично стратегии $\beta_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ из Y ($j = 1, \dots, m$) называются чистыми стратегиями игрока II. Так как

$$A(\alpha_i, \beta_j) = K(\alpha_i, \beta_j) = a_{ij},$$

мы видим, что элемент a_{ij} матрицы A выражает размер выигрыша игрока I, когда игрок I применяет чистую стратегию α_i , а игрок II чистую стратегию β_j .

Стратегия $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с отличными от единицы компонентами называется *смешанной стратегией*. На основании соотношения

$$\sum_{i=1}^n x_i K(\alpha_i, y) = K(x, y) \quad (1.1.1)$$

смешанная стратегия x может быть осуществлена следующим образом. Пусть производится случайное испытание с n возможными исходами, причем вероятность i -го исхода равна x_i , а i -я чистая стратегия применяется игроком I тогда и только тогда, когда в испытании

¹⁾ Хотя мы и приняли эту формулу за исходную, ее можно вывести, обращаясь к системе аксиом для некоторой модели предпочтения, на которой основан выбор среди альтернативных распределений вероятностей, заданных на пространстве исходов, получающихся в результате выбора чистых стратегий (см. комментарии к этому пункту в конце главы).

имел место i -й исход. В этом случае выигрыш игрока I равен среднему выигрышу в условиях этого испытания, т. е.

$$\sum_{i=1}^n x_i K(\alpha_i, y).$$

Сказанное равносильно употреблению каждой чистой стратегии с заданной вероятностью. Поэтому мы можем интерпретировать смешанную стратегию как распределение вероятностей на пространстве чистых стратегий, и наоборот. Подобная интерпретация возможна и для пространства стратегий T^m игрока II.

Обычно вводная часть теории игр состоит в описании пространств чистых стратегий каждого из игроков и в определении матрицы выигрыша A , соответствующей этим чистым стратегиям. Понятие смешанной стратегии вводится при этом позже, и функция выигрыша в этом случае естественным образом заменяется на функцию среднего ожидаемого выигрыша. В настоящей книге мы начали с более общей формулировки игры, как тройки, определяющей полное пространства стратегий для обоих игроков и ядро выигрыша. В этой формулировке уже не существует различия между чистыми и смешанными стратегиями. Тем не менее для многих конкретных классов игр естественно выделить чистые стратегии, на которые натягивается выпуклое множество всех стратегий. Это будет делаться, например, всякий раз, когда чистые стратегии возникают естественным путем и играют особую роль. Вообще говоря, мы практически не теряем общности, начиная прямо с антагонистических игр в нормальной форме с конечномерными пространствами стратегий.

С другой стороны, в литературе по теории игр принято проводить различие между играми в обобщенной форме ¹⁾ и играми в нормальной форме, причем в качестве отправного пункта часто берутся именно первые. После этого теория позиционных игр излагается при помощи таких более частных понятий, как „партия“, „выбор хода“, „личный ход“ и „информационное множество“. Затем определяется понятие стратегии и анализируется оптимальность стратегий именно с этой точки зрения. В заключение при этом доказывается теорема о том, что любая позиционная игра может быть приведена к эквивалентной ей игре в нормальной форме.

В противоположность такому введению понятия игры, наше определение игры как некоторой тройки опирается непосредственно на понятия стратегии и выигрыша. Это определение является достаточно гибким и общим, для того чтобы охватить все варианты теории конечных игр, включая, в частности, структуру позиционных игр. С помощью тщательного определения стратегий и четкого описания

¹⁾ В литературе на русском языке игры в обобщенной форме (games in extensive form) чаще называют *позиционными* играми. — *Прим. ред.*

пространств X и Y и функции $K(x, y)$ ¹⁾ мы сможем охарактеризовать все информационные схемы, которые могут встретиться. Это станет ясно, как только мы перейдем к изучению конкретных игр.

Может оказаться, что в отдельных случаях удастся построить два, на первый взгляд, различных пространства стратегий, которые, однако, с точки зрения выигрышей оказываются эквивалентными. Всякий раз, когда возникнет необходимость, мы будем эту эквивалентность доказывать. Однако при формальных рассуждениях любые две игры, различающиеся теми или иными конкретными элементами, считаются различными. Например, если мы расширяем пространство стратегий X , в то время как компоненты Y и K не изменяются, мы тем самым создаем новую игру. Это будет так, даже если вновь присоединенные стратегии заведомо хуже и их присоединение не может повлиять на первоначальный выбор оптимальной стратегии другим игроком. Практически, как мы увидим, пространства стратегий представляют собой исчерпывающий класс всех возможных действий, учитывающих всю тонкую структуру модели.

1.2. Примеры. В конечных матричных играх достаточно задать чистые стратегии игроков и матрицу выигрышей $\|a_{ij}\|$. Для произвольных смешанных стратегий x и y выигрыш выражается формулой

$$K(x, y) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} y_j. \quad (1.2.1)$$

Пример 1. Сравнение монет. Игроки I и II одновременно показывают друг другу по одной монете. Если выборы игроков I и II совпадают, т. е. если обе монеты показываются решеткой или гербом, то второй игрок отдает свою монету первому. В противном случае монету выигрывает игрок II. Матрица игры такова:

		Игрок II	
		Р	Г
Игрок I	Р	1	-1
	Г	-1	1

Здесь первая чистая стратегия игрока I заключается в том, чтобы показать решетку, а вторая в том, чтобы показать герб. Одна из возможных смешанных стратегий игрока I состоит в том, чтобы сделать показы решетки и герба равновероятными [т. е. $x = (1/2, 1/2)$].

Пример 2. Двупальцевая моря. Каждый игрок показывает другому один или два пальца и одновременно пытается угадать, сколько

¹⁾ Здесь под функцией K , очевидно, понимается некоторый единообразный способ получения ее значений, но отнюдь не фиксированное множество пар. — *Прим. ред.*

пальцев покажет другой игрок. Если оба игрока угадали правильно или оба угадали неправильно, то игра заканчивается вничью. Если же угадал правильно лишь один из игроков, то он выигрывает сумму, равную общему числу пальцев, показанных обоими игроками.

В этом случае каждая чистая стратегия будет состоять из двух компонент: (а) число показываемых пальцев и (б) число называемых пальцев. Таким образом, каждая стратегия может быть представлена парой (a, b) , где a означает первую из названных компонент стратегии, а b — вторую. Так, например, стратегия $(2, 1)$ игрока I означает, что он показывает два пальца и называет один. Всего каждый игрок имеет четыре чистых стратегии: $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ и $(2, 2)$. Матрица игры такова:

		Игрок II			
		(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
Игрок I	(1, 1)	0	2	-3	0
	(1, 2)	-2	0	0	3
	(2, 1)	3	0	0	-4
	(2, 2)	0	-3	4	0

Пример 3. Модель покера. По сравнению с настоящим покером, где число возможных сдач равно $\binom{52}{5}$, в данной модели покера имеется лишь три возможных сдачи (называемых далее картами), которые мы будем считать равновероятными. Каждый игрок может получить одну из карт. При этом карта 1 бьет карты 2 и 3, а карта 2 бьет карту 3. Первоначальная ставка равна a единицам. Игрок I может либо пасовать, либо повышать игру, добавляя b единиц. Если игрок I повышает, то игрок II может либо пасовать, либо уравнивать. Если игрок I пасует, а игрок II повышает, то игрок I снова имеет возможность пасовать или уравнивать. Три возможных способа протекания игры могут быть представлены следующей схемой:

Игрок I	Игрок II	Игрок I
пас	— пас	
пас	— повышение	— { пас — второй уравнивание }
повышение	— { пас — второй уравнивание }	

Если пас следует за повышением, то выигрывает повышение. Если оба противника пасуют или если один противник уравнивает, то карты сравниваются и игрок с лучшей картой выигрывает банк.

Стратегия игрока I должна предусматривать последовательность действий для каждой из трех возможных карт, которые могут ему

достаться, и для всех случаев, которые могут в процессе игры произойти. Мы можем обозначить такую стратегию тройкой, состоящей из пар чисел $\{[\alpha, \beta]_1, [\alpha, \beta]_2, [\alpha, \beta]_3\}$. Здесь в $\{\alpha, \beta\}_k$ компонента α означает вероятность повышения для игрока I в первом круге, если ему досталась k -я карта. Компонента β представляет собой вероятность повышения в этих же условиях на втором круге. Вторая компонента существенна лишь тогда, когда второй круг фактически играется. Однако стратегия этой игры должна включать значения β , так как она обязана учитывать все случаи игровой ситуации.

Аналогично каждая стратегия игрока II может быть представлена тройкой $\{[\lambda, \mu]_1, [\lambda, \mu]_2, [\lambda, \mu]_3\}$. Здесь компонента λ из $\{\lambda, \mu\}_k$ есть вероятность уравнивания игроком II повышения игрока I, если игрок II имеет k -ю карту. Компонента μ представляет собой вероятность повышения для игрока II, если игрок I перед этим спасовал.

В этом примере смешанные стратегии были введены непосредственно. Ввиду того, что компоненты такой стратегии формулируются в терминах поведения обоих игроков на каждом шаге, подобные стратегии часто называют „стратегиями поведения“. Этот характерный пример более подробно рассматривается в п. 4.3. Другие примеры приведены в конце этой главы (задачи 1—4).

1.3. Выбор стратегий. Предположим, что игрок II вынужден сообщить игроку I стратегию, которую он собирается использовать, и при этом объявляет стратегию y_0 . Тогда игрок I естественно выбирает свою стратегию x_0 так, чтобы максимизировать свой выигрыш (доход): $K(x_0, y_0) = \max_x K(x, y_0)$. В этих условиях наилучшее действие со стороны игрока II состоит в объявлении такой стратегии y_0 , чтобы

$$\max_x K(x, y_0) = \min_y \max_x K(x, y) = \bar{v}.$$

Здесь $\bar{v}$ (верхнее значение игры) может быть истолковано как тот максимум, который может получить игрок I, если игрок II применит указанную стратегию y_0 .

Предположим теперь, что игроки поменялись ролями и что теперь уже игрок I вынужден объявить стратегию x_0 . Так как игрок II может выбрать такую стратегию y_0 , что

$$K(x_0, y_0) = \min_y K(x_0, y),$$

наилучшим средством защиты игрока I является выбор такой стратегии x_0 , что

$$\min_y K(x_0, y) = \max_x \min_y K(x, y) = \underline{v},$$

где $\underline{v}$ (нижнее значение игры) может быть истолковано, как самое большее, что может гарантировать себе игрок I независимо от того, какую стратегию выберет игрок II. Для того чтобы продолжить эту линию рассуждений, установим вначале следующий простой результат.

► Лемма 1.3.1. (а) Пусть $f(x, y)$ — вещественная функция, определенная на произведении $X \times Y$. Тогда

$$\inf_y \sup_x f(x, y) \geq \sup_x \inf_y f(x, y) \quad (1.3.1)$$

($\pm \infty$ также допускаются в качестве значений функции).

(б) Если пространства X и Y компактны, а функция f непрерывна, то супремум и инфимум в (1.3.1) можно заменить соответственно на максимум и минимум.

Доказательство. По определению, для любого y

$$\sup_x f(x, y) \geq f(x, y).$$

Отсюда следует, что

$$\inf_y \sup_x f(x, y) \geq \inf_y f(x, y),$$

и (1.3.1) получается непосредственно. Доказательство утверждения (б) стандартно и поэтому опускается.

Лемма 1.3.1 при $f = K$ дает нам

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) \geq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y).$$

Выражая этот результат в терминах верхнего и нижнего значений игры, мы получаем

$$\bar{v} \geq \underline{v}.$$

Основной целью этой главы является установление для матричных игр равенства $\bar{v} = \underline{v} = v$. Соответствующим выбором своей стратегии игрок I может гарантировать себе значение $\underline{v} = v$, а игрок II осторожной игрой может не допустить, чтобы игрок I получил больше, чем $\bar{v} = v$. Таким образом, если игрок I не имеет дополнительной информации о поведении игрока II (например, он может ожидать, что выбор стратегии сделан игроком II наугад), то он должен играть так, чтобы получить v . Если он отклоняется от образа действий, которые гарантируют ему значение v , то его окончательный выигрыш может быть и меньше, чем v . Поэтому разумно считать это общее значение v значением игры для игрока I. Ясно, что $-v$ есть значение игры для игрока II.

Все стратегии x_0 и y_0 такие, что $K(x_0, y) \geq v$ для всех y и $K(x, y_0) \leq v$ для всех x , будут соответственно оптимальными стратегиями для игроков I и II.

Следующий простой критерий очень часто бывает полезен при установлении справедливости равенства $\bar{v} = \underline{v}$; кроме того, он указывает на связь между существованием оптимальных стратегий и равенством нижнего и верхнего значений игры.

► Теорема 1.3.1. Если существуют такие $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и вещественное число v , что

$$K(x_0, y) \geq v \quad \text{для всех } y \in Y$$

и

$$K(x, y_0) \leq v \quad \text{для всех } x \in X,$$

то

$$\bar{v} = \min_y \max_x K(x, y) = v = \max_x \min_y K(x, y) = \underline{v},$$

и обратно.

Доказательство. (а) Так как

$$K(x_0, y) \geq v \quad \text{для всех } y,$$

должно быть

$$\min_y K(x_0, y) \geq v \quad \text{и} \quad \max_x \min_y K(x, y) \geq v.$$

Аналогично неравенство

$$\max_x K(x, y_0) \leq v$$

влечет

$$\min_y \max_x K(x, y) \leq v.$$

Это дает нам

$$\max_x \min_y K(x, y) \geq \min_y \max_x K(x, y).$$

Но, согласно лемме 1.3.1,

$$\min_y \max_x K(x, y) \geq \max_x \min_y K(x, y).$$

Следовательно,

$$\min_y \max_x K(x, y) = \max_x \min_y K(x, y).$$

(б) Обратно: выберем y_0 так, чтобы

$$\max_x K(x, y_0) = \min_y \max_x K(x, y) = v,$$

и x_0 так, чтобы

$$\min_y K(x_0, y) = \max_x \min_y K(x, y) = v.$$

Тогда $K(x, y_0) \leq v$ и $K(x_0, y) \geq v$. Это завершает доказательство теоремы.

► Следствие 1.3.1. *Необходимым и достаточным условием выполнения равенства*

$$\min_y \max_x K(x, y) = \max_x \min_y K(x, y)$$

является существование таких стратегий $\{x_0, y_0\}$, что для всех y из Y и для всех x из X

$$K(x_0, y) \geq K(x_0, y_0) \geq K(x, y_0)^1.$$

Очевидно, $v = K(x_0, y_0)$.

1.4. Теорема о минимаксе для конечных матричных игр.

В этом пункте мы будем иметь дело только с матричными играми. В этом случае пространства стратегий X и Y игроков I и II совпадают соответственно с симплексами S^n и T^m , и поэтому каждое из множеств всех стратегий является выпуклой оболочкой чистых стратегий. Наша задача состоит в доказательстве основной теоремы о минимаксе для этих матричных игр.

Существует много различных доказательств этой теоремы. Фон Нейманом было дано два доказательства. Первое доказательство основано на теореме Брауера о неподвижной точке (см. п. В. 2 приложений), а второе — на теореме о том, что непересекающиеся выпуклые множества, лежащие в евклидовом пространстве, могут быть разделены гиперплоскостью. Другие доказательства используют алгебраические неравенства и свойства выпуклых функций. В этом и в следующем пунктах приводятся три таких доказательства. Мы выделяем эти доказательства потому, что каждое из них позволяет получить дополнительную информацию относительно оптимальных стратегий (см. ниже замечание 1.4).

Первое доказательство основано на идее разделения выпуклых множеств опорными гиперплоскостями. В ходе связанных с ним рассуждений приводится специальное геометрическое представление оптимальных стратегий. Аналогичные представления будут использованы далее при анализе строения множеств оптимальных стратегий.

¹⁾ Необходимость этого условия имеет место для компактных пространств X и Y . В общем случае необходимым и достаточным условием является равенство $\min_y \sup_x K(x, y) = \max_x \inf_y K(x, y)$. — Прим. ред.

► Лемма 1.4.1. Если S^n обозначает множество всех векторов в E^n , удовлетворяющих условиям $x_i \geq 0$ ($i=1, \dots, n$) и $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, а $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ — фиксированный вектор, то

$$\max_{x \in S^n} \sum_{i=1}^n x_i b_i = \max_i b_i. \quad (1.4.1)$$

Доказательство. Очевидно,

$$\max_i b_i = \sum_{j=1}^n \left(x_j \max_i b_i \right) \geq \sum_{j=1}^n x_j b_j.$$

С другой стороны,

$$\max_i b_i = b_{i_0} \leq \max_{x \in S^n} \sum_{i=1}^n x_i b_i.$$

Будем теперь развивать геометрическую интерпретацию стратегий и схематическое представление значения игры. Рассмотрим с этой целью матрицу игры

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{array} \right\| = \| \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \|,$$

где $\mathbf{a}_i$ — вектор-столбец $(a_{1i}, \dots, a_{ni})$. Система векторов вида $\mathbf{a}_i$ может быть представлена как m точек в n -мерном пространстве.

Пусть Γ — выпуклое множество в пространстве E^n , натянутое на $\mathbf{a}_i$, или, что то же самое, Γ есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих все векторы $\mathbf{a}_i$. Формально это можно записать так:

$$\Gamma = \left\{ \sum_{j=1}^m y_j \mathbf{a}_j \mid \sum_{j=1}^m y_j = 1, \quad y_j \geq 0 \right\}.$$

Допустимые значения. Вещественное число λ назовем допустимым, если существует такой вектор $\mathbf{p} \in \Gamma$, что $\mathbf{p} \leq \lambda$. (Напомним, что запись $\mathbf{p} \leq \lambda$ означает, что каждая компонента p_i меньше или равна λ ; см. стр. 23).

Обозначим через Ω множество всех допустимых чисел. Тогда, во-первых, Ω непусто, так как содержит число N , удовлетворяющее неравенствам $N > a_{ij}$ для всех i, j , и, во-вторых, Ω ограничено снизу числом — N , если N достаточно велико.

Пусть

$$\lambda_0 = \inf_{\lambda \in \Omega} \lambda.$$

Для того чтобы показать, что число λ_0 — допустимое, т. е. что $\lambda_0 \in \Omega$, выберем такую последовательность $\{\lambda_n\}$ элементов множества Ω , чтобы $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$.

Каждому λ_n соответствует по крайней мере один вектор $\mathbf{q}_n$ из Γ , для которого $\mathbf{q}_n \leq \lambda_n$. Так как Γ — компактное множество, то последовательность $\{\mathbf{q}_n\}$ должна иметь хотя бы одну предельную точку $\mathbf{q}_0$, для которой, как легко видеть, $\mathbf{q}_0 \leq \lambda_0$. Таким образом, λ_0 допустимо.

Рассмотрим „сдвинутый“ отрицательный ортант O_{λ_0} , состоящий из всех векторов, компоненты которых не превышают λ_0 . Множество O_{λ_0} касается множества Γ , не пересекаясь с ним. В самом деле, $O_{\lambda_0} \cap \Gamma \ni \mathbf{q}_0$, но если бы при этом внутренность множества O_{λ_0} содержала точки из Γ , это противоречило бы определению λ_0 .

Опорные гиперплоскости ортанта O_{λ_0} . Охарактеризуем теперь вид всех опорных гиперплоскостей ортанта O_{λ_0} , ориентированных так, что их нормали направлены в полупространство, не содержащее O_{λ_0} (см. также лемму Б.1.3 Приложения Б).

Рассмотрим гиперплоскость, определенную уравнением

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i + \mu_0 = 0, \quad \sum_{i=1}^n |\mu_i| \neq 0, \quad (1.4.2)$$

нормаль которой направлена от O_{λ_0} . Это уравнение определяет опорную гиперплоскость ортанта O_{λ_0} , если только для каждого ξ из O_{λ_0}

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \xi_i + \mu_0 \leq 0, \quad (1.4.3)$$

и существует $\xi^0 \in O_{\lambda_0}$, для которого достигается равенство. Покажем теперь, что μ_i можно охарактеризовать следующим образом:

$$\mu_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n \mu_i > 0, \quad \mu_0 = -\lambda_0 \sum_{i=1}^n \mu_i. \quad (1.4.4)$$

То, что числа μ_i ($1 \leq i \leq n$) неотрицательны, вытекает из применения неравенства (1.4.3) к вектору $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ с компонентами $\xi_j = \lambda_0$ ($j \neq i$) и $\xi_i = -N$ при достаточно большом N . Так как уравнение (1.4.2) определяет гиперплоскость, то

$$\sum_{i=1}^n \mu_i > 0.$$

Наконец, любая опорная гиперплоскость ортанта O_{λ_0} должна, очевидно, содержать вершину $\xi = (\lambda_0, \lambda_0, \dots, \lambda_0)$. Поэтому

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) \lambda_0 + \mu_0.$$

Обратно, любое множество чисел μ_i , удовлетворяющих условию (1.4.4), определяет опорную гиперплоскость O_{λ_0} , нормаль которой направлена в сторону полупространства, не содержащего O_{λ_0} .

Если мы заменим μ_i на x_i , то опорные гиперплоскости ортанта O_{λ_0} , нормали которых направлены из O_{λ_0} , могут быть охарактеризованы соотношением

$$\sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \lambda_0 = 0,$$

где

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \text{и} \quad x_i \geq 0.$$

Геометрическое представление стратегий. Каждая стратегия $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ из S^n , т. е. вектор, для которого

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \text{и} \quad x_i \geq 0,$$

определяет опорную гиперплоскость ортанта O_{λ_0} с уравнением

$$\sum_{i=1}^n x_i \xi_i - \lambda_0 = 0,$$

и обратно.

Стратегии $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ из T^m игрока II соответствуют точкам множества Γ . Сопоставим каждой стратегии $\mathbf{y}$ точку $\mathbf{p}$ с координатами

$$p_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j.$$

К сожалению, соответствие между такими множествами Y и Γ не является взаимно однозначным. Для взаимной однозначности этого соответствия необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был равен m .

Наконец, средний выигрыш $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может быть представлен как скалярное произведение нормали к плоскости, определяемой вектором $\mathbf{x}$, и элемента множества Γ , определяемого стратегией $\mathbf{y}$. В точной записи это выглядит так:

$$(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i a_{ij} y_j.$$

► **Теорема 1.4.1.** (Теорема о минимаксе.) *Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принимают значения соответственно из S^n и T^m , то*

$$\min_y \max_x A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_x \min_y A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = v.$$

Доказательство. Построим множества O_{λ_0} и Γ так, как это было описано выше. Поскольку выпуклые множества O_{λ_0} и Γ , согласно лемме Б.1.2 приложения Б, не пересекаются, существует гиперплоскость, разделяющая эти множества. Так как множества O_{λ_0} и Γ соприкасаются, эта гиперплоскость должна также быть опорной гиперплоскостью, которую можно ориентировать так, чтобы ее нормаль была направлена из O_{λ_0} .

Пусть направляющими коэффициентами этой нормали являются x_i^0 . Тогда ввиду того, что

$$\sum_{i=1}^n x_i^0 = 1 \quad \text{и} \quad x_i^0 \geq 0,$$

из (1.4.4) следует, что

$$\sum_{i=1}^n x_i^0 \xi_i - \lambda_0 \leq 0 \quad \text{для всех } \xi \in O_{\lambda_0}$$

и

$$\sum_{i=1}^n x_i^0 \xi_i - \lambda_0 \geq 0 \quad \text{для всех } \xi \in \Gamma.$$

Если y — произвольная фиксированная стратегия, то вектор ξ , где

$$\xi_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j,$$

должен принадлежать множеству Γ , и мы, таким образом, получаем, что для любой стратегии y

$$A(x^0, y) = \sum_{i=1}^n x_i^0 \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \geq \lambda_0. \quad (1.4.5)$$

Если y^0 — стратегия, соответствующая точке из Γ , принадлежащей также O_{λ_0} , то

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^0 \leq \lambda_0 \quad \text{для всех } i. \quad (1.4.6)$$

Отсюда следует, что для всех стратегий x , согласно лемме 1.4.1, $A(x, y^0) \leq \lambda_0$.

Доказательство теоремы завершается ссылкой на теорему 1.3.1.

Замечание 1.4. Мы видели, что стратегии I можно рассматривать как опорные гиперплоскости, а стратегии II — как точки множества Γ . Кроме того, мы видим, что оптимальные стратегии I соответствуют гиперплоскостям, разделяющим O_{λ_0} и Γ , а оптимальные стратегии II соответствуют тем точкам Γ , которые соприкасаются с O_{λ_0} . Эта геометрическая характеристика оптимальных стратегий будет использована в гл. 3.

Интерпретации, используемые в доказательстве теоремы 1.4.1, не симметричны: x -стратегии соответствуют гиперплоскостям, а y -стратегии — точкам n -мерного евклидова пространства. Однако может быть произведен симметричный анализ, который сопоставит y -стратегиям гиперплоскости, а x -стратегиям точки. При таком анализе аналогом множества Γ оказывается выпуклое множество, натянутое на векторы-строки матрицы A .

Часто бывает интересным узнать, существуют ли чистые оптимальные стратегии. Оказывается, что это имеет место в том случае, когда существуют такие чистые стратегии $\{\alpha_{i_0}, \beta_{j_0}\}$, что

$$\begin{aligned} \alpha_{i_0, j} &\geq \alpha_{i_0, j_0} && \text{для всех } j, \\ \alpha_{i_0, j_0} &\geq \alpha_{i, j_0} && \text{для всех } i. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Из первого неравенства следует, что для любой смешанной стратегии y

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{i_0, j} y_j \geq \alpha_{i_0, j_0} = v,$$

или, что то же самое, $A(\alpha_{i_0}, y) \geq v$. Аналогично мы получаем, что $v \geq A(x, \beta_{j_0})$, и, таким образом, α_{i_0} и β_{j_0} являются соответственно оптимальными стратегиями игроков I и II.

В тех случаях, когда чистые оптимальные стратегии существуют, говорят, что матрица A имеет *седловую точку* (i_0, j_0) . Седловая точка есть такой элемент матрицы, который является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце.

1.5.* Общая теорема о минимаксе. В этом пункте приводятся еще два доказательства теоремы о минимаксе для произвольных конечных игр. Первое доказательство основано на теореме Какутани о неподвижной точке. Второе доказательство опирается лишь на свойства выпуклых функций.

► **Теорема 1.5.1** Пусть $f(x, y)$ — вещественная функция двух переменных x и y , принимающих соответственно значения из C и D , где как C , так и D — замкнутые, ограниченные, выпуклые множества. Если функция f непрерывна, выпукла относительно y для каждого x и вогнута относительно x для каждого y , то

$$\min_y \max_x f(x, y) = \max_x \min_y f(x, y).$$

* Отмеченные звездочкой пункты посвящены более глубокому рассмотрению предмета и могут быть при первом чтении опущены без опасения потерять целостность представления о предмете.

Доказательство. Для каждого x положим $\varphi_x(y) = f(x, y)$ и

$$B_x = \{y \mid \varphi_x(y) = \min_{y \in D} \varphi_x(y)\}.$$

Легко проверить, что множество B_x непусто, замкнуто и выпукло. Тот факт, что B_x выпукло, есть следствие выпуклости функции f относительно y . Положим, далее, для каждого y

$$\psi_y(x) = f(x, y)$$

и

$$A_y = \{x \mid \psi_y(x) = \max_{x \in C} \psi_y(x)\}.$$

Здесь множество A_y также непусто, замкнуто и выпукло.

Пусть множество E есть прямое произведение $E = C \times D$ выпуклых множеств C и D . Напомним, что прямое произведение двух выпуклых множеств выпукло.

Пусть далее g — отображение, переводящее точку $\{x, y\} \in E$ в множество $(A_y \times B_x)$. Так как A_y и B_x являются непустыми замкнутыми выпуклыми подмножествами множеств C и D , то $(A_y \times B_x)$ также непустое замкнутое выпуклое подмножество множества E . Следовательно, выполнено условие (а) теоремы Какутани (см. п. В. 2 Приложения). Легко проверить также, что выполняется и требуемое в этой теореме условие непрерывности. Поэтому, в силу теоремы Какутани, существуют такие x^0 и y^0 , что $\{x^0, y^0\} \in (A_{y^0} \times B_{x^0})$, т. е.

$$f(x^0, y^0) \geq f(x, y^0) \quad \text{для всех } x \in C,$$

$$f(x^0, y^0) \leq f(x^0, y) \quad \text{для всех } y \in D.$$

Тогда из следствия 1.3.1 вытекает, что

$$\min_{y \in D} \max_{x \in C} f(x, y) = \max_{x \in C} \min_{y \in D} f(x, y). \quad (1.5.1)$$

Мы видим, что всякий раз, когда выполняется соотношение (1.5.1), игра, определенная как тройка (f, C, D) , обладает значением, или, говоря иначе, эта игра является *вполне определенной*.

Другое доказательство проводится следующим образом. Предположим сначала, что $f(x, y)$ — строго выпуклая функция относительно y для произвольного фиксированного x и строго вогнутая функция относительно x для любого фиксированного y . Согласно свойству строгой выпуклости, существует такое $y(x)$, что

$$f[x, y(x)] = \min_y f(x, y) = m(x).$$

Из равномерной непрерывности функции f и единственности $y(x)$ без труда выводится, что функции $m(x)$ и $y(x)$ непрерывны. Кроме

того, поскольку минимум семейства вогнутых функций является вогнутой функцией, $m(x)$ вогнута. Пусть x^* — такая точка, в которой

$$m(x^*) = \max_x m(x) = \max_x \min_y f(x, y).$$

По предположению, для любого x из C и любого $t \in (0, 1)$ мы имеем

$$f[(1-t)x^* + tx, y] > (1-t)f(x^*, y) + tf(x, y) \geq$$

$$\geq (1-t)m(x^*) + tf(x, y).$$

Выберем

$$y = y[(1-t)x^* + tx] = \tilde{y},$$

так что

$$m[(1-t)x^* + tx] \geq (1-t)m(x^*) + tf(x, \tilde{y}).$$

Но ввиду того, что $m(x^*) \geq m(x)$ для всех x из C , мы получим, что

$$m(x^*) \geq m[(1-t)x^* + tx],$$

а поэтому

$$f(x, \tilde{y}) \leq m(x^*) = f[x^*, y(x^*)].$$

Пусть теперь $t \rightarrow 0$, так что

$$(1-t)x^* + tx \rightarrow x^* \quad \text{и} \quad \tilde{y} \rightarrow y(x^*).$$

Отсюда следует, что

$$f[x, y(x^*)] \leq f[x^*, y(x^*)] \quad (1.5.2)$$

для любого x . Если положить $y(x^*) = y^*$ и $v = f(x^*, y^*)$, то из неравенства (1.5.2) и определения $y(x)$ следует, что

$$f(x, y^*) \leq v \leq f(x^*, y).$$

Это неравенство эквивалентно теореме о минимаксе. Нам остается лишь ослабить условия строгой выпуклости-вогнутости, наложенные выше. С этой целью введем функции

$$f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) - \varepsilon f(x) + \varepsilon g(y),$$

где

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad g(y) = \sum_{j=1}^m y_j^2.$$

Каждая из функций f_ε удовлетворяет требованиям строгой выпуклости-вогнутости, используемым в предшествующей аргументации, и поэтому

$$f(x, y_\varepsilon) - \varepsilon f(x) \leq f_\varepsilon(x, y_\varepsilon) \leq v_\varepsilon \leq f_\varepsilon(x_\varepsilon, y) \leq f(x_\varepsilon, y) + \varepsilon g(y)$$

для всех $\{x, y\} \in C \times D$. Возьмем теперь сходящуюся к нулю последовательность $\{\varepsilon\}$ и рассмотрим подпоследовательность этой по-

следовательности, для которой

$$x_\epsilon \rightarrow x^*, \quad y_\epsilon \rightarrow y^*, \quad v_\epsilon \rightarrow v^*.$$

В пределе мы получим

$$f(x, y^*) \leq v^* \leq f(x^*, y),$$

и доказательство теоремы завершено.

1.6. Задачи.

1. „Камень, мешок и ножницы“. Игроки одновременно называют один из этих предметов, причем „мешок“ побеждает „камень“, „камень“ — „ножницы“ и „ножницы“ — „мешок“. Игрок, который выберет выигрывающий предмет, выигрывает у противника одну единицу; если оба игрока выберут одинаковые предметы, игра оканчивается вничью. Написать матрицу этой игры и описать оптимальные стратегии игроков в ней.

2. Две карты, называемые далее С (старшая) и М (младшая), помещаются в шляпу. Игрок I наугад извлекает одну карту и смотрит ее. Он может сразу же пасовать, в этом случае он платит игроку II сумму $a > 0$; или же он может повышать, в этом случае игрок II может либо пасовать, уплачивая сумму a игроку I, либо уравнивать. Если он уравнивает, то он получает или платит игроку I сумму $b > a$ в зависимости от того, какая карта М или С досталась игроку I. Построить игру и решить ее с помощью теоремы 1.4.1.

3. Игрок I извлекает случайно из шляпы карту С или М. После этого у него имеется один из двух выборов: повышать или пасовать. Если он повышает, то игрок II может либо пасовать, и тогда он платит игроку I сумму a , либо уравнивать ставку, и тогда он выигрывает или проигрывает сумму $b > a$ в зависимости от того, какая карта у игрока I, С или М. Если игрок I пасует сразу, то игрок II наугад извлекает из другой шляпы карту С или М. После этого игрок II имеет аналогичный выбор действий, на которые игрок I должен отвечать с соответствующими выигрышами. Если игрок II пасует на втором круге, то выигрыш равен нулю. Описать эту игру и пространства стратегий.

4. Каждый игрок должен выбрать одно из целых чисел между 1 и 9. Если число, выбранное одним из игроков, на единицу больше, чем число, выбранное другим, то первый игрок проигрывает два доллара. Если выбор одного из игроков больше хотя бы на две единицы, то он выигрывает один доллар. В том случае, когда выборы игроков совпадают, игра заканчивается вничью. Построить матрицу этой игры.

5. Показать, что $n \times n$ -матрица $\|a_{ij}\|$ с элементами $a_{ij} = i - j$ имеет седловую точку. Описать соответствующие оптимальные стратегии.

6. Решить с помощью теоремы 1.4.1 игру с матрицей

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 7 \\ -1 & & 9 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

7. Две игры имеют соответственно матрицы $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$. Значение первой игры равно v , а элементы второй матрицы равны $b_{ij} = a_{ij} + a$. Показать, что значение игры с матрицей B равно $v + a$ и что оптимальные стратегии для обоих игроков совпадают.

8. Показать, что каждая из двух матриц

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ x & 0 \end{vmatrix}$$

имеет седловую точку и что найдутся такие значения x_1 и x_2 , при которых выполняются соотношения

$$v(A_1 + A_2) < v(A_1) + v(A_2)$$

и

$$v(A_1 + A_2) > v(A_1) + v(A_2).$$

9. Привести пример, который показывает, что выполнение равенства

$$(x^*, Ay^*) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} (x, Ay) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} (x, Ay)$$

не является достаточным для оптимальности стратегий x^* и y^* .

10. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — $m \times n$ -матрица. Показать, что существует либо такой вектор

$$u = (u_1, \dots, u_n), \quad \left(u_i \geq 0, \sum_{i=1}^n u_i = 1 \right),$$

что

$$\sum_{i=1}^n u_i a_{ij} \geq 0 \quad \text{для всех } j,$$

либо такой вектор

$$w = (w_1, \dots, w_m) \quad \left(w_j \geq 0, \sum_{j=1}^m w_j = 1 \right),$$

что

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} w_j < 0 \quad \text{для всех } i.$$

11. Пусть имеется игра с $m \times n$ -матрицей $B = \|b_{ij}\|$, и $f(t)$ — выпуклая, возрастающая функция от t . Пусть Γ — игра со стратегиями

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_m)$$

и функцией выигрыша

$$\sum_{i=1}^n x_i f\left(\sum_{j=1}^m b_{ij} y_j\right).$$

Показать, что оптимальные стратегии для игры с матрицей **B** являются оптимальными и для новой игры.

12. Показать, что игра с функцией выигрыша

$$\sum x_i \dot{a}_{ij} y_j$$

при замкнутых множествах стратегий S и T имеет значение только в том случае, когда в игре, определенной на выпуклых оболочках множеств S и T , игроки имеют оптимальные стратегии $\mathbf{x}^* \in S$ и $\mathbf{y}^* \in T$.

13. Пусть **A**, **B** и **D** — соответственно матричные игры с матрицами следующих размеров: $n_1 \times m_1$, $n_1 \times m_2$, $n_2 \times m_2$ и значениями a , b , d . Пусть далее $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\}$ и $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*\}$ — соответственно оптимальные стратегии для игр **A** и **D** и, наконец, векторы $(\xi, 1 - \xi)$ и $(\eta, 1 - \eta)$ — оптимальные стратегии для игры с матрицей

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix}.$$

Показать, что если $a < 0 < d$, то стратегии

$$\mathbf{x} = (\xi x_1^0, \dots, \xi x_{n_1}^0, (1 - \xi) x_{n_1+1}^*, \dots, (1 - \xi) x_{n_1+n_2}^*),$$

$$\mathbf{y} = (\eta y_1^0, \dots, \eta y_{m_1}^0, (1 - \eta) y_{m_1+1}^*, \dots, (1 - \eta) y_{m_1+m_2}^*)$$

являются оптимальными стратегиями для игры с матрицей

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{vmatrix}.$$

14. Показать, что значение матричной игры есть неубывающая непрерывная функция элементов матрицы.

15. Пусть X и Y — выпуклые, компактные множества, а функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вогнута относительно $\mathbf{x}$ и выпукла относительно $\mathbf{y}$. Показать, что для любой ограниченной последовательности $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ существует такая пара $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0\}$, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} f(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_0) \leq \min_{1 \leq j \leq m} f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_j).$$

16. Пусть X и Y — выпуклые множества, а множество Y , кроме того, компактно. Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — функция, определенная на множестве $X \times Y$, полунепрерывная снизу относительно $\mathbf{y}$, вогнутая относительно $\mathbf{x}$ и выпуклая относительно $\mathbf{y}$. Показать, что для каждого вещественного α существует либо такое $\mathbf{y}_0 \in Y$, что $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0) \leq \alpha$ для всех $\mathbf{x} \in X$, либо такое $\mathbf{x}_0 \in X$, что $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) > \alpha$ для всех $\mathbf{y} \in Y$.

17. Показать, что если каждая 2×2 -подматрица матрицы A имеет седловую точку, то матрица A также имеет седловую точку.

18. Пусть A — невырожденная $n \times m$ -матрица, причем $m \geq 3$. Показать, что если каждая подматрица размера $n \times (m-1)$ имеет строгую седловую точку, то матрица A также имеет седловую точку.

19. Пусть X и Y — выпуклые многогранники соответственно в пространствах E^n и E^m . Пусть A — $n \times m$ -матрица. Положим

$$v_2 = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} (x, Ay); \quad v_1 = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} (x, Ay).$$

Доказать, что из $v_1 \neq v_2$ следует $v_1 = -\infty$ и $v_2 = +\infty$. Построить пример, удовлетворяющий условиям $v_1 = -\infty$; $v_2 = +\infty$; $v_1 = v_2 = +\infty$; $v_1 = v_2 = -\infty$. (Выпуклый многогранник определяется как пересечение конечного числа замкнутых полупространств.)

Комментарии и библиография к главе I

1.1. Имеется несколько популярных и развлекательных работ по теории конечных игр и ее приложениях, доступных для читателей-нематематиков. Назовем в первую очередь книги Вильямса [1] и Мак-Дональда [1].

Обширное критическое исследование основных понятий теории игр, теории полезности и родственных направлений содержится в книге Льюса и Райфы [1]. Помимо освещения принципиальных вопросов теории игр и решений, авторы в восьми приложениях дают необходимый очерк некоторых методов теории игр.

Современный математический подход к теории игр исторически восходит к статьям фон Неймана, относящимся к 1928 г. [1] и 1938 г. [2], хотя некоторые проблемы теории игр еще раньше рассматривались Борелем [2]. Основным стимулом тех энергичных исследований в области теории игр, которые проводятся в настоящее время, явилась опубликованная в 1944 г. фон Нейманом и Моргенштерном [1] фундаментальная книга, посвященная играм и экономическому поведению. Для предварительного математического ознакомления с теорией игр читатель может обратиться к учебникам Мак-Кинси [1], Гейла [4] и Вайды [1].

Для более глубокого изучения мы рекомендуем сборники под редакцией Куна и Таккера [10, 11]. Следующий сборник работ по теории игр был составлен Дрешером, Таккером и Вульфом [9]. Тех, кто в основном интересуется теорией игр n лиц, мы отсылаем к работе Шепли [1] и сборнику под редакцией Льюса и Таккера [14].

Отдельные работы, посвященные близким вопросам, также охватывают некоторые разделы теории игр. К этой категории относятся работы Блекуэлла и Гиршика [1], Чёрчмена, Аккоффа и Арнофа [1], Мак-Клоски и Трефетена [1] и Аллена [1].

Сборник, содержащий интересные результаты по теории игр, был составлен Дрешером [1].

Хотя знание теории полезности и не является решающим для аналитического изучения структуры игр и их решений, несколько слов об этом предмете могут оказаться полезными.

Фон Нейман и Моргенштерн в своей классической книге ввели систему аксиом, которой должно удовлетворять отношение предпочтения $>$, определенное на ограниченном множестве исходов и пространстве распределения

вероятностей этих исходов $\mathcal{S}$. Это означает, что из любых двух распределений вероятностей P_1 и P_2 в пространстве исходов отношение предпочтения выделяет одно, которое предпочитается другому. (Символически либо $P_1 > P_2$, либо $P_2 > P_1$).

Эти аксиомы, если их сформулировать несколько вольно, состоят в следующем:

1. Если $P_1 > P_2$ и $Q_1 > Q_2$, то любая „вероятностная смесь“ P_1 и Q_1 предпочтительнее аналогичной „вероятностной смеси“ P_2 и Q_2 .

2. (Аксиома непрерывности.) В пространстве исходов отсутствует распределение вероятностей, являющееся бесконечно желательным или бесконечно нежелательным. Формально эту аксиому мы можем выразить следующим образом. Если $P_1 < P_2 < P_3$, то найдутся такие числа $\lambda < 1$ и $\mu > 0$, что

$$\lambda P_1 + (1 - \lambda) P_3 < P_2, \quad \mu P_1 + (1 - \mu) P_3 > P_2.$$

В тех случаях, когда отношение предпочтения подчиняется этим аксиомам его можно выразить в виде числовой функции полезности U , определенной для распределения вероятностей на множестве исходов. Более того, функция U оказывается линейно выпуклой относительно операции взятия выпуклых комбинаций элементов из $\mathcal{S}$. Авторы показывают также, что функция U определяется единственным образом с точностью до положительного линейного аффинного преобразования. Это означает, что если U — функция полезности, то другим единственно возможным видом функции полезности является $aU + b$ (где $a > 0$ и b — вещественное число). Соответствующее доказательство приведено в гл. I книги фон Неймана [4].

Блекуэлл и Гиршик [1] распространили этот результат на случай, когда пространство исходов содержит счетное число элементов. Льюс и Райфа [1] подвергли аксиомы фон Неймана и Моргенштерна тщательному изучению. Мы рекомендуем их критическое обсуждение читателю, интересующемуся основаниями теории игр.

В классическом подходе к теории игр при задании стратегии необходимо точно определить решения обоих игроков, принимаемые ими на основе имеющейся в их распоряжении информации. Вследствие случайных ходов, которые могут иметь место в процессе игры, пары стратегий могут принимать вид случайных величин с некоторым известным распределением вероятностей¹⁾.

Обычно при выборе стратегий необходимо определить отношение предпочтения, на основании которого производится выбор распределений вероятностей на множестве исходов. Если аксиомы фон Неймана и Моргенштерна для этого отношения предпочтения выполняются, то предпочтение, связанное с любой парой чистых стратегий, может быть выражено числом, полученным на основе применения понятия полезности к распределениям по всем исходам. Таким путем функция выигрыша может быть сконструирована в соответствии с характером полезности. Кроме того, функция выигрыша является аддитивной (т.е. линейно-выпуклой) при вычислении средних значений относительно вероятностных распределений на множестве чистых стратегий. Следовательно, формула (1.1.1) имеет место.

1.2. Пример покера, приведенный в этом пункте, был впервые предложен и изучен Кунон [1]. Общая методика анализа салонных игр такого типа развивается в гл. 17.

1.3. Понятие верхнего и нижнего значений игры было введено фон Нейманом, который называл эти числа соответственно ситуации мажорантами и минорантами игры.

¹⁾ То есть чистая стратегия игрока может состоять в выборе им той или иной случайной величины. — *Прим. ред.*

1.4. Доказательства основной теоремы о минимаксе были даны фон Нейманом [2], Виллем [1], Лумисом [1], Карлином [1], Фань Цзи [2], Гликсбергом [2] и другими авторами. Все доказательства, за исключением доказательства Лумиса, существенно используют некоторый вид выпуклости и компактности пространств стратегий.

1.5. Первое доказательство в этом пункте принадлежит Какутани [1], который получил в ходе доказательства теоремы о минимаксе обобщение классической теоремы Брауэра о неподвижной точке. Метод Какутани связан с некоторыми свойствами выпуклости рассматриваемой им отображающей функции. Эйленберг и Монтгомери [1], а также Бегл [1] показали, что эта обобщенная теорема о неподвижной точке имеет место в тех случаях, когда условие выпуклости заменяется требованием простой связности для некоторых множеств. Дальнейшее распространение идей в этом направлении было дано Дебрё [1]. Второе доказательство в этом пункте было предложено Шифманом [1].

1.6. Задачи 2 и 3 предложены Борелем [2]. Формулировка задачи 12 впервые встречается у Гликсберга. Результаты задач 15 и 16 были использованы Фань Цзи [1]. Задачи 17 и 18 были предложены Шепли. Задача 19 принадлежит Вулфу [1].

СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ МАТРИЧНЫХ ИГР

В этой главе мы рассмотрим некоторые из основных методов, применяемых при исследовании матричных игр. Особое внимание уделяется характеристике крайних ¹⁾ оптимальных стратегий. Так как на крайние оптимальные стратегии натянуто множество всех оптимальных стратегий, знание крайних стратегий, по существу, эквивалентно знанию всех оптимальных стратегий: каждая оптимальная стратегия является выпуклой комбинацией крайних. Описание крайних оптимальных стратегий может быть использовано при разработке вычислительной схемы, позволяющей получить множество всех оптимальных стратегий.

Понятие доминирования стратегий, которое вводится в п. 2.2, дает возможность уже на ранней стадии решения игры легко исключить из рассмотрения заведомо невыгодные чистые стратегии. Принцип доминирования особенно полезен при непосредственном решении игр, так как многие игры с матрицами большого на вид размера могут быть сведены к играм с матрицами меньшего размера посредством исключения всех доминируемых стратегий. В этой главе выделяются четыре типа доминирования и разрабатывается связанная с ними методика.

В данной главе вводится также важный класс игр, называемых *вполне смешанными*. Так называются игры, у которых все чистые стратегии активны (т. е. имеют положительную вероятность) в условиях любой оптимальной стратегии. Рассматриваются некоторые примеры таких игр.

В конце главы рассматриваются симметричные игры, т. е. игры соответствующие „безобидной игре“, в которой равны не только вероятные выигрыши обоих игроков, но и их стратегические возможности.

2.1. Свойства оптимальных стратегий. В этом пункте мы установим два основных свойства оптимальных стратегий в матричных играх. Эти свойства будут использованы в последующих пунктах.

¹⁾ Такие оптимальные стратегии иногда называются также базисными, экстремальными или угловыми. — *Прим. перев.*

► **Лемма 2.1.1.** *Множество оптимальных стратегий каждого из игроков является выпуклым и замкнутым.*

Доказательство. Мы приведем здесь доказательство только для игрока I. Если v — значение игры, а x_0 и x'_0 — оптимальные стратегии игрока I, то $A(x_0, y) \geq v$ и $A(x'_0, y) \geq v$ для всех y . Поэтому для всех y

$$A[\lambda x_0 + (1 - \lambda) x'_0, y] = \lambda A(x_0, y) + (1 - \lambda) A(x'_0, y) \geq v,$$

и, следовательно, сегмент

$$\lambda x_0 + (1 - \lambda) x'_0 \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

содержится в множестве X^0 всех оптимальных стратегий.

То, что множество X^0 замкнуто, следует из непрерывности $A(x, y)$ как функции от x .

► **Лемма 2.1.2.** *Если y^0 — оптимальная, смешанная стратегия игрока II и $y_{j_0}^0 > 0$, то для каждой оптимальной стратегии x игрока I должно выполняться соотношение*

$$A(x, y_{j_0}^0) = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij_0} = v.$$

Аналогичный результат имеет место и для другого игрока.

Доказательство. Пусть x — оптимальная стратегия.

Так как $(0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, где единица стоит на месте r -й компоненты, является возможной стратегией вида y , то

$$\sum_{i=1}^n x_i a_{ir} \geq v \text{ для всех } r. \quad (2.1.1)$$

Предположим, что для $r = j_0$ имеет место строгое неравенство. Тогда

$$y_{j_0}^0 \sum_{i=1}^n x_i a_{ij_0} > v y_{j_0}^0$$

(так как $y_{j_0}^0 > 0$), но для $r \neq j_0$ мы имеем

$$y_r^0 \sum_{i=1}^n x_i a_{ir} \geq v y_r^0.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{r=1}^m y_r^0 \sum_{i=1}^n x_i a_{ir} > v \sum_{r=1}^m y_r^0 = v.$$

Это противоречит предположению об оптимальности стратегии y^0 . Следовательно, мы имеем

$$\sum_{i=1}^n x_i a_{ij_0} = v \quad \text{для всех оптимальных } x.$$

Для удобства дальнейших ссылок введем некоторые новые термины.

Если i -я компонента x_i стратегии x положительна, то соответствующая ей чистая i -я стратегия называется *существенной* для x , *активной* для x , а также *употребляемой* в x с *положительной вероятностью*. При упоминании чистой стратегии мы будем равнозначно использовать термин „ i -я строка“ или „ i -я чистая стратегия“.

Если для строки i имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = v,$$

то будем говорить, что она *уравновешивает* стратегию y . В этом контексте лемма 2.1.2 может быть сформулирована следующим образом. Если строка i активна для оптимальной стратегии x^0 , то строка i уравновешивает каждую оптимальную стратегию y .

Аналогичная терминология будет применяться для y -стратегий и столбцов матрицы. Иногда оптимальная стратегия будет называться *решением игры*¹⁾.

Наконец, мы часто будем употреблять обозначение $Ay = v$, где A — матрица, y — вектор и v — вектор вида $(v, v, v, \dots, v)$ с соответствующим числом компонент. Мы будем также употреблять выражения вида $Ay \leq v$ и $xA \geq v$.

2.2. Виды строгого доминирования. С помощью принципа доминирования часто удается уменьшать размеры матриц игры. При использовании этого принципа стратегии, являющиеся оптимальными для уменьшенной матрицы, будут оптимальными стратегиями и для исходной матрицы. Таким образом, принцип доминирования может быть использован для упрощения задачи нахождения оптимальных стратегий. В гл. 4 приводятся конкретные примеры применения этого принципа.

Принцип доминирования устанавливает, что если одна из доступных игроку стратегий лучше, чем другая, независимо от того, какую стратегию использует его противник, то худшая стратегия может быть при испытании стратегий на оптимальность исключена. Этот

¹⁾ Обычно решением антагонистической игры называют ситуацию равновесия, т. е. пару (x^*, y^*) , где x^* — оптимальная стратегия игрока I и y^* — оптимальная стратегия игрока II. Получающаяся многозначность термина „решение“ нас в дальнейшем к недоразумению не приведет. — *Прим. ред.*

принцип и его применения разрабатываются в следующих четырех теоремах, которые формулируются и доказываются только для случая доминирования строк. Аналогичные результаты для случая доминирования столбцов формулируются без доказательства.

Определение 2.2.1. n -мерный вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ строго доминирует n -мерный вектор $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, если $\alpha_i > \beta_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

► Теорема 2.2.1. Если j -я строка матрицы выигрышей A строго доминирует ее i -ю строку, то без изменения множества оптимальных стратегий игрока I i -я строка может быть из матрицы A вычеркнута.

Доказательство. Для оптимальной стратегии y^0 мы имеем

$$v \geq \sum_k a_{jk} y_k^0 > \sum_k a_{ik} y_k^0,$$

а, согласно лемме 2.1.2, оптимальная стратегия x^0 не может иметь компоненту $x_i^0 > 0$.

▮ Теорема 2.2.1a. Если j -й столбец строго доминирует i -й столбец, то i -й столбец может быть вычеркнут без изменения множества оптимальных стратегий игрока II.

► Теорема 2.2.2. Если i -я строка матрицы строго доминируется выпуклой комбинацией других строк, то i -я строка может быть вычеркнута.

Доказательство. По условию теоремы существует такая стратегия $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ с $x_i = 0$, что

$$a_{ij} < \sum_{k=1}^n x_k a_{kj} \quad \text{для } j = 1, \dots, m. \quad (2.2.1)$$

Если стратегия y^0 игрока II оптимальна, то

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j^0 < (x, Ay^0) \leq v.$$

Из последнего неравенства и леммы 2.1.2 следует, что i -я строка не может быть активной в какой-либо стратегии x , а отсюда следует заключение теоремы.

Как в этой, так и в следующих теоремах под „возможностью“ понимается неизменность множества оптимальных стратегий.

► Теорема 2.2.2а. Если i -й столбец строго доминирует некоторую выпуклую комбинацию других столбцов, то i -й столбец может быть вычеркнут.

► Теорема 2.2.3. Если выпуклая комбинация строк из множества строк R_1 строго доминирует выпуклую комбинацию строк из множества строк R_2 , то в R_2 существует строка, которая может быть вычеркнута.

Доказательство. Пусть x^1 — выпуклая комбинация строк в R_1 , которая строго доминирует выпуклую комбинацию x^2 строк в R_2 , т. е.

$$x^1 A > x^2 A.$$

Предположим противное, т. е. что в некоторой оптимальной стратегии каждая строка из R_2 встречается с положительной вероятностью. Ранее в лемме 2.1.2 мы получили, что для оптимальной стратегии y^0 каждая из компонент произведения Ay^0 в R_2 равна числу v . Таким образом, мы имеем

$$v \geq (x^1, Ay^0) > (x^2, Ay^0) = v,$$

что невозможно. Следовательно, некоторая строка из множества R_2 может быть вычеркнута. Это значит, что имеется такая строка, что соответствующая ей компонента в любой оптимальной стратегии x равна 0.

► Теорема 2.2.3а. Если выпуклая комбинация столбцов из множества C_1 строго доминирует выпуклую комбинацию столбцов из множества C_2 , то существует столбец из C_1 , который можно вычеркнуть.

► Теорема 2.2.4. Пусть

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}.$$

Если каждый столбец A_2 строго доминирует некоторую выпуклую комбинацию столбцов A_1 и каждая строка A_3 строго доминируется некоторой выпуклой комбинацией строк A_1 , то подматрицы A_2 , A_3 и A_4 могут быть вычеркнуты.

Доказательство. Предположим, что в некоторой оптимальной стратегии x^* строка i подматрицы A_3 встречается с вероятностью λ . Так как некоторая выпуклая комбинация строк подматрицы A_1 строго доминирует строку i , мы можем распределить вероятность λ среди этих строк подматрицы A_1 пропорционально весам, используемым

при составлении выпуклой комбинации. В результате мы получим новую стратегию x^0 . Осуществим такое построение для каждой строки i подматрицы A_3 , являющейся активной для оптимальной стратегии x^* , и обозначим через x' последнюю полученную стратегию. Ясно, что если игрок I использует стратегию x' , а игрок II чистую стратегию, соответствующую столбцу подматрицы A_1 , то ожидаемый выигрыш будет строго больше, чем в случае, когда игрок II выбирает этот же столбец, а игрок I — стратегию x^* . Таким образом, для любой чистой стратегии β_j , где j — столбец подматрицы A_1 , мы имеем

$$(x', A\beta_j) > (x^*, A\beta_j) \geq v. \quad (2.2.2)$$

По условию, для любого столбца j подматрицы A_2 найдется такая выпуклая комбинация y^0 столбцов подматрицы A_1 , которая строго доминируется столбцом j (при этом мы продолжаем y^0 до стратегии, приписывая к этому вектору надлежащее число нулевых компонент). Отсюда следует, что

$$(x', A\beta_j) > (x', Ay^0) = (x'A, y^0) \geq v \text{ для } j \text{ из } A_2, \quad (2.2.3)$$

где последнее неравенство является следствием неравенства (2.2.2). Неравенства (2.2.2) и (2.2.3) противоречат смыслу числа v . Таким образом, ни одна строка подматрицы A_3 не может встретиться в оптимальных стратегиях с положительной вероятностью.

Аналогичная аргументация показывает, что столбцы подматрицы A_2 несущественны.

Несмотря на то что ранее все критерии доминирования были сформулированы в терминах строгих неравенств, эти теоремы можно применять и в случае нестрогого доминирования. Это снова приводит к матрице с меньшим размером, оптимальные стратегии которой являются также оптимальными и для первоначальной игры, хотя при этом множества оптимальных стратегий для игры с уменьшенной матрицей не обязательно должны совпадать с соответствующими множествами для первоначальной игры. Однако после того как значение игры и некоторая пара оптимальных стратегий установлены, для любой оптимальной стратегии проверка исключенных строк и столбцов на активность осуществляется без труда.

Очевидно, некоторые из предыдущих теорем можно применить сначала к исходной матрице, затем к полученной матрице более низкого порядка и т. д. Рассмотрим следующий пример:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Первая строка доминируется здесь пятой. Первый столбец матрицы полученной из первоначальной вычеркиванием первой строки, доминирует выпуклую комбинацию последних двух столбцов, взятых с равными весами. Исключив первый столбец, мы получим

$$\left\| \begin{array}{cccc} 3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 6 & -2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} A_1 A_2 \\ A_3 A_4 \end{array} \right\|,$$

где каждое из A_i означает соответствующую 2×2 -подматрицу. Применяя теорему 2.2.4, мы получим игру с 2×2 -матрицей

$$\left\| \begin{array}{cc} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{array} \right\|,$$

решением которой для каждого из игроков является стратегия $(3/8, 5/8)$. Значение этой игры равно $-1/8$. Легко проверить, что строками матрицы, уравнивающими оптимальную стратегию $(0, 3/8, 5/8, 0, 0)$, являются вторая и третья. Аналогичное утверждение верно и для столбцов. Отсюда мы заключаем, что найденная нами стратегия $(0, 3/8, 5/8, 0, 0)$ является единственной оптимальной стратегией для каждого из игроков.

2.3 Нахождение оптимальных стратегий. В гл. 1 было доказано, что каждая матричная игра имеет значение и что каждый игрок обладает оптимальной стратегией. Однако эти доказательства не дают эффективного метода для нахождения ни значения игры, ни ее решений. Прежде чем приступить к общей задаче описания решений, рассмотрим несколько простых приемов решения некоторых особенно важных игр. Большое число встречающихся в практике $n \times 2$ -игр и $2 \times m$ -игр оправдывает рассмотрение следующей методики.

Пример 1. $2 \times m$ -игра. Рассмотрим игру, в которой игрок I имеет две чистые стратегии, а игрок II — m чистых стратегий. Матрица выигрышей в этом случае имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} a_{22} \dots a_{2m} \end{array} \right\|.$$

Стратегия игрока I может быть охарактеризована числом x ($0 \leq x \leq 1$), где x — вероятность выбора игроком I стратегии I. Если игрок II выбирает чистую стратегию j , то выигрыш I, соответствующий стратегии x , является линейной функцией вида

$$l_j(x) = x a_{1j} + (1 - x) a_{2j}.$$

Пусть

$$\varphi(x) = \inf_j l_j(x) = \min_j l_j(x)$$

[очевидно, уравнение $y = \varphi(x)$ описывает нижнюю огибающую семейства прямых $l_j(x)$].

Пусть x_0 такое число, что

$$\varphi(x_0) = \max_x \varphi(x).$$

Тогда $\varphi(x_0)$ есть тот максимальный выигрыш, который может обеспечить себе игрок I, выбирая стратегию x_0 против любой чистой стратегии, которую может использовать игрок II.

Так как смешанная стратегия игрока II обязательно является выпуклой комбинацией линейных форм $l_j(x)$, ясно, что, выбирая x_0 , игрок I при любых обстоятельствах гарантирует себе по крайней мере сумму $v^* = \varphi(x_0)$. Отсюда следует, что $v \geq v^*$, где v — значение игры.

Выясним теперь, до какой суммы игрок II может снизить выигрыш игрока I. Предположим, что функция $\varphi(x)$ достигает максимума в единственной точке внутри единичного интервала, как это

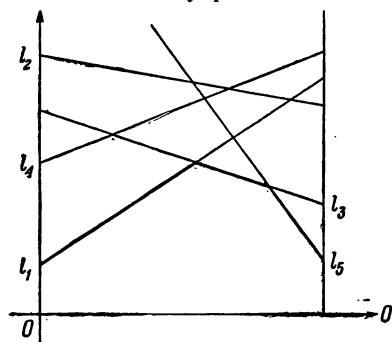


Рис. 1.

показано на рис. 1. Если существует горизонтальная линия l_{j_0} , проходящая через точку $\{x_0, \varphi(x_0)\}$, то выберем для игрока II его чистую стратегию j_0 . Если же такой линии, проходящей через точку $\{x_0, \varphi(x_0)\}$, нет, то выберем две прямые l_{j_0} и $l_{j_0}^*$, проходящие через эту точку: одну с положительным угловым коэффициентом, а вторую с отрицательным. (Очевидно, условие, согласно которому минимум достигается в единственной внутренней точке единичного интервала, влечет существование такой пары прямых.) Выберем, кроме того, такой вес λ_0 ($0 \leq \lambda_0 \leq 1$), чтобы прямая

$$l^* = \lambda_0 l_{j_0}(x) + (1 - \lambda_0) l_{j_0}^*(x)$$

была горизонтальной, т. е. чтобы

$$\lambda_0 l_{j_0}(x) + (1 - \lambda_0) l_{j_0^*}(x) \equiv v^* = \varphi(x_0).$$

Пусть стратегия II будет смешанной стратегией вида

$$(0, 0, \dots, \lambda_0, \dots, 1 - \lambda_0, \dots, 0),$$

где λ_0 стоит на месте j_0 -й координаты, а $(1 - \lambda_0)$ — на месте координаты j_0^* . Пусть функция $\varphi(x)$ достигает своего максимума внутри единичного интервала более чем в одной точке. Тогда должна существовать прямая l_{j_0} вида $l_{j_0}(x) \equiv v^*$. Возьмем в этом случае в качестве стратегии II чистую стратегию j_0 . Если точкой максимума функции $\varphi(x)$ является $x_0 = 0$, то в качестве стратегии II возьмем чистую стратегию, соответствующую прямой, проходящей через точку $\{0, \varphi(0)\}$, отрицательный наклон которой имеет наибольшее абсолютное значение. Если, наконец, точкой максимума является $x_0 = 1$, то в качестве стратегии игрока II выберем чистую стратегию, соответствующую прямой, проходящей через точку $\{1, \varphi(1)\}$ с наибольшим положительным углом наклона.

Во всех тех случаях, когда игрок II применяет указанную выше стратегию, выигрыш игрока I ограничивается суммой v^* независимо от того, какую стратегию этот игрок выберет. Поэтому значение игры не должно превосходить число v^* . Но ранее мы нашли, что $v \geq v^*$. Отсюда следует, что $v = v^*$, и те стратегии, которые мы предполагали оптимальными, оказываются таковыми на самом деле.

Если точка максимума функции $\varphi(x)$ окажется одной из концевых точек, то оба игрока имеют чистые оптимальные стратегии. Если функция $\varphi(x)$ имеет горизонтальный участок, т. е. имеет более одной максимальной точки, то игрок II имеет чистую оптимальную стратегию, а игрок I имеет бесконечное число смешанных оптимальных стратегий.

Для $n \times 2$ -игры ее значение и оптимальные стратегии находят аналогичным образом. Ордината точки отрезка

$$l_i(y) = ya_{i1} + (1 - y)a_{i2},$$

где y берется из единичного интервала, дает выигрыш для случая, когда игрок I применяет чистую стратегию i , а игрок II — смешанную стратегию y . Минимум функции

$$\psi(y) = \sup_i l_i(y)$$

дает значение игры.

Пример 2. $3 \times m$ -игра. Стратегия игрока I в $3 \times m$ -игре описывается парой чисел (x_1, x_2) , где $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и $x_1 + x_2 \leq 1$. Множество возможных стратегий может быть представлено в виде заштрихованного треугольника на рис. 2.

Другой вид представления стратегии игрока I можно осуществить с помощью плоского треугольника (рис. 3), в котором три вершины

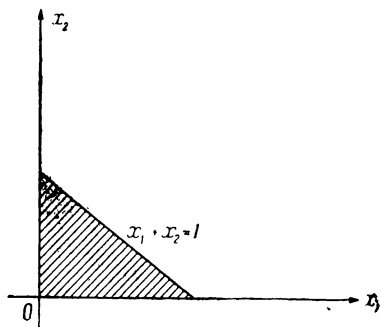


Рис. 2.

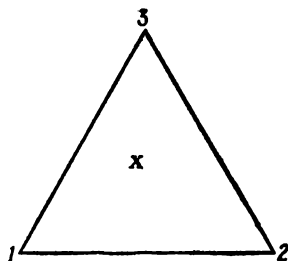


Рис. 3.

соответствуют трем чистым стратегиям. Любая другая точка в треугольнике соответствует смешанной стратегии и обозначается тройкой

$$l_i(X) = a_i x_i + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

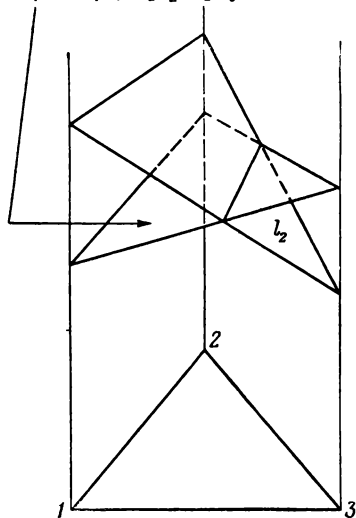


Рис. 4.

чисел (x_1, x_2, x_3) , где x_i — та доля единичной массы, которую следует поместить в точку i , чтобы центр тяжести полученной системы совпал с точкой x . Таким образом, тройка (x_1, x_2, x_3) описывает стратегию x в барицентрических координатах. Существенной чертой использования барицентрических координат для представления множества смешанных стратегий является то обстоятельство, что такое представление не зависит от системы координат.

Пусть треугольник с вершинами 1, 2, 3 (рис. 4) определяет барицентрические координаты в своей плоскости (эту плоскость мы будем считать горизонтальной). Построим семейство плоскостей, каждая из которых описывает выигрыши игрока I, если игрок II применяет ту или иную чистую стратегию. Это изображено на рис. 4. Как и

раньше, проведем снизу огибающую поверхность и рассмотрим принадлежащее ей множество точек максимумов. Это множество может быть единственной точкой, линией или (в общем случае) многоугольником. Значение функции

$$\varphi(x) = \inf_i l_i(x)$$

в точке максимума равно значению игры. Точки проекции многоугольника максимумов на горизонтальный треугольник соответствуют оптимальным стратегиям игрока I. Оптимальные стратегии игрока II получаются посредством взятия плоскостей чистых стратегий с некоторыми весами подобно тому, как это уже делалось для $2 \times m$ -игр. Это значит, что плоскости чистых стратегий взвешиваются так, чтобы смешанная стратегия отвечала горизонтальной плоскости.

Для $m \times n$ -игры, где n и m больше 3, этот метод уже непригоден.

2.4. Описание крайних оптимальных стратегий. Стратегия x^0 называется *крайней* оптимальной стратегией, если x^0 — крайняя точка выпуклого множества X^0 оптимальных стратегий (см. п. Б.2). Аналогично определяются крайние оптимальные стратегии y . В качестве вводных замечаний к методу, используемому для описания крайних оптимальных стратегий, проанализируем сначала один частный случай теоремы 2.4.1.

Предположим, что $A = \|a_{ij}\|$ — невырожденная $n \times n$ -матрица. Пусть $\{x^0, y^0\}$ — пара оптимальных стратегий. Примем, что $x_i^0 > 0$ для всех i и $y_j^0 > 0$ для всех j . Пусть, наконец, $e = (1, 1, \dots, 1)$ — вектор, состоящий из n компонент, каждая из которых равна 1.

На основании леммы 2.1.2 мы имеем

$$Ay^0 \equiv v, \quad x^0 A \equiv v, \quad (2.4.1)$$

где v — значение игры, а v понимается в зависимости от контекста как скаляр или как вектор соответствующей размерности, все компоненты которого равны числу v . Отсюда следует, что

$$y^0 = A^{-1}v = vA^{-1}$$

и

$$1 = \sum_{j=1}^n y_j^0 = (e, A^{-1}ve) = v(e, A^{-1}e).$$

Из последнего соотношения вытекает, что $v \neq 0$. Таким образом, для этого случая решение игры x^0, y^0 и ее значение v могут быть вычислены в явном виде с помощью следующих формул:

$$v = \frac{1}{(e, A^{-1}e)}, \quad y^0 = \frac{A^{-1}e}{(e, A^{-1}e)}, \quad x^0 = \frac{eA^{-1}}{(e, A^{-1}e)}. \quad (2.4.2)$$

Очевидно, что решение игры может быть представлено формулами (2.4.2) всякий раз, когда имеет место условие (2.4.1) и матрица A невырожденная. Предположение о выполнении условия (2.4.1) фактически слабее, чем гипотеза о том, что $x_i^0 > 0$ для всех i и $y_j^0 > 0$ для всех j .

Этот пример показывает, что при соответствующих условиях, когда матрица A невырожденная, решение игры может быть выражено явно через элементы матрицы A^{-1} . Для того чтобы обобщить это построение, определим подматрицу M матрицы A со свойствами, сходными с теми, которые были у матрицы в выражении (2.4.2). Оптимальные стратегии, получающиеся из таких подматриц, дают нам крайние оптимальные стратегии. Следующая теорема точно формулирует это обобщение формул (2.4.2).

► Теорема 2.4.1 Если x^0, y^0 — крайние оптимальные стратегии для игры с матрицей выигрышей A и если $v \neq 0$, то существует такая невырожденная подматрица M матрицы A , что

$$v = \frac{1}{(e, M^{-1}e)}, \quad (2.4.3a)$$

$$x^0 = \frac{eM^{-1}}{(e, M^{-1}e)}, \quad (2.4.3б)$$

$$y^0 = \frac{M^{-1}e}{(e, M^{-1}e)}, \quad (2.4.3в)$$

где e — вектор той же размерности, что и матрица M , все компоненты которого равны 1.

[В формулы (2.4.3б) и (2.4.3в) входят лишь такие компоненты векторов x^0, y^0 , которые соответствуют строкам и столбцам матрицы A , участвующим в образовании матрицы M . Остальные компоненты векторов x^0, y^0 равны нулю.]

Для удобства представим доказательство этой теоремы в виде последовательности лемм и рассуждений.

Обозначим соответственно через X^0 и Y^0 пространства оптимальных стратегий игроков I и II. Известно, что X^0 и Y^0 — замкнутые, выпуклые множества (лемма 2.1.1). Из леммы Б.2.4 мы знаем, что X^0 и Y^0 имеют крайние точки. Пусть x^0 и y^0 являются такими точками.

Мы можем изменить нумерацию строк и столбцов матрицы $A = \|a_{ij}\|$ так, чтобы первые r компонент вектора-строки x^0 и первые s компонент вектора-столбца y^0 были положительными, а остальные их компоненты равнялись нулю. Таким образом, мы имеем

$$x^0 = (x_1^0, \dots, x_r^0, 0, \dots, 0), \quad r \leq n,$$

$$y^0 = (y_1^0, \dots, y_s^0, 0, \dots, 0), \quad s \leq m.$$

Так как стратегия x^0 оптимальна и $y^0 > 0$, согласно лемме 2.1.2, скалярное произведение вектора x^0 на j -й столбец матрицы A равно v для всех $j \leq s$. Для других столбцов это скалярное произведение больше или равно v .

Аналогично скалярное произведение вектора y^0 на i -ю строку равно v для всех $i \leq r$, а для других строк меньше или равно v .

С другой стороны, мы можем переставить строки и столбцы матрицы A (не изменяя порядка первых r строк и s столбцов) так, чтобы (а) все скалярные произведения y^0 и x^0 соответственно на каждую из первых $\bar{r}$ строк и $\bar{s}$ столбцов были точно равны числу v , где $0 < r \leq \bar{r} \leq n$, $0 < s \leq \bar{s} \leq m$; (б) скалярное произведение y^0 на каждую из последних $n - \bar{r}$ строк было меньше, чем v , и (в) скалярное произведение x^0 на каждый из $m - \bar{s}$ последних столбцов было больше, чем v .

В том случае, когда строки и столбцы расположены в указанном порядке, разложим матрицу A следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 & A_7 \\ A_2 & A_4 & A_8 \\ A_5 & A_6 & A_9 \end{bmatrix},$$

где A_1 — $r \times s$ -матрица, A_2 — $(\bar{r} - r) \times s$ -матрица, A_3 — $r \times (\bar{s} - s)$ -матрица, A_4 — $(\bar{r} - r) \times (\bar{s} - s)$ -матрица и т. д. Этой системой обозначений мы воспользуемся в следующей лемме.

► Лемма 2.4.1. *Матрица*

$$C = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

определяет линейное отображение пространства E^s в $E^{\bar{r}}$, обладающее тем свойством, что лишь нулевой вектор отображается матрицей C в нулевой.

Доказательство (от противного). Покажем, что если $Cz = 0$ для $z \neq 0$, то y^0 не является крайней точкой множества Y^0 . Заметим сначала, что равенство $Cz = 0$ означает, что

$$0 = (x^0, Az) = (x^0 A, z) = v \sum_{i=1}^s z_i.$$

Но так как $v \neq 0$, то

$$\sum_{i=1}^s z_i = 0.$$

Продолжим теперь z до m -мерного вектора

$$\hat{z} = (z_1, z_2, \dots, z_s, 0, 0, \dots, 0)$$

и выберем ϵ настолько малым, чтобы для всех i выполнялось неравенство $y_i^0 \pm \epsilon z_i \geq 0$. Тогда векторы $y^0 \pm \epsilon \tilde{z}$ являются стратегиями, так как

$$\sum_{i=1}^m (y_i^0 \pm \epsilon \tilde{z}_i) = \sum_{i=1}^s y_i^0 \pm \epsilon \sum_{i=1}^m \tilde{z}_i = 1.$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} (y_j^0 \pm \epsilon z_j) = \sum_{j=1}^s a_{ij} y_j^0 \pm \epsilon \sum_{j=1}^s a_{ij} z_j = \begin{cases} v & \text{для } i \leq \bar{r}, \\ v - \lambda_i \pm \epsilon K_i & \text{для } i > \bar{r}, \end{cases}$$

где $\lambda_i > 0$, так как

$$\sum_{j=1}^s a_{ij} y_j^0 < v$$

для всех $i > \bar{r}$. Так как мы можем, если необходимо, выбрать ϵ еще меньшим, отсюда следует, что стратегии $y^0 \pm \epsilon \tilde{z}$ оптимальные. Наконец, соотношение

$$y^0 = \frac{1}{2} (y^0 + \epsilon \tilde{z}) + \frac{1}{2} (y^0 - \epsilon \tilde{z})$$

показывает, что y^0 не является крайней стратегией. Это противоречие убеждает нас в справедливости леммы.

Определим теперь $\tilde{C}$ как такую минимальную подматрицу матрицы C , которая (а) содержит строки и столбцы матрицы A_1 , и (б) из равенства $\tilde{C}z = 0$ следует равенство $z = 0$. Из леммы 2.4.1 известно, что такая подматрица $\tilde{C}$ существует.

Минимальность матрицы $\tilde{C}$ означает, что если C^* есть собственная подматрица матрицы $\tilde{C}$, содержащая матрицу A_1 , то условие (б) нарушается. Это обстоятельство мы используем впоследствии.

Аналогично установим существование такой минимальной подматрицы $\tilde{D}$ матрицы $D = \|A_1 \ A_3\|$, что (а') подматрица $\tilde{D}$ содержит строки и столбцы матрицы A_1 , и (б') из $w\tilde{D} = 0$ следует, что $w = 0$. Теперь мы вполне подготовлены к построению нужной в теореме 2.4.1 подматрицы M .

Пусть M — наименьшая подматрица матрицы A , содержащая $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$. Это означает, что M состоит из строк, представленных в $\tilde{C}$, и столбцов, представленных в $\tilde{D}$. Ясно, что M есть $r' \times s'$ -матрица, где $r \leq r' \leq \bar{r}$ и $s \leq s' \leq \bar{s}$. Матрица M называется *ядром решения*, соответствующего крайним точкам $\{x^0, y^0\}$. Хотя матрица M определена, вообще говоря, не однозначно, так как сами матрицы $\tilde{C}$ и $\tilde{D}$ были определены не однозначно, практически в большинстве случаев матрица M для каждого решения $\{x^0, y^0\}$ единственна.

► Лемма 2.4.2. Матрица $\mathbf{M}$ является квадратной и невырожденной.

Доказательство. Покажем, что из $\mathbf{Mz} = \mathbf{0}$ следует $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Аналогичное рассуждение показывает, что из $\mathbf{wM} = \mathbf{0}$ следует $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Из этих результатов вытекает справедливость леммы.

Пусть k — фиксированный номер столбца, для которого $s + 1 \leq k \leq s'$. Если $s = s'$, то последующая аргументация не является необходимой. Покажем сначала, что из равенства $\mathbf{Mz} = \mathbf{0}$ следует $z_k = 0$ (k -я компонента вектора $\mathbf{z}$ равна нулю).

Пусть $\mathbf{D}^*$ — подматрица матрицы $\tilde{\mathbf{D}}$, получаемая вычеркиванием из нее k -го столбца. Так как $\tilde{\mathbf{D}}$ — минимальная матрица, существует такой ненулевой вектор $\mathbf{w}^0$ вида $\mathbf{w}^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \dots, \omega_r^0, 0, 0, \dots, 0)$, что $\mathbf{w}^0 \mathbf{D}^* = \mathbf{0}$, а в $\mathbf{w}^0 \tilde{\mathbf{D}}$ отлична от нуля лишь k -я компонента. Аналогично k -я компонента a_k из $\mathbf{w}^0 \mathbf{M} = \mathbf{w}^0 \tilde{\mathbf{D}}$ отлична от нуля, тогда как все другие компоненты равны нулю. Отсюда следует, что $a_k z_k = (\mathbf{w}^0 \mathbf{M}, \mathbf{z}) = (\mathbf{w}^0, \mathbf{Mz}) = 0$, и так как $a_k \neq 0$, должно быть $z_k = 0$.

Итак, резюмируем: если $\mathbf{Mz} = \mathbf{0}$, то вектор $\mathbf{z}$ должен иметь вид

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_s, 0, 0, \dots, 0).$$

Но тогда равенство $\mathbf{Mz} = \mathbf{0}$ можно переписать как $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, и вектор $\mathbf{z}$ должен быть, согласно лемме 2.4.1, нулевым. Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 2.4.1. Пусть $\mathbf{M}$ есть ядро пары крайних оптимальных стратегий $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0$ в соответствии со сформулированным выше определением. Так как $\mathbf{M}$ есть подматрица матрицы

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_4 \end{vmatrix},$$

мы имеем

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{y}}^0 = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{x}}^0 \mathbf{M} = \mathbf{v}, \quad (2.4.4)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор соответствующей размерности, каждая компонента которого равна числу v , а $\dot{\mathbf{y}}^0$ и $\dot{\mathbf{x}}^0$ означают соответственно векторы $\mathbf{y}^0$ и $\mathbf{x}^0$, в которых удалены нулевые компоненты. По лемме 2.4.2, $\mathbf{M}$ — невырожденная матрица и поэтому равенства (2.4.4) становятся эквивалентными формулам (2.4.3а) — (2.4.3в).

Обращение теоремы 2.4.1 принимает следующий вид.

► Теорема 2.4.2. Если $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0$ — оптимальные стратегии, определяемые в соответствии с формулами (2.4.3а) — (2.4.3в), а $\mathbf{M}$ — невырожденная подматрица матрицы $\mathbf{A}$, то $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ — оптимальные стратегии, соответствующие крайним точкам.

Доказательство. Предположим, что

$$\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{x}' + \mathbf{x}''}{2}$$

при оптимальных стратегиях $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$. Так как компоненты вектора $\mathbf{x}^0$, которые не соответствуют строкам матрицы $\mathbf{A}$, участвующим в образовании подматрицы $\mathbf{M}$, равны нулю, соответствующие компоненты из $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ также должны равняться нулю. Поэтому имеет смысл говорить о векторах $\mathbf{x}'\mathbf{M}$ и $\mathbf{x}''\mathbf{M}$.

Так как стратегии $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ оптимальны, мы имеем

$$\mathbf{x}'\mathbf{M} \geq \mathbf{v} \quad (2.4.5)$$

и

$$\mathbf{x}''\mathbf{M} \geq \mathbf{v}. \quad (2.4.6)$$

Складывая последние неравенства, мы получим $\mathbf{x}^0\mathbf{M} \geq \mathbf{v}$.

Если в выражениях (2.4.5) или (2.4.6) для некоторой компоненты имеет место строгое неравенство, то должно быть $\mathbf{x}^0\mathbf{M} > \mathbf{v}$. Но, согласно формуле (2.4.3), это невозможно. Следовательно, $\mathbf{x}'\mathbf{M} = \mathbf{v}$ и $\mathbf{x}''\mathbf{M} = \mathbf{v}$. Таким образом, мы получаем $(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')\mathbf{M} = \mathbf{0}$. Так как матрица $\mathbf{M}$ невырожденная, отсюда следует, что $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$.

Но если из равенства

$$\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{x}' + \mathbf{x}''}{2},$$

где стратегии $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}''$ оптимальны, всегда следует равенство $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$, то $\mathbf{x}^0$, по определению, есть крайняя точка множества X^0 . Аналогичная аргументация применима и к стратегии $\mathbf{y}^0$.

Случай $v = 0$. Если $v = 0$, то мы можем выбрать произвольное фиксированное число $a \neq 0$ и составить матрицу вида $\|a_{ij} + a\|$. При этом значение игры увеличится на a , в то время как оптимальные стратегии не изменятся (см. задачу 7 гл. 1). Формулы (2.4.3а) — (2.4.3в) для новой игры по-прежнему имеют место (ее значение есть теперь $v = a$). Наша цель заключается в том, чтобы выявить функциональную зависимость выражений в этих формулах от параметра a . Пусть $|\mathbf{M}|$ — определитель матрицы $\mathbf{M}$. В том случае, когда $v \neq 0$, формулы (2.4.3а) — (2.4.3в) могут быть переписаны в терминах присоединенной матрицы¹⁾ следующим образом:

$$v = \frac{|\mathbf{M}|}{(\mathbf{e}, \text{adj}(\mathbf{M}) \mathbf{e})}, \quad (2.4.7a)$$

$$\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{e} \text{adj}(\mathbf{M})}{(\mathbf{e}, \text{adj}(\mathbf{M}) \mathbf{e})}, \quad (2.4.7б)$$

$$\mathbf{y}^0 = \frac{\text{adj}(\mathbf{M}) \mathbf{e}}{(\mathbf{e}, \text{adj}(\mathbf{M}) \mathbf{e})}. \quad (2.4.7в)$$

¹⁾ Присоединенной матрицей $\text{adj}(\mathbf{M})$ называется матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы $\mathbf{M}$, причем алгебраическое дополнение к элементу m_{ij} стоит на пересечении j -й строки и i -го столбца. См. п. А8. — *Прим. перев.*

Если $v=0$ и мы рассматриваем матрицу $\|a_{ij} + a\|$, где $a > 0$, то в силу тождеств

$$(1) \quad |M + a| = |M| + a(e, \text{adj}(M)e),$$

$$(2) \quad e \text{ adj}(M + a) = e \text{ adj}(M),$$

$$(3) \quad \text{adj}(M + a)e = \text{adj}(M)e$$

(см. п. А.9), каждое крайнее решение $\{x^0, y^0\}$ допускает следующее представление:

$$a + v = \frac{|(M + a)|}{(e, \text{adj}(M + a)e)} = a + \frac{|M|}{(e, \text{adj}(M)e)},$$

$$x^0 = \frac{e \text{ adj}(M + a)}{(e, \text{adj}(M + a)e)} = \frac{e \text{ adj}(M)}{(e, \text{adj}(M)e)},$$

$$y^0 = \frac{\text{adj}(M + a)e}{(e, \text{adj}(M + a)e)} = \frac{\text{adj}(M)e}{(e, \text{adj}(M)e)},$$

если только выражение $(e, \text{adj}(M)e)$ отлично от нуля. Следовательно, выражения (2.4.7а) — (2.4.7в) остаются в силе также и для случая $v=0$.

Теорема 2.4.1 и обратная ей могут быть сформулированы теперь уже не в терминах обратных квадратных подматриц, а в терминах присоединенных матриц. В этой новой формулировке (теорема 2.4.3) нам больше не придется различать случаи $v=0$ и $v \neq 0$.

► Теорема 2.4.3. *Необходимое и достаточное условие того, что оптимальные стратегии x^0 и y^0 являются крайними, а v — значением игры, заключается в том, что существует такая квадратная подматрица M матрицы A , что*

$$\begin{aligned} (1) \quad (e, \text{adj}(M)e) &\neq 0, & (3) \quad \dot{x}^0 &= \frac{e \text{ adj}(M)}{(e, \text{adj}(M)e)}, \\ (2) \quad v &= \frac{|M|}{(e, \text{adj}(M)e)}, & (4) \quad \dot{y}^0 &= \frac{\text{adj}(M)e}{(e, \text{adj}(M)e)}, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

где $\dot{x}^0$ получается из вектора x^0 посредством вычеркивания компонент, соответствующих строкам, вычеркнутым из матрицы A при получении подматрицы M (все вычеркнутые компоненты равны нулю), а $\dot{y}^0$ аналогичным путем получается из y^0 .

Теорема 2.4.1 подсказывает нам следующий систематический метод получения значения и крайних оптимальных стратегий игры. Ограничим наше внимание играми, значение которых отлично от нуля. Будем рассматривать все квадратные подматрицы M матрицы A . Для каждой такой подматрицы M выясним, имеет ли она обратную. Если такой обратной матрицы нет, то перейдем к

рассмотрению следующей подматрицы. Если же подматрица $\mathbf{M}$ обратима, найдем по формулам (2.4.3а) — (2.4.3в) векторы $\dot{\mathbf{x}}^0$, $\dot{\mathbf{y}}^0$ и число v . Соотношения $\sum_i \dot{x}_i^0 = 1$ и $\sum_j \dot{y}_j^0 = 1$ в силу формулы (2.4.3в) автоматически соблюдаются, однако может случиться, что для некоторого i или j окажется $\dot{x}_i^0 < 0$ или $\dot{y}_j^0 < 0$. В этом случае подматрица $\mathbf{M}$ отбрасывается, и мы переходим к рассмотрению следующей подматрицы. Если все компоненты получаемых векторов неотрицательны, то векторы $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ получаются вписыванием нулей на место вычеркнутых компонент этих векторов. Из формул (2.4.3а) и (2.4.3б) следует, что скалярное произведение вектора $\mathbf{x}^0$ на любой невычеркнутый столбец равно числу v . Поэтому нужно осуществить контроль за тем, чтобы скалярное произведение вектора $\mathbf{x}^0$ на каждый вычеркнутый столбец было больше или равно числу v . Аналогично скалярное произведение вектора $\mathbf{y}^0$ на любой невычеркнутый столбец равно числу v ; теперь необходимо убедиться в том, что скалярное произведение вектора $\mathbf{y}^0$ на вычеркнутую строку не превышает числа v . Если все скалярные произведения удовлетворяют перечисленным условиям, то векторы $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ являются крайними стратегиями. Если же они этим условиям не удовлетворяют, то такая подматрица $\mathbf{M}$ должна быть отброшена.

Когда множество всех подматриц будет рассмотрено, мы получим множество всех крайних оптимальных стратегий. Множество всех оптимальных стратегий получается посредством построения выпуклой оболочки найденных крайних точек.

Необходимо подчеркнуть, что к классу всех подматриц матрицы $\mathbf{A}$ причисляется как сама матрица $\mathbf{A}$, так и все ее отдельные элементы.

В качестве иллюстрации к теореме 2.4.3 рассмотрим игру со следующей матрицей выигрышей:

$$\text{II} \\ \text{I} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \mathbf{A}.$$

Четыре пары оптимальных стратегий, соответствующих крайним точкам, и отвечающие им ядра $\mathbf{M}$ будут следующие:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 &= (1, 0, 0), & \mathbf{y}^0 &= (1, 0, 0), & \mathbf{M} &= a_{11} = 1, \\ \mathbf{x}^0 &= (1, 0, 0), & \mathbf{y}^0 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), & \mathbf{M} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \\ \mathbf{x}^0 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), & \mathbf{y}^0 &= (1, 0, 0), & \mathbf{M} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \\ \mathbf{x}^0 &= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), & \mathbf{y}^0 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), & \mathbf{M} &= \mathbf{A}. \end{aligned}$$

2.5. Вполне смешанные матричные игры. Матричная игра называется *вполне смешанной*, если каждая чистая стратегия игрока входит в каждую его оптимальную стратегию x (или y) с положительной вероятностью, т. е. для двух оптимальных стратегий $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ и $y^0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)$ все $x_i^0 > 0$ и все $y_j^0 > 0$. Вполне смешанные матричные игры составляют важный класс игр, для которых легко определяются решения.

► **Теорема 2.5.1.** *Вполне смешанная игра имеет единственное решение.*

Это утверждение следует из теоремы 2.4.3. Если x^0 и y^0 — оптимальные стратегии, соответствующие крайним точкам, то их ядро должно совпадать со всей матрицей A . Из соотношений (2.4.8) видно, что все оптимальные стратегии, соответствующие крайним точкам, совпадают, так как все они получаются из одного и того же ядра. Отсюда следует, что для каждого игрока оптимальные стратегии единственны.

Замечание 2.5.1. *Если игра A является вполне смешанной и для нее $v \neq 0$, то матрица A невырожденная.*

Это следует из теоремы 2.4.1, так как ядро любого решения, отвечающего крайним оптимальным стратегиям, должно совпадать с матрицей A^1 .

Пример 1. Матрица Минковского — Леонтьева. Эта матрица встречается в математической экономике в области анализа производственных процессов. Матрица A называется матрицей Минковского — Леонтьева, если

(а) A — квадратная матрица,

(б) $a_{ii} > q \geq 0$,

(в) $a_{ij} \leq q$ для $i \neq j$

и (г) $\sum_{i=1}^n a_{ij} > nq \geq 0$.

Обычно на практике $q = 0$. Покажем, что матрица Минковского — Леонтьева порождает вполне смешанную игру.

Пусть $x = (1/n, \dots, 1/n)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_{ij} > q.$$

¹⁾ Отметим также, что матрица вполне смешанной игры должна быть квадратной. — Прим. ред.

Следовательно, значение игры равно $v > q \geq 0$. Предположим, что $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — оптимальная стратегия, где $x_{j_0} = 0$. Тогда

$$(\mathbf{x}\mathbf{A})_{j_0} = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij_0} = \sum_{i \neq j_0} x_i a_{ij_0} \leq \sum_{i=1}^n x_i q \leq q < v.$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{x}$ не может быть оптимальной стратегией. Таким образом, каждая оптимальная стратегия игрока I использует каждую компоненту матрицы с положительной вероятностью.

Предположим, что $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ — оптимальная стратегия игрока II и что $y_{j_0} = 0$. По лемме 2.1.2, мы имеем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = v$$

для всех i . Однако для $i = j_0$ мы получаем

$$\sum_{j=1}^n a_{j_0 j} y_j = \sum_{j \neq j_0} a_{j_0 j} y_j \leq q < v$$

и приходим к противоречию. Таким образом, в каждой оптимальной стратегии у каждой компонента положительна. Отсюда следует, что любая матрица Минковского — Леонтьева является невырожденной.

Как непосредственное следствие приводимой далее леммы 2.5.1 и рассмотренного выше примера мы находим, что если $\mathbf{A}$ — квадратная матрица, подчиненная условиям

$$(a) \quad a_{ij} \leq q \text{ для } i \neq j,$$

$$(b) \quad a_{ii} > q \geq 0$$

и

$$(в) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} > nq,$$

то матрице $\mathbf{A}$ соответствует вполне смешанная игра.

► Лемма 2.5.1. Если игра с матрицей $\mathbf{A}$ является вполне смешанной, то матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$ (транспонированная матрица $\mathbf{A}$) также соответствует вполне смешанной игре, и наоборот.

Доказательство. Пусть $\mathbf{w}^0, \mathbf{z}^0$ — единственные решения игры с матрицей $\mathbf{A}$ соответственно для игроков I и II. В таком случае, согласно лемме 2.1.2, мы имеем

$$\mathbf{w}^0 \mathbf{A} = v, \quad \mathbf{A} \mathbf{z}^0 = v.$$

Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$, тогда $\mathbf{B}^T = (\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ и

$$\mathbf{z}^0 \mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{z}^0 = v, \quad \mathbf{B} \mathbf{w}^0 = \mathbf{w}^0 \mathbf{A} = v.$$

Поэтому векторы z^0 и w^0 являются оптимальными стратегиями соответственно игроков I и II для игры с матрицей B , а значение игры равно v . Эти оптимальные стратегии содержат все компоненты с положительной вероятностью и должны быть единственными (иначе обратные рассуждения привели бы нас к неединственности решения игры с матрицей A). Отсюда следует, что матрица A^T соответствует вполне смешанной игре.

Обратное утверждение следует из того факта, что $(A^T)^T = A$.

Пример 2. Игра на упорядоченных множествах. Пусть $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ — непересекающиеся замкнутые множества, расположенные на вещественной оси и подчиненные условию $L_i < L_{i+1}$ (т. е. множество L_i лежит строго левее множества L_{i+1}). Пусть

$$A = \begin{pmatrix} L_0 & L_1 & L_2 & L_3 & \dots & L_{n-1} \\ L_{n-1} & L_0 & L_1 & L_2 & \dots & \dots \\ L_{n-2} & L_{n-1} & L_0 & L_1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_1 & L_2 & \dots & \dots & \dots & L_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь A интерпретируется как матрица $\|a_{ij}\|$, где элемент a_{ij} есть число, содержащееся в L -множестве, стоящем на месте $\{i, j\}$. Алгебраически $a_{ij} \in L_{j-i}$, если $j \geq i$, и $a_{ij} \in L_{n-i+j}$, если $j < i$ ¹⁾.

Мы утверждаем, что матрица A соответствует игре с вполне смешанной стратегией. Чтобы это показать, предположим, что x — оптимальная стратегия и что $x_j = 0$ для некоторого j . Если $i \neq j$, то $a_{ij} > a_{i, j-1}$ (если $j = 0$, то $j - 1$ понимается как $n - 1$). Так как $x_j = 0$, мы имеем

$$\sum_{i=1}^n x_i a_{ij} > \sum_{i=1}^n x_i a_{i, j-1} \geq v.$$

Следовательно, согласно лемме 2.1.2, никакая оптимальная стратегия y не может иметь компоненту $y_j > 0$. Очевидно, что $a_{j+1, k} < a_{j, k}$, когда $j \neq k$ (мы считаем, что $j + 1 = 0$, если $j = n - 1$). Отсюда в случае, когда y — оптимальная стратегия, мы получим

$$\sum_{k=1}^n a_{j+1, k} y_k < \sum_{k=1}^n a_{j, k} y_k \leq v.$$

¹⁾ Здесь было бы уместнее говорить о семействе всех матриц, для которых элементы a_{ij} берутся из надлежащих L -множеств и о семействе игр с такими матрицами выигрышей. — *Прим. ред.*

С другой стороны, из леммы 2.1.2 мы видим, что никакая оптимальная стратегия x не может иметь компоненту $x_{j+1} > 0$. Повторяя наши рассуждения, мы получаем $x = 0$, что невозможно. Следовательно, все компоненты оптимальной стратегии x положительны. Поэтому A есть матрица вполне смешанной игры.

Если множества L_k упорядочены в обратном смысле, т. е. если

$$L_0 > L_1 > L_2 > \dots,$$

то соответствующая игра также будет вполне смешанной.

В частности, если главная диагональ 2×2 -матрицы доминирует или доминируется, то оптимальные стратегии для игры с этой матрицей являются вполне смешанными стратегиями. Формально игра с матрицей

$$A = \begin{vmatrix} a & c \\ d & b \end{vmatrix}$$

будет вполне смешанной игрой, если выполняются условия

$$\max\{a, b\} < \min\{c, d\} \quad \text{или} \quad \min\{a, b\} > \max\{c, d\}.$$

Обратное утверждение в этом случае также имеет место, ибо если главная диагональ не доминирует, то существует седловая точка.

Для вполне смешанных игр размера выше чем 2×2 столь полного описания уже не существует (см. задачу 9).

Пример 3. Циклическая матрица. Пусть

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{vmatrix},$$

где $a_i \neq a_j$. Этот пример является частным случаем предыдущего, именно когда $L_k = \{a_k\}$, т. е. множество L_k состоит из единственной точки. Однако здесь мы уже не предполагаем, что $a_i < a_{i+1}$ или что на величины a_i вообще налагается какая-либо упорядочивающая связь.

Достаточным условием того, чтобы игра с матрицей A была вполне смешанной, является $\det A \neq 0$. Для того чтобы проверить это утверждение, рассмотрим сначала строение определителя $\det A$. Отметим предварительно, что числа

$$\lambda_r = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w^{kr} \quad (r = 1, \dots, n)$$

являются различными характеристическими числами матрицы A , где ω — какой-либо первообразный корень n -й степени из единицы. Таким образом, мы имеем

$$\det A = \prod_{r=1}^n \lambda_r = \prod_{r=1}^n \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{kr}.$$

Проверим теперь, что стратегии

$$x = y = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

являются оптимальными, а значение игры равно

$$v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

Очевидно, что

$$(xA)_j = \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = v$$

и аналогично $Ay = v$. Так как, по предположению, $\det A \neq 0$, из теоремы 2.4.2 следует, что оптимальные стратегии $x^0 = y^0 = (1/n, \dots, 1/n)$ являются крайними. Пусть y' — крайняя оптимальная стратегия, отличная от стратегии y^0 . Пара крайних стратегий $\{x^0, y'\}$ должна иметь в качестве своего ядра всю матрицу. Таким образом, мы получаем $y' = y^0$. Аналогично находим, что x^0 — единственная оптимальная стратегия игрока I. Следовательно, игра с матрицей A вполне смешанная.

В частности, если $n=3$, элементы матрицы a_0, a_1, a_2 отличны друг от друга и выполняется условие $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$, то игра с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

является вполне смешанной. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что условие $a_0 = a_1 = a_2$ влечет либо равенство $a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 = 0$, либо равенство $a_0 + a_1\omega^2 + a_2\omega = 0$, где ω — первообразный корень третьей степени из единицы. Рассматривая мнимые части каждого из этих равенств, мы получаем, что $a_1 = a_2$. Из рассмотрения вещественных частей следует, что $a_0 = a_1 = a_2$.

В противоположность этому в игре

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right\|,$$

имеющей значение $\frac{3}{2}$, множество крайних оптимальных стратегий игрока I состоит из двух стратегий:

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right) \text{ и } \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

То же справедливо и для игрока II.

2.6. Симметричные игры. Симметричной игрой называется игра с кососимметрической матрицей выигрыша ($A^T = -A$). В такой игре игроки имеют одинаковые множества стратегий и, употребляя одинаковые стратегии, могут ожидать одинаковый доход. Во всех отношениях такая игра является „самой безобидной“ для обоих игроков потому, что любая возможность, открытая для одного игрока, доступна и другому. В самом деле, если игрок I употребляет стратегию $x = (x_1, \dots, x_n)$, то его доход равен компоненте произведения xA , соответствующей чистой стратегии, используемой игроком II. Подобным же образом, если игрок II использует стратегию $y = (y_1, \dots, y_m)$, то возможные доходы для игрока I составляют вектор Ay и зависят от той чистой стратегии, которую он применит. Если $x = y$, то

$$-Ay = xA. \quad (2.6.1)$$

Это соотношение указывает на отличительное свойство симметричных игр: любой результат, достижимый для игрока I, может быть также достигнут игроком II путем применения той же стратегии.

Так как равенство $(x, Ay) = 0$ имеет место всякий раз, когда $x = y$, мы приходим к выводу, что значение симметричной игры равно нулю. Кроме того, из равенства (2.6.1) следует, что множества оптимальных стратегий X^0 и Y^0 совпадают.

Эти особенности придают симметричным играм определенный интерес. Однако основное значение игр такого типа обусловлено следующим фактом: всякой игре может быть сопоставлена некоторая симметричная игра. При этом множества оптимальных стратегий данной игры могут быть некоторым вполне определенным образом получены из множеств оптимальных стратегий связанной с ней симметричной игры. Известны два метода симметризации матричных $m \times n$ -игр. В первом из этих методов данная игра преобразуется в симметричную игру большего размера, именно в игру с $n + m + 1$

стратегиями. Второй метод связывает с основной игрой еще большую симметрическую матрицу, имеющую $n \times m$ строк. Далее мы рассмотрим оба эти симметризирующих приема.

► Теорема 2.6.1. Если A — $m \times n$ -матрица, то существует такая симметричная $(m+n+1) \times (m+n+1)$ -игра A_1 , что оптимальная стратегия $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \lambda)$ в игре с матрицей A_1 обладает следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^{m+n+1} x_i = \sum_{i=1}^{m+n+1} y_i = a > 0;$$

x/a , y/a — оптимальные стратегии игроков в игре с матрицей A ; значение этой игры равно λ/a . Обратное утверждение также справедливо.

Доказательство. Мы можем предположить, что значение v игры с матрицей A положительно. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & A & -1 \\ -A^T & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь A_1 — кососимметрическая $(m+n+1) \times (m+n+1)$ -матрица. Пусть $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \lambda)$ — оптимальная стратегия игрока II в игре с матрицей A_1 . Тогда, поскольку значение игры с матрицей A_1 равно нулю, мы имеем

$$Ay - \lambda \leq 0, \quad -xA + \lambda \leq 0, \quad \sum x_i - \sum y_i \leq 0. \quad (2.6.2)$$

Отметим, что $\lambda > 0$; в противном случае в соотношении (2.6.2) мы имели бы

$$Ay \leq 0, \quad xA \geq 0,$$

что противоречит нашему предположению о том, что $v > 0$ для игры с матрицей A . Но по лемме 2.1.2 неравенство $\lambda > 0$ влечет $\sum x_i = \sum y_i$. Наконец, $\lambda < 1$, т. е. второе соотношение из (2.6.2) не может выполняться. Следовательно,

$$\sum y_i = \sum x_i = \frac{1-\lambda}{2} > 0.$$

Если мы положим

$$a = \frac{1-\lambda}{2},$$

то из соотношения (2.6.2) получим неравенство

$$A \begin{pmatrix} y \\ a \end{pmatrix} \leq \frac{\lambda}{a} \leq \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} A.$$

Следовательно, стратегии x/a , y/a в игре с матрицей A оптимальные, а λ/a есть значение этой игры.

Наоборот, если $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ — оптимальные стратегии для игры с матрицей A , то соотношение (2.6.2) может быть проверено для вектора

$$w = \left(\frac{x}{2+v}, \frac{y}{2+v}, \frac{v}{2+v} \right).$$

Таким образом, w — оптимальная стратегия для игры с матрицей A .

Наш второй метод симметризации игры будет состоять в следующем. Представим себе игрока, участвующего в двух играх с матрицами B' и B'' соответственно роли максимизирующего и минимизирующего игроков. Значение этой игры равно суммарному ожидаемому значению, полученному игроком I в играх B' и B'' . Пусть индексы k' и l' означают чистые стратегии в игре с матрицей B' , а индексы k'' и l'' — стратегии в игре с матрицей B'' (игрок I контролирует k' , l'' , а игрок II контролирует k'' , l'). Поэтому стратегия i игрока I заключается в выборе индексов k' и l'' , а стратегия j для игрока II — в выборе k'' и l' . Ожидаемый выигрыш игрока I равен при этом $b'_{k'l'} + b''_{k''l''}$. Предположим теперь, что $B'' = -B$ и $B' = B$. Тогда

$$A_{ij} = b_{k'l'} - b_{k''l''} \quad \text{для} \quad i = (k', l''), \quad j = (k'', l').$$

Эта игра является симметричной, и поэтому существует оптимальная стратегия y с компонентами $y_{k''l'}$, удовлетворяющими условиям $y_{k''l'} \geq 0$, $\sum y_{k''l'} = 1$. Положим

$$\xi_k = \sum_l y_{kl} \quad \text{и} \quad \eta_l = \sum_k y_{kl}.$$

Тогда $\xi_k \geq 0$, $\eta_l \geq 0$ и $\sum \xi_k = \sum \eta_l = 1$.

Легко видеть, что η и ξ — оптимальные стратегии игроков I и II в игре с матрицей B .

2.7. Задачи.

1. Использовать графический метод для решения игры с матрицей

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Описать графический метод решения $m \times 2$ -игр.

3. Описать все крайние оптимальные стратегии в игре с матрицей

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix},$$

где $a_i > 0$ для всех i .

4. Решить задачу 3 без ограничения $a_i > 0$.

5. Использовать теорему 2.4.1 для решения игры с матрицей

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 9 & 9 & -6 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

6. Использовать теорему 2.4.3 для решения описанной в п. 1.2 двупальцевой игры.

7. Игра с матрицей

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

имеет пару оптимальных стратегий, ядро которых совпадает со всей матрицей. Найти эти стратегии.

8. Игра, описанная в задаче 4 гл. 1, имеет пару оптимальных стратегий, которые используют лишь последние пять строк и последние пять столбцов матрицы. Найти эти стратегии.

9. Показать, что игра с матрицей

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

является вполне смешанной. Найти оптимальные стратегии.

10. Найти все решения игры с матрицей

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & 4 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

11. Пусть A — $m \times n$ -матрица, для которой $a_{i,j} \leq a_{i,j+1}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n-1$).

Показать, что матрица A всегда имеет седловую точку.

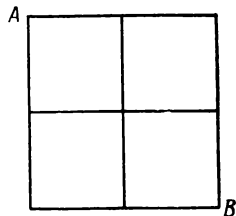


Рис. 5.

12. Кошка и мышка одновременно входят в изображенный на рис. 5 глухой лабиринт соответственно в точках A и B . Они могут заворачивать за угол, но не могут ни поворачивать обратно, ни стоять на месте. Кошка и мышка движутся с одинаковой скоростью и располагают достаточным временем для того, чтобы пройти четыре

прямолинейных отрезка. Если кошка встретит мышку, то она выигрывает единицу. Найти оптимальные стратегии.

13. Использовать теорему о доминировании для решения игры с матрицей

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

14. Пусть A означает матрицу, все элементы которой неотрицательны, а каждый столбец имеет по крайней мере один положительный элемент. Показать, что значение игры с матрицей A положительно.

15. Показать, что множество оптимальных стратегий в матричной игре образует выпуклый многогранник.

16. Пусть $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ и

$$A = \begin{vmatrix} a_4 & a_3 & a_3 \\ a_1 & a_6 & a_5 \\ a_2 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Показать, что любая оптимальная стратегия такой игры удовлетворяет условиям

$$x_3 = y_2 = 0, \quad x_1 > 1/2, \quad x_1 > y_1 > x_2, \quad a_3 < v < a_4.$$

17. Рассмотреть связь между оптимальными стратегиями игры с матрицей A и симметричной игры с матрицей¹⁾

$$\begin{vmatrix} 0 & A & -1 & 1 \\ -A^T & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

18. Пусть G^k ($k=1, \dots, K$) — игра с матрицей $\|G_{ij}^k\|$, где $i=1, \dots, m$ и $j=1, \dots, n$. Пусть соответственно X^k и v^k — множество оптимальных стратегий игрока I и значение игры G^k . Показать, что если $\cap X^k \neq \emptyset$, то значение v игры G с матрицей

$$\|G_{ij}\| = \left\| \sum_{k=1}^K G_{ij}^k \right\|$$

¹⁾ 0, 1 и -1 означают здесь матрицы надлежащих размеров, все элементы которых равны соответствующему числу. — Прим. ред.

удовлетворяет неравенству

$$v \geq \sum_{k=1}^K v^k.$$

19. Рассмотреть игру, матрица $\mathbf{B}$ которой может быть разложена на MN подматриц $\mathbf{B}_j^i$ со значениями v_j^i . Показать, что если для каждого i имеется общая оптимальная стратегия для игр с матрицами $\mathbf{B}_j^i$, то значение игры с матрицей $\mathbf{B}$ не меньше значения игры v , матрица которой равна $\|\mathbf{v}_j^i\|$. Описать соответствующий результат в терминах игр с матрицами $\mathbf{B}_j^i$ (с фиксированным j) и показать, что если оба условия выполняются, то значение игры $\mathbf{B}$ и ее оптимальные стратегии могут быть определены из значений и оптимальных стратегий игр с матрицами $\mathbf{B}_j^i$.

20. Показать, что не существует симметричной, вполне смешанной игры с матрицей четного порядка.

21. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — положительные, а $b_1, \dots, b_{n-1}$ — отрицательные числа, причем

$$\begin{aligned} b_{i-1} + a_i + b_i &\geq 0 & (i = 2, \dots, n-1), \\ a_1 + b_1 &\geq 0, \\ a_n + b_{n-1} &\geq 0. \end{aligned}$$

Решить игру с матрицей

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} a_1 & b_1 & & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & & 0 \\ & b_2 & a_3 & b_3 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & & \cdot & \cdot & b_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} & a_n \end{array} \right\|.$$

22. Показать, что если для всех значений i и j

$$a_{i,j-1} - 2a_{i,j} + a_{i,j+1} \geq 0,$$

то в игре с матрицей $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ каждый игрок имеет оптимальную стратегию, в которой используется не более двух чистых стратегий.

Комментарии и библиография к главе 2

2.1. Элементарные свойства, которыми обладают решения игр, описанные в этом пункте, были известны фон Нейману. В неявном виде они содержатся в работе Неймана и Моргенштерна [1].

2.2. Понятие доминирования впервые было введено в работе фон Неймана и Моргенштерна [1]. Два вида доминирования, вошедшие в теоремы 2.2.1 и 2.2.2, являются стандартным средством при анализе игровых задач. Первоначальная формулировка четырех видов доминирования не может быть связана с чьим-либо именем. Вообще говоря, эту формулировку можно приписать Корпорации РЭНД, где были выполнены многие из более детальных ранних математических исследований по теории игр. Все эти четыре вида доминирования упоминаются в книге Дрешера [1].

2.3. Геометрический метод этого пункта хорошо известен и тщательно описывается в большинстве элементарных руководств по теории игр, например в книгах Мак-Кинси [1] и Льюса и Райфы [1]. Борель [2] использовал эти идеи при доказательстве теоремы о минимаксе для 2×2 -игр.

2.4. Основная теорема этого пункта была доказана Сноу и Шепли [1]. Основную часть их доказательства можно резюмировать следующим образом. Точка в евклидовом пространстве E^n может быть определена как единственное пересечение n данных линейно независимых гиперплоскостей. Однако если заданы k гиперплоскостей, проходящих через точку, и некоторые из них могут быть линейно зависимыми, то для получения в результате определяемой точки необходимо добавить еще по крайней мере $n - k$ гиперплоскостей. Дополнительные гиперплоскости сверх $n - k$ гиперплоскостей требуются ввиду зависимости между k первоначально данными гиперплоскостями.

Идеи, лежащие в основе геометрической интерпретации этой теоремы, были развиты Моцкиным, Райфой, Томпсоном и Троллом [1] в систематический метод определения как значения, так и всех решений матричной игры. Несмотря на то что эффективность и практичность предложенных ими способов решения оценить трудно, метод обладает притягательной геометричностью.

2.5. Вполне смешанные 2×2 -игры были полностью исследованы фон Нейманом (см. фон Нейман и Моргенштерн [1]). Капланский [1] привел несколько частных примеров общих, вполне смешанных игр. Эти результаты были обобщены Боненблатом, Карлином и Шепли [1]. Циклические игры составляют подкласс игр, инвариантных относительно некоторой группы преобразований (см. также гл. 15 настоящей работы).

2.6. Пе-вый способ симметризации игр был предложен Гейлом, Куном и Таккером [1]; второй — Брауном и фон Нейманом [1].

2.7. Результат задачи 18 был отмечен Вудберн, а результат задачи 19 Шерманом [1]. Задача 20 предложена Капланским [1].

СООТНОШЕНИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ ДЛЯ МНОЖЕСТВ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

В этой главе мы исследуем строение множеств решений матричных игр. Известно, что каждое такое множество является выпуклым множеством, натянутым на конечное число крайних оптимальных стратегий; при этом каждая из крайних стратегий соответствует подматрице, обладающей некоторыми особыми свойствами (см. теорему 2.4.3). В этой главе устанавливается фундаментальное соотношение между размерностями множеств оптимальных стратегий. Особое внимание уделяется классу игр, имеющих единственные решения, и, в частности, доказывается, что класс всех игр с матрицами данного размера с единственными решениями составляет открытое всюду плотное подмножество множества всех матричных игр этого размера. Мы приведем также решение задачи о построении матрицы игры, обладающей данным множеством решений.

3.1. Основная теорема. Прежде чем формулировать основные теоремы, введем следующие обозначения. Пусть вектор $\mathbf{a}_i$ обозначает i -ю строку матрицы выигрыша $\|a_{ij}\|$, а вектор $\mathbf{b}_j$ — ее j -й столбец. Как и прежде, будем полагать $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$.

Пусть X^0, Y^0 означают соответственно множества оптимальных стратегий игроков I и II.

Пусть I_1 — множество всех строк i , обладающих тем свойством, что для некоторой оптимальной стратегии $\mathbf{x}^{(i)}$ имеет место неравенство

$$x_i^{(i)} > 0.$$

Пусть I_2 — множество всех строк i , обладающих тем свойством, что для каждой оптимальной стратегии $\mathbf{y}$ имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = v.$$

*) Вся эта глава и другие главы и пункты, отмеченные звездочкой, при первом чтении может быть пропущена без ущерба для связности изложения.

В принятой нами ранее терминологии множество I_2 состояло из всех строк, которые уравнивают все оптимальные стратегии игрока II.

Пусть J_1 и J_2 — соответствующие множества столбцов j , удовлетворяющих симметричным свойствам относительно оптимальных стратегий игрока II. Более общо, пусть для любой стратегии x $I_1(x)$ — множество индексов i , для которых $x_i > 0$ и $I_2(y)$ — множество индексов i , для которых $(a_i, y) = v$. Аналогично определяются множества $J_1(y)$ и $J_2(x)$.

Из сказанного следует, что

$$I_1 = \bigcup_{x \in X^0} I_1(x), \quad I_2 = \bigcap_{y \in Y^0} I_2(y),$$

$$J_1 = \bigcup_{y \in Y^0} J_1(y), \quad J_2 = \bigcap_{x \in X^0} J_2(x).$$

Пусть $\bar{X}$ означает множество всех стратегий x , для которых $I_1(x) \subseteq I_1$, а $\bar{Y}$ — множество всех стратегий y , для которых $J_1(y) \subseteq J_1$. Таким образом, множество $\bar{X}$ есть наименьшая грань основного симплекса смешанных стратегий, содержащая X^0 и т. д. Нашей ближайшей целью является доказательство двух следующих соотношений.

► Теорема 3.1.1. $I_1 = I_2, J_1 = J_2$.

► Теорема 3.1.2. $\dim \bar{X} - \dim X^0 = \dim \bar{Y} - \dim Y^0$.

Далее будет приведено несколько основанных на различных идеях доказательств теорем 3.1.1 и 3.1.2. Первое доказательство теоремы 3.1.2 основано на представлении оптимальных стратегий игрока I в виде разделяющих гиперплоскостей, а оптимальных стратегий игрока II в виде точек соприкосновения между некоторыми двумя выпуклыми множествами, как это было описано в замечании 1.4 гл. 1. Подсчитывая число линейно независимых разделяющих гиперплоскостей и принимая во внимание размерности соприкасающихся множеств, можно установить соотношение размерности. Второе доказательство этих двух теорем основано на доказательстве теоремы о минимаксе, которое использует теорему Какутани о неподвижной точке. Эта линия рассуждения будет продолжена в гл. 12, где мы рассмотрим распространение этих структурных теорем на более общий класс игр. Наконец, третье доказательство этих теорем, приводимое в этой главе, по существу, является алгебраическим, хотя оно и имеет некоторые связи с геометрическим доказательством, основанным на принципе разделения выпуклых множеств гиперплоскостями.

3.2. Доказательство теоремы 3.1.1. Для обозначения числа положительных компонент любой стратегии x может быть исполь-

зована целочисленная функция $\omega(\mathbf{x})$. Говорят, что оптимальная стратегия $\mathbf{x}$ имеет полный вес, если ее компоненты $x_i > 0$ для каждого i из множества I_1 . Отметим, что если стратегия $\mathbf{x}$ имеет полный вес, то

$$\omega(\mathbf{x}) = n(I_1),$$

где $n(I_1)$ — число элементов множества I_1 .

► Лемма 3.2.1. $I_1 \subset I_2$, $J_1 \subset J_2$.

Эта лемма немедленно следует из леммы 2.1.2.

► Лемма 3.2.2. Существует такая оптимальная стратегия $\mathbf{x}$, что (1) для каждого значения i из множества I_1 имеет место неравенство $x_i > 0$, (2) компоненты вектора $\mathbf{x}\mathbf{A}$, соответствующие столбцам из множества J_2 , и только они равны значению игры v .

Доказательство¹⁾. По определению I_1 , для каждого $i \in I_1$ найдется такая оптимальная стратегия $\mathbf{x}^{(i)}$, что $x_i^{(i)} > 0$. Обозначим, далее, через $J_2(\mathbf{x})$ множество всех тех j , для которых $(\mathbf{x}\mathbf{A})_j = v$.

Ввиду конечности множества стратегий второго игрока среди множеств вида $J_2(\mathbf{x})$ может быть лишь конечное число различных. Пусть $J_2^{(1)}, \dots, J_2^{(r)}$ — все такие различные множества. Выберем такие оптимальные стратегии $\mathbf{x}^{(j)}$ ($j = 1, \dots, r$) первого игрока, что $J_2(\mathbf{x}^{(j)}) = J_2^{(j)}$. Очевидно,

$$J_2 = \bigcap_{j=1}^r J_2(\mathbf{x}^{(j)}).$$

Центр тяжести всех выбранных стратегий $\mathbf{x}^{(i)}$ и $\mathbf{x}^{(j)}$ обозначим через $\mathbf{x}$ и покажем, что эта стратегия является искомой.

Оптимальность стратегии $\mathbf{x}$ следует из выпуклости множества всех оптимальных стратегий.

Далее, если k — число выбранных стратегий, то

$$x_i \geq \frac{1}{k} x_i^{(i)} > 0$$

для любого $i \in J_1$.

Наконец, если $j_0 \in J_2(\mathbf{x})$, то

$$(\mathbf{x}\mathbf{A})_{j_0} = \frac{1}{k} \left(\sum_{i \in J_1} (\mathbf{x}^{(i)}\mathbf{A})_{j_0} + \sum_{j \in J_2} (\mathbf{x}^{(j)}\mathbf{A})_{j_0} \right) = v. \quad (*)$$

¹⁾ Неверное в оригинале доказательство заменено. — Прим. ред.

Но все стратегии $\mathbf{x}^{(i)}$, $\mathbf{x}^{(j)}$ оптимальны, и поэтому

$$(\mathbf{x}^{(i)} \mathbf{A})_{j_0}, (\mathbf{x}^{(j)} \mathbf{A})_{j_0} \geq v.$$

Следовательно, равенство $(*)$ может иметь место лишь при

$$(\mathbf{x}^{(j)} \mathbf{A})_{j_0} = v \text{ для всех } j = 1, \dots, r.$$

Поэтому

$$j_0 \in J_2(\mathbf{x}^{(j)}) \text{ для всех } j = 1, \dots, r,$$

т. е.

$$j_0 \in \bigcap_{j=1}^r J_2(\mathbf{x}^{(j)}) = J_2$$

и $J_2(\mathbf{x}) \subset J_2$, а обратное включение тривиально.

Редуцированные игры. Под редуцированной игрой мы понимаем игру, для которой матрица выигрыша $\tilde{\mathbf{A}}$ является подматрицей матрицы $\mathbf{A}$, содержащей лишь строки матрицы $\mathbf{A}$ с индексами из I_2 и столбцы с индексами из J_2 . Редуцированная игра называется также существенной частью игры.

Множества оптимальных стратегий для редуцированной игры будем обозначать через X_0^0 , Y_0^0 .

Мы видим, что игры с матрицами $\mathbf{A}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$ имеют одно и то же значение v и что $X^0 \subset X_0^0$, $X^0 \subset Y_0^0$. Для того чтобы проверить эти утверждения, обозначим пару оптимальных стратегий в игре с матрицей $\mathbf{A}$ через $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Из определений множеств I_1 и J_1 следует, что в стратегиях $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ положительную вероятность могут иметь лишь те компоненты, которые соответствуют строкам и столбцам матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$. Таким образом, они могут рассматриваться как стратегии в игре с матрицей $\tilde{\mathbf{A}}$.

Далее, если стратегии $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ являются оптимальными в игре с матрицей $\mathbf{A}$, то, согласно определениям множеств I_2 и J_2 , $\mathbf{x}\mathbf{A} = v$ и $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y} = v$. Применяя эти два равенства к игре с матрицей $\tilde{\mathbf{A}}$, мы находим, что $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ являются оптимальными стратегиями для игры с матрицей $\tilde{\mathbf{A}}$ и что $v(\tilde{\mathbf{A}}) = v(\mathbf{A}) = v$.

► Лемма 3.2.3.

$$\dim(X^0) = \dim(X_0^0); \dim(Y^0) = \dim(Y_0^0). \quad (3.2.1)$$

Доказательство. Выберем стратегию $\mathbf{x}$ из множества X^0 , удовлетворяющую условиям леммы 3.2.2. Возьмем далее стратегию $\mathbf{x}'$ из множества X_0^0 , не принадлежащую X^0 . Тогда $\mathbf{x}'\mathbf{A} \geq v$ для всех столбцов из J_2 , $\mathbf{x}\mathbf{A} > v$ для всех столбцов, не содержащихся в J_2 , и $\mathbf{x}\mathbf{A} = v$ для всех столбцов из J_2 . Положим $\bar{\mathbf{x}} = \varepsilon \mathbf{x}' + (1 - \varepsilon) \mathbf{x}$.

Тогда для достаточно малого ε мы имеем $\bar{x}A \geq v$, так что $\bar{x}$ также является оптимальной стратегией из X^0 . Из определения множества J_2 следует, что $\bar{x}'A = v$ для всех столбцов из J_2 .

Так как стратегия $\bar{x}'$ лежит на продолжении отрезка, соединяющего стратегии $\bar{x}$ и $\bar{x}$, мы можем характеризовать X_0^0 как ту часть линейного расширения множества X^0 , которая содержится в основном симплексе стратегий S^n . Следовательно, $\dim(X^0) = \dim(X_0^0)$. Аналогичная аргументация справедлива для множества Y^0 .

Наша цель состоит в том, чтобы доказать равенства $I_1 = I_2$ и $J_1 = J_2$. Так как множества I_1, J_1, I_2, J_2 для редуцированной матрицы $\tilde{A}$ являются теми же, что и для первоначальной матрицы A , мы можем, не нарушая общности, ограничиться рассмотрением редуцированной игры. Из построения матрицы $\tilde{A}$ следует, что I_2 и J_2 соответственно состоят из всех индексов строк и столбцов матрицы $\tilde{A}$. Для того чтобы завершить доказательство теоремы 3.1.1, достаточно при помощи леммы 3.2.3 указать такую стратегию $\bar{x}$ в игре с матрицей $\tilde{A}$, чтобы все компоненты $\bar{x}$ были положительными, и найти соответствующую оптимальную стратегию $\bar{y}$. Введем с этой целью класс игр, зависящих от параметра, определяемый матрицей

$$\tilde{A}(\alpha) \quad (0 \leq \alpha < 1),$$

где i -я строка $\mathbf{a}_i(\alpha)$ матрицы $\tilde{A}(\alpha)$ задается формулой

$$\mathbf{a}_i(\alpha) = (1 - \alpha) \mathbf{a}_i + \alpha \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i \right) = (1 - \alpha) \mathbf{a}_i + \alpha \bar{\mathbf{a}}.$$

Пусть $v(\alpha)$ — значение игры с матрицей $\tilde{A}(\alpha)$. Тогда $v(\alpha) \leq v$. Пусть $\bar{y}$ — любая стратегия из множества Y^0 . Непосредственный подсчет дает нам

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha) \bar{y} &= \left((1 - \alpha) \sum_j a_{ij} y_j + \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \right) \leq \\ &\leq (1 - \alpha) v + \frac{\alpha}{n} n v = v. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $v(\alpha) \leq v$.

Важный вспомогательный результат, необходимый для завершения доказательства теоремы 3.1.1, выделен в следующую лемму.

► Лемма 3.2.4. Если существует оптимальная стратегия $\bar{y}$ из множества Y_0^0 , которая содержится в симплексе $Y[J_1(\alpha)]$ [выпуклая оболочка чистых стратегий с индексами из $J_1(\alpha)$] для некоторого α , то $v(\alpha) = v$.

Доказательство. Построим стратегию y' , удовлетворяющую условиям леммы 3.2.2, в отношении игры с матрицей $\tilde{A}(\alpha)$. Согласно построению, y' — внутренняя точка множества $Y[J_1(\alpha)]$, так как все ее координаты строго положительны. Выберем достаточно малое $\epsilon > 0$ так, чтобы стратегия $y'' = (1 + \epsilon)y' - \epsilon y$ все еще оставалась в $Y[J_1(\alpha)]$. Отметим прежде всего, что

$$v(\alpha) \leq \max_i \{((1 - \alpha)a_i + \alpha \bar{a}, (1 + \epsilon)y' - \epsilon y)\}.$$

Так как стратегия y оптимальна, i принадлежит I_2 , а I_2 состоит из индексов *всех* строк матрицы $A(\alpha)$, мы имеем независимо от выбора i

$$(a_i, y) = v \text{ и } (\bar{a}, y) = v.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v(\alpha) &\leq \max_i \{(1 + \epsilon)[(1 - \alpha)(a_i, y') + \alpha(\bar{a}, y')] - \epsilon v\} \leq \\ &\leq (1 + \epsilon)v(\alpha) - \epsilon v, \end{aligned}$$

так как y' оптимально для игры с матрицей $\tilde{A}(\alpha)$. Поэтому $\epsilon v \leq \epsilon v(\alpha)$, или $v \leq v(\alpha)$. А так как обратное неравенство уже получено, мы имеем $v = v(\alpha)$. Доказательство леммы закончено.

Нам понадобится тот факт, что $\tilde{A}(\alpha_\delta)y^\delta \rightarrow \tilde{A}y$ (где $\alpha_\delta \rightarrow 0$) при $y^\delta \rightarrow y$. Это утверждение очевидно, и мы не будем формально его доказывать.

► **Лемма 3.2.5.** *Существует такое число $\alpha > 0$, что $v(\alpha) = v$.*

Доказательство. Мы должны показать, что условия леммы 3.2.4 выполняются. Пусть α_δ — сходящаяся к нулю последовательность. Так как матрица $\tilde{A}$ имеет конечное число столбцов, существует неограниченное число таких α_δ , что множества $J_1(\alpha_\delta)$ совпадают. В дальнейшем мы ограничимся, не меняя обозначений, рассмотрением именно этой последовательности.

Выберем стратегию y_δ так, чтобы она была оптимальной для игры с матрицей $\tilde{A}(\alpha_\delta)$. В этом случае y_δ содержится в множестве $Y[J_1(\alpha_\delta)]$. Так как Y — компактное множество, мы можем выбрать y , являющееся предельной точкой для y_δ . При этом y находится в $Y[J_1(\alpha_\delta)]$ для всех δ .

Остается показать, что y — оптимальная стратегия в игре с матрицей A . Очевидно, что

$$\tilde{A}(\alpha_\delta)y_\delta \leq v(\alpha_\delta) \leq v.$$

а поэтому $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{y} \leq \mathbf{v}$. Отсюда следует, что $\mathbf{y}$ принадлежит множеству Y_0^0 . Применяя лемму 3.2.4, мы получим равенство $v = v(\alpha_\delta)$.

Доказательство теоремы 3.1.1. Выберем настолько малое число α , чтобы имело место равенство $v(\alpha) = v$, и оптимальную стратегию $\mathbf{x}$ в игре с матрицей $\tilde{\mathbf{A}}(\alpha)$. Построим смешанную стратегию

$$\mathbf{x}^0 = (1 - \alpha) \mathbf{x} + \frac{\alpha}{n} \mathbf{e},$$

которая имеет полный вес (т. е. все ее компоненты положительны). Стратегия $\mathbf{x}^0$ оптимальна:

$$\begin{aligned} (x^0, \tilde{\mathbf{A}})_j &= \sum_{i=1}^n x_i^0 a_{ij} = (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} + \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n a_{ij} = \\ &= (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} + \frac{\alpha}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) \sum_{i=1}^n x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(1 - \alpha) a_{ij} + \frac{\alpha}{n} \left(\sum_{k=1}^n a_{kj} \right) \right] x_i \geq v(\alpha) = v. \end{aligned}$$

Это означает, что $I_1 = I_2$. Аналогичным образом доказывается равенство $J_1 = J_2$.

3.3*. Доказательство теоремы 3.1.2. В этом пункте мы воспользуемся свойствами матрицы как линейного отображения. Для обычной $n \times m$ -матрицы $\mathbf{B}$ через $R(\mathbf{B})$ [или иногда через $\mathcal{R}(\mathbf{B})$] будем обозначать ранг матрицы $\mathbf{B}$, которая рассматривается как линейное преобразование, и через $\eta(\mathbf{B})$ — линейное пространство нулей $\mathbf{B}$ ¹⁾.

Ортогональное дополнение множества L в евклидовом пространстве обозначается через $L^\perp$.

Наконец, если $\mathbf{B}$ — линейное преобразование пространства E^m в пространство E^n , то имеют место следующие соотношения ортогональности:

- (1) $n = \dim R(\mathbf{B}) + \dim R(\mathbf{B}^\perp)$;
- (2) $m = \dim R(\mathbf{B}^T) + \dim R(\mathbf{B}^T)^\perp$ ($\mathbf{B}^T$ — транспонирование матрицы $\mathbf{B}$);
- (3) если $r(\mathbf{B})$ — ранг матрицы $\mathbf{B}$, то

$$r(\mathbf{B}^T) = r(\mathbf{B}) = \dim R(\mathbf{B}) = \dim R(\mathbf{B}^T).$$

¹⁾ То есть прообразов нуля в отображении с матрицей $\mathbf{B}$. Нули матрицы образуют подпространство, которое часто называется ядром отображения. — *Прим. ред.*

Более полное изложение алгебры матриц содержится в п. А. 3 и А. 5 приложения А.

Продолжая наше изучение соотношений размерности для множеств оптимальных стратегий, установим теперь важную вспомогательную теорему. В дальнейших рассуждениях через $\tilde{A}$ будем обозначать матрицу существенной части игры с матрицей A .

► Теорема 3.3.1. Пусть X^0 и Y^0 — пространства оптимальных стратегий игроков I и II. Тогда:

(1) если значение игры $v \neq 0$, то

$$\dim Y^0 = \dim \eta(\tilde{A}), \quad \dim X^0 = \dim \eta(\tilde{A}^T);$$

(2) если значение игры $v = 0$, то

$$\dim Y^0 + 1 = \dim \eta(\tilde{A}), \quad \dim X^0 + 1 = \dim \eta(\tilde{A}^T).$$

Доказательство утверждения (1). Напомним, что если $x \in X^0$, то ненулевыми компонентами вектора x являются лишь те, которые соответствуют строкам матрицы $\tilde{A}$. Следовательно, мы можем рассматривать x как вектор в евклидовом пространстве, размерность которого равна числу строк матрицы $\tilde{A}$. Аналогичное утверждение справедливо и для вектора $y \in Y^0$.

Пусть вектор $y^0 \in Y^0$ фиксирован, а $y^1, \dots, y^k$ — максимальное множество таких векторов в пространстве Y^0 , что векторы $y^1 - y^0, \dots, y^k - y^0$ линейно независимы. Из определения существенной части игры следует, что $\tilde{A}y^0 \equiv v$ и $\tilde{A}y^i \equiv v$. Отсюда мы получаем, что $\tilde{A}(y^i - y^0) \equiv 0$ и $\{y^i - y^0\}$ составляет множество линейно-независимых нулей матрицы $\tilde{A}$. Поэтому

$$\dim Y^0 \leq \dim \eta(\tilde{A}).$$

С другой стороны, согласно лемме 3.2.2 и теореме 3.1.1, существует такая оптимальная стратегия y^0 , что $y_j^0 > 0$ для всех j (j пробегает значения номеров столбцов матрицы $\tilde{A}$). Пусть $\tilde{A}z = 0$. Дальнейшие рассуждения подобны приведенным при доказательстве леммы 2.4.1. Пусть x^0 — оптимальная стратегия, так что $x^0 \tilde{A} = v$. Тогда

$$0 = (x^0, \tilde{A}z) = (x^0 \tilde{A}, z) = v \sum z_i,$$

и поэтому $\sum z_i = 0$. Следовательно, для достаточно малого ϵ стратегия $y^0 + \epsilon z$ является оптимальной. Отсюда следует, что $\eta(\tilde{A}) \leq \dim Y^0$. Доказательство второго соотношения утверждения (1) проводится аналогично.

Доказательство утверждения (2). Если $v=0$, то стратегия y будет оптимальной в том и только в том случае, когда $\tilde{A}y=0$. Иначе говоря, любой являющийся стратегией нуль матрицы $\tilde{A}$ должен быть оптимальной стратегией. Следовательно, Y^0 может быть получено из множества $\eta(\tilde{A})$ путем его пересечения с первым ортантом и наложения дополнительного соотношения $\sum y_i = 1$. Последнее требование снижает размерность на единицу. Отсюда мы получаем, что $\dim Y^0 = \dim \eta(\tilde{A}) - 1$. Аналогичные рассуждения справедливы и для X^0 . Таким образом, лемма доказана.

Теперь мы уже подготовлены к доказательству теоремы 3.1.2, которая утверждает, что

$$\dim \bar{X} - \dim X^0 = \dim \bar{Y} - \dim Y^0.$$

(Определения множеств $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ см. на стр. 82.)

Доказательство теоремы 3.1.2. Согласно лемме 3.2.3, мы имеем $\dim X^0 = \dim X_0^0$, где X_0^0 означает пространство оптимальных стратегий для редуцированной игры; следовательно, мы можем ограничиться редуцированной игрой с матрицей $\tilde{A}$.

Так как для всех значений x

$$y \in \eta(\tilde{A}) \leftrightarrow \tilde{A}y = 0 \leftrightarrow (x, \tilde{A}y) = 0 \leftrightarrow (x\tilde{A}, y) = 0,$$

мы должны иметь

$$\eta(\tilde{A}) = [R(\tilde{A}^T)]^\perp. \quad (3.3.1)$$

Подобным же образом получаем

$$\eta(\tilde{A}^T) = [R(\tilde{A})]^\perp. \quad (3.3.2)$$

Матрицу $\tilde{A}$ можно рассматривать как отображение наименьшего линейного пространства $\mathcal{H}$, содержащего $\bar{Y}$, в соответствующее линейное пространство $\mathcal{S}$, которое содержит $\bar{X}$; кроме того, $\tilde{A}^T$ есть соответствующее двойственное преобразование $\mathcal{S}$ в $\mathcal{H}$. Поэтому из ортогональных соотношений размерностей (1) и (2) следует, что

$$\dim \mathcal{S} = \dim \bar{X} + 1 = \dim R(\tilde{A}) + \dim [R(\tilde{A})]^\perp$$

и

$$\dim \mathcal{H} = \dim \bar{Y} + 1 = \dim R(\tilde{A}^T) + \dim [R(\tilde{A}^T)]^\perp.$$

Используя свойство (3), равенства (3.3.1) и (3.3.2) и теорему 3.3.1, мы последовательно получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\dim \bar{Y} &= r(\tilde{A})^T + \dim \eta(\tilde{A}) - 1, \\ \dim \bar{X} &= r(\tilde{A}) + \dim \eta(\tilde{A}^T) - 1, \\ \dim \bar{Y} - \dim \eta(\tilde{A}) &= \dim \bar{X} - \dim \eta(\tilde{A}^T), \\ \dim \bar{Y} - \dim Y^0 &= \dim \bar{X} - \dim X^0.\end{aligned}\tag{3.3.3}$$

3.4. Обращение теоремы 3.1.2. Если оптимальные стратегии двух игроков являются единственными, скажем, $x = (x_1, \dots, x_s)$ и $y = (y_1, \dots, y_r)$, то $\dim X^0 = \dim Y^0 = 0$. Согласно теореме 3.1.2, мы имеем $\dim \bar{X} = \dim \bar{Y}$, откуда следует, что $r = s$. В этом случае обе стратегии должны иметь одинаковое число положительных компонент.

Рассмотрим обратную задачу: построить матрицу A , для которой x^0 и y^0 — единственные оптимальные стратегии. Как было указано выше, мы должны потребовать, чтобы стратегии x^0 и y^0 имели одинаковое число отличных от нуля компонент.

Полагая $x^0 = (x_0, x_1, \dots, x_k)$ и $y^0 = (y_0, y_1, \dots, y_k)$, где все x_i и y_i положительны, укажем $(k+1) \times (k+1)$ -матрицу, для которой x^0 и y^0 — единственные оптимальные стратегии. В явном виде это будет выглядеть так: положим $v \neq 1/k$ и

$$A = \begin{vmatrix} \frac{v(x_0 + y_0 - 1) + \sum_{i=1}^k x_i y_i}{x_0 y_0} & \frac{v - x_1}{x_0} & \frac{v - x_2}{x_0} & \dots & \frac{v - x_k}{x_0} \\ \frac{v - y_1}{y_0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{v - y_2}{y_0} & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{v - y_k}{y_0} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Легко проверить, что x^0 и y^0 являются здесь оптимальными стратегиями и что значение игры равно v . Нам остается лишь установить единственность.

Пусть $w = (w_0, w_1, \dots, w_n)$ — оптимальная стратегия игрока I. Если $j \neq 0$, то, согласно лемме 2.1.2, мы имеем

$$\frac{v - x_j}{x_0} w_0 + w_j = v$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^k \frac{v-x_j}{x_0} w_0 + \sum_{j=1}^k w_j = kv.$$

Но

$$\sum_{j=1}^k x_j = 1 - x_0, \quad \sum_{j=1}^k w_j = 1 - w_0,$$

так что

$$(vk - 1 + x_0) w_0 + x_0 (1 - w_0) = kvx_0,$$

или, что то же самое,

$$(vk - 1) w_0 = (vk - 1) x_0.$$

Так как $vk \neq 1$, из этого следует, что $w_0 = x_0$. Кроме того,

$$\frac{v-x_j}{x_0} w_0 + w_j = v,$$

для всех j должно быть $w_j = x_j$. Таким образом, x^0 — единственная оптимальная стратегия игрока I. Аналогичная аргументация показывает, что y^0 — единственная оптимальная стратегия игрока II.

Приступим теперь к обобщению этого результата. Более общая задача заключается здесь в следующем. Для каких множеств стратегий X^0 и Y^0 можно найти такую матрицу A , что X^0 и Y^0 будут соответственно множествами оптимальных стратегий игроков I и II. Ограничение, налагаемое на X^0 и Y^0 , состоит в выполнении для этих множеств соотношений размерностей, установленных теоремой 3.1.2. Однако, как ни покажется странным, это ограничение единственное. Другими словами, *любые* множества X^0 и Y^0 , удовлетворяющие для соответствующих $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ теореме 3.1.2, могут квалифицироваться как множества оптимальных стратегий для некоторой матрицы A . Более точная формулировка этого результата такова.

► Теорема 3.4.1. Пусть $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ — два основных симплекса соответственно в пространствах E^s и E^r , описываемые соотношениями

$$\sum_{i=1}^s x_i = 1, \quad x_i \geq 0, \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^r y_j = 1, \quad y_j \geq 0.$$

Пусть далее X^0 и Y^0 — два замкнутых, выпуклых многогранника, содержащихся в $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ и имеющих непустое пересечение с их внутренностью. Если

$$\dim \bar{X} - \dim X^0 = \dim \bar{Y} - \dim Y^0 = q, \quad (3.4.1)$$

то существует матрица A , для которой множества оптимальных стратегий равны X^0 и Y^0 , а значение игры равно нулю.

Доказательство. Пусть X_0^0 и Y_0^0 — линейные расширения множеств X^0 и Y^0 внутри $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Построим сначала матрицу $\tilde{A}$ с оптимальными стратегиями, состоящими из множеств X_0^0 и Y_0^0 .

Рассмотрим с этой целью наименьшие линейные подпространства $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{K}_0$, содержащие соответственно множества X_0^0 и Y_0^0 . Так как нулевой вектор принадлежит любому линейному пространству, мы имеем

$$\dim \mathcal{L}_0 = \dim X_0^0 + 1 = \dim X^0 + 1$$

и

$$\dim \mathcal{K}_0 = \dim Y_0^0 + 1 = \dim Y^0 + 1.$$

Из соотношения (3.4.1) и соотношений ортогональности (1) и (2) из п. 3.3 следует, что $\dim \mathcal{L}_0^\perp = \dim \mathcal{K}_0^\perp = q$.

Пусть P — $s \times s$ -матрица, соответствующая преобразованию проектирования E^s на $\mathcal{L}_0^\perp$, а Q — матрица ранга q , отображающая E^r в E^s и являющаяся однозначным линейным отображением $\mathcal{K}_0^\perp$ на $\mathcal{L}_0^\perp$, удовлетворяющим условию $\eta(Q) = \mathcal{K}_0$. Благодаря тому, что $\mathcal{K}_0^\perp$ и $\mathcal{L}_0^\perp$ имеют одну и ту же размерность, такая матрица существует. Положим $\tilde{A} = PQ$. Матрица $\tilde{A}$ есть $s \times r$ -матрица.

Многообразие нулей матрицы $\tilde{A}$ есть $\mathcal{K}_0$; для матрицы $\tilde{A}^T$ оно равно $\mathcal{L}_0$. Эти утверждения устанавливаются следующим образом: из $Q(\mathcal{K}_0) = 0$ [$Q(\mathcal{K}_0)$ означает образ $\mathcal{K}_0$ в линейном отображении Q] мы выводим, что $\eta(\tilde{A}) \supset \mathcal{K}_0$. С другой стороны, так как Q — однооднозначное линейное отображение множества $\mathcal{K}_0^\perp$ на множество $\mathcal{L}_0^\perp$, а отображение P оказывается на $\mathcal{L}_0^\perp$ тождественным, мы находим, что из равенства $\tilde{A}y = 0$ для y из $\mathcal{K}_0^\perp$ следует $y = 0$. Так как прямая сумма $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_0^\perp$ есть E^r , мы приходим к выводу, что $\eta(\tilde{A}) = \mathcal{K}_0$. Из этого следует, что

$$\eta(\tilde{A}^T) = R(\tilde{A})^\perp = (\mathcal{L}_0^\perp)^\perp = \mathcal{L}_0.$$

и, таким образом, наше утверждение установлено.

Так как значение игры с матрицей $\tilde{A}$ равно нулю, оптимальными стратегиями для нее являются векторы из X_0^0 и Y_0^0 .

Будем теперь увеличивать матрицу $\tilde{A}$ с целью исключить те стратегии из X_0^0 и Y_0^0 , которые не содержатся в X^0 и Y^0 . В дальнейшем

нам потребуются следующие характеристики выпуклых многогранников.

Пусть F — замкнутый, выпуклый многогранник в пространстве E^n , который также содержится в симплексе

$$x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Размерность многогранника F не превосходит $n - 1$, а размерность любой грани F не превосходит $n - 2$. Обозначим через k число граней многогранника F . По предположению, k конечно.

Для любой данной грани многогранника F существует по крайней мере одна $(n - 1)$ -мерная гиперплоскость B из E^n , проходящая через начало координат, которая является опорной гиперплоскостью для F и содержит эту грань многогранника F . Так как размерность любой грани многогранника F не превосходит $n - 2$, такая гиперплоскость может быть, очевидно, найдена. Обозначим направляющие коэффициенты нормали к гиперплоскости через $(b_1, \dots, b_n)$. Гиперплоскость B разделяет пространство E^n на два полупространства, E_0 и E_1 , где E_0 — замкнутое множество, которое содержит данную грань многогранника F , и $E_1 = E_0^c$ (дополнение множества E_0). Тогда

$$x \in B \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i b_i = 0,$$

$$x \in E_0 \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i b_i \geq 0,$$

$$x \in E_1 \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i b_i < 0.$$

Пусть $B^1, \dots, B^l$ — совокупность полупространств, определенных выбором опорных гиперплоскостей для граней многогранника F , пересечение которых в точности равно F . Формально, если $B^j \rightarrow (b_1^j, \dots, b_n^j)$, то

$$z \in F \rightarrow \sum_{i=1}^n z_i b_i^j \geq 0 = v \quad \text{для каждого } j (1 \leq j \leq l). \quad (3.4.2)$$

Если же $z \in F^c$, то существует такое $j_0 (1 \leq j_0 \leq l)$, что

$$\sum_{i=1}^n z_i b_i^{j_0} < 0 = v. \quad (3.4.3)$$

Таким образом, гиперплоскости (B^j) вместе с условиями (3.4.2) и (3.4.3) полностью определяют многогранник F . Заметим, что хотя переменная ориентации (полагаем $\{-b_i^j\}$ вместо $\{b_i^j\}$ для всех i, j)

изменяет все неравенства в выражениях (3.4.2) и (3.4.3) на обратные, многогранник F остается полностью определенным.

Построение матрицы A . Построим множество гиперплоскостей $\{B^j\}$, соответствующих граням множества X^0 , и припишем к матрице $\tilde{A}$ l новых столбцов, причем j -м добавленным столбцом будет вектор $(b_1^j, \dots, b_s^j)$. Построим далее множество гиперплоскостей $\{C^i\}$, соответствующих граням множества Y^0 , обращая неравенства (3.4.2) и (3.4.3), и припишем к матрице $\tilde{A}$ m новых строк, где i -й строкой будет вектор $(c_1^i, \dots, c_r^i)$. Завершим, наконец, построение матрицы A посредством заполнения нулями ее правого нижнего угла. Если $\tilde{A} = \|a_{ij}\|$, то

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & b_1^1 & \dots & b_1^l \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & b_s^1 & \dots & b_s^l \\ c_1^1 & \dots & c_r^1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^m & \dots & c_r^m & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|.$$

Убедимся теперь в том, что множества X^0 , Y^0 в точности равны множествам оптимальных стратегий для игры с матрицей A . Отметим сначала, что включения $x \in X^0$ и $y \in Y^0$ означают, что

$$x = (x_1, \dots, x_s, 0, \dots, 0)$$

и

$$y = (y_1, \dots, y_r, 0, \dots, 0),$$

где

$$x \in X^0 \rightarrow \sum_{i=1}^s x_i a_{ij} = 0$$

согласно построению матрицы $\tilde{A}$ и

$$x \in X^0 \rightarrow \sum_{i=1}^s x_i b_i^j \geq 0 \text{ для всех } j \ (1 \leq j \leq l)$$

согласно соотношению (3.4.2). Поэтому стратегия x для игры с матрицей A является оптимальной. С другой стороны, если $x \notin X^0$, то, согласно (3.4.3), существует такое j_0 , что $\sum x_i b_i^{j_0} < 0$; следовательно, x уже не будет оптимальной стратегией. Таким образом, оптимальные стратегии в точности совпадают с элементами множе-

ства X^0 . Аналогичная аргументация пройдет и для множества Y^0 , если вспомнить, что $\{C^i\}$ было построено на основе измененных неравенств в соотношениях (3.4.2) и (3.4.3). Это завершает доказательство теоремы 3.4.1.

Матрица, обладающая заданными множествами оптимальных стратегий X^0 и Y^0 , которая построена при доказательстве теоремы 3.4.1, не обязательно будет наиболее эффективной (т. е. наименьшей по размеру) матрицей среди всех, какие вообще могут быть построены. Для того чтобы получить наиболее эффективную матрицу, мы должны при построении дополнительных строк и столбцов прибегнуть к некоторым ухищрениям. Характерным здесь является то, что нет необходимости строить все гиперплоскости B^i , которые дублируют грани множества $\bar{X}$. Эти грани описываются основными неравенствами $x_i \geq 0$, которые определяют основной симплекс. Посредством исключения этих лишних столбцов и строк из матрицы A мы получим наименьшую матрицу с заданными множествами оптимальных стратегий. Доказательство этого утверждения здесь опущено и оставлено в качестве упражнения для читателя.

Задачи 5 и 6 этой главы включают также процесс построения, описанный в теореме 3.4.1.

3.5. Единственность оптимальных стратегий. Если игроки I и II обладают единственными оптимальными стратегиями, то выбор оптимальной стратегии не составляет проблемы для любого из них: выбор единствен. С другой стороны, когда множества оптимальных стратегий более чем нульмерны, выбор оптимальной стратегии включает в себя трудные принципиальные вопросы, связанные с использованием дополнительного критерия, а также другие усложнения¹⁾. Поэтому полезно и важно знать, когда игра имеет единственное решение. В этом пункте мы покажем, что игры с единственными решениями встречаются очень часто.

Заметим прежде всего, что для игр с единственными оптимальными стратегиями $\dim \bar{X} = \dim \bar{Y}$. Этот результат является непосредственным следствием теоремы 3.1.2 и эквивалентен равенству максимальных весов (числа положительных компонент) оптимальных стратегий x и y . Исходя из этого, редуцированная матрица должна быть квадратной.

Введем теперь на пространстве всех игр следующую топологию. Окрестностью $U(A)$ $n \times m$ -матрицы A назовем множество всех

¹⁾ По этому поводу см., например, статьи Бака „Предпочтительные оптимальные стратегии“ (сб. „Бесконечные антагонистические игры“, Физматгиз, 1962) и Хейберехтс „К проблеме единственности для игр на единичном квадрате“ (там же). — *Прим. ред.*

$n \times m$ -матриц, элементы которых отличаются от соответствующих элементов матрицы A не более чем на заданное положительное число.

Наша основная теорема состоит в следующем.

► Теорема 3.5.1. Если в игре с матрицей A игроки имеют единственные оптимальные стратегии x и y , то существует такая окрестность $U(A)$ матрицы A , что в игре с любой матрицей B из $U(A)$ игроки также имеют единственные оптимальные стратегии.

Доказательство теоремы основано на следующей элементарной лемме о сходимости.

► Лемма 3.5.1. Пусть $A_n \rightarrow A$, X^0 и Y^0 — множества оптимальных стратегий для матрицы A , а X_n^0 и Y_n^0 — соответствующие множества для игры с матрицей A_n . Если G — открытое множество, содержащее X^0 , то для достаточно большого n должно быть $X_n^0 \subset G$. Кроме того, $v_n \rightarrow v$.

Доказательство. Последнее утверждение леммы тривиально. Предположим, что первая часть леммы неверна. Тогда существуют такие подпоследовательности $\{n_i\}$ и $\{x^{n_i}\}$, что стратегия x^{n_i} оптимальна для A_{n_i} и содержится в G^c , где G^c есть дополнение множества G до S (S есть симплекс всех стратегий игрока I).

Так как множество G^c замкнутое и ограниченное, последовательность $\{x^{n_i}\}$ должна иметь подпоследовательность, сходящуюся к пределу $x^0 \in G^c$. Таким образом, ввиду $\lim v_n = v$ мы получаем $x^{n_i} A_{n_i} \geq v_{n_i}$ и в пределе $x^0 A \geq v$. Отсюда следует, что x^0 содержится в G . Но x^0 содержится также и в G^c , а это невозможно.

Доказательство теоремы 3.5.1. Не умаляя общности, предположим, что $v \neq 0$ (если это необходимо, мы можем увеличить все элементы матрицы A на одну и ту же константу). Пусть $A^n \rightarrow A$, так что $v_n \neq 0$ для достаточно большого n . Определим множества I_1, I_2, I_1^n, I_2^n так, как это было сделано в п. 3.1. Очевидно, что тогда

$$I_2^n = \{i \mid \sum_j a_{ij}^n y_j^n = v \text{ для всех } y^n, \text{ оптимальных в } A^n\}.$$

Так как общее число строк матрицы A конечно, число различных множеств I_2^n также может быть лишь конечным. Пусть I_2^n — одно из множеств, появляющихся в $\{I_2^n\}$ бесконечно часто. Найдем для

каждого индекса $i \in I_2^n$ подпоследовательность $\{n_i\}$, так что

$$\sum_j a_{ij}^n y_j^n = v^n$$

и в пределе

$$\sum_j a_{ij} y_j = v,$$

где y — единственная оптимальная стратегия для матрицы A . В самом деле, согласно лемме 3.5.1, каждая предельная точка последовательности y^n является той же самой единственной оптимальной стратегией y . Так как y — единственная оптимальная стратегия в игре с матрицей A , последнее равенство показывает, что $i \in I_2$.

Следовательно, $I_2^n \subset I_2$ для всех значений n , за исключением разве лишь конечного их числа.

С другой стороны, если $x_i > 0$ и $x^n \rightarrow x$, то для всех достаточно больших значений n должно быть $x_i^n > 0$, так как x — единственная оптимальная стратегия игрока I . Таким образом, x является единственной предельной точкой, которую может иметь множество X_n^0 (лемма 3.5.1). Отсюда следует, что для достаточно большого n $I_1^n \supset I_1$. Комбинируя полученные включения, мы для достаточно большого n имеем

$$I_2 \supset I_2^n \supset I_1^n \supset I_1.$$

Но, согласно теореме 3.1.1, $I_2 = I_1$, и поэтому $I_2^n = I_2$ для достаточно большого n . Аналогичное рассуждение дает нам, что для достаточно большого значения n имеет место равенство $J_2^n = J_2$.

Как уже было отмечено выше, матрица $\tilde{A}$ редуцированной игры должна быть квадратной. Далее, поскольку $J_2^n = J_2$ и $I_2^n = I_2$, все редуцированные игры $\tilde{A}^n$ также имеют квадратные матрицы того же размера, что и матрица $\tilde{A}$. Но $\dim \bar{X}^0 = 0$, $1 + \dim \bar{X} - \dim X^0 = \text{rank}(\tilde{A})$ [см. (3.3.3)]. Поэтому матрица $\tilde{A}$ имеет полный ранг; а так как небольшое изменение элементов матрицы может лишь увеличить ее ранг¹⁾, ранг матрицы $\tilde{A}^n$ для достаточно большого значения n также должен быть полным. Следовательно, $1 + \dim \bar{X}^n = \text{rank}(\tilde{A}^n)$. Однако $1 + \dim \bar{X}^n - \dim X_n^0 = \text{rank}(\tilde{A}^n)$. Это возможно лишь при условии $\dim X_n^0 = 0$, т. е. лишь в том случае, когда оптимальная стратегия x^n для игры с матрицей A^n является единственной. Аналогичное рассуждение приводит к соответствующему выводу для оптимальных стратегий y . Доказательство теоремы завершено.

¹⁾ Речь идет о небольшом, но произвольном изменении. — *Прим. ред.*

Теорема 3.5.1 констатирует, что множество всех матриц с единственными решениями является открытым. Следующая теорема показывает, что дополнение этого открытого множества неплотно в том смысле, что матрица любой игры с неединственными решениями может быть поэлементно аппроксимирована сколь угодно точно играми, обладающими единственными решениями. Приятно сознавать, что большинство игр имеют единственные решения; однако необходимо отметить, что на практике постоянно оказывается, что нам приходится иметь дело с играми, обладающими многими решениями.

► Теорема 3.5.2. *Множество всех матричных игр с единственными решениями в множестве всех матричных игр всюду плотно.*

Доказательство теоремы будет получено с помощью следующих двух лемм, каждая из которых представляет самостоятельный интерес.

► Лемма 3.5.2. *Предположим, что $\mathbf{B}$ есть матрица, обладающая для любого r следующими свойствами: (1) матрица, полученная посредством присоединения, состоящего из единиц столбца к любой $(r+1) \times r$ -подматрице матрицы $\mathbf{B}$, является невырожденной; (2) то же самое условие имеет место для подматриц матрицы $\mathbf{B}^T$; (3) каждая $r \times r$ -подматрица матрицы $\mathbf{B}$ является невырожденной. Тогда игра с матрицей $\mathbf{B}$ имеет единственные оптимальные стратегии.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ — оптимальные стратегии. Пусть r — число таких строк i , что $x_i^0 > 0$, t — число таких столбцов j , что $y_j^0 > 0$, s — число индексов j , таких, что $\sum_i a_{ij}x_i^0 = v$, и w — число индексов i , таких, что $\sum_j a_{ij}y_j^0 = v$. Согласно лемме 2.1.2, мы имеем

$$w \geq r \text{ и } s \geq t. \quad (3.5.1)$$

Пусть $\bar{\mathbf{B}} — $r \times s$ -подматрица матрицы $\mathbf{B}$, строки которой соответствуют индексам i , для которых $x_i^0 > 0$, а столбцы соответствуют индексам j , для которых $\sum_i a_{ij}x_i^0 = v$.$

Пусть $\mathbf{C} — $s \times (r+1)$ -матрица, полученная посредством прибавления столбца из единиц к матрице $\bar{\mathbf{B}}^T$. Положим$

$$\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_r^0, -v).$$

В таком случае $\mathbf{C}\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$. Предположим, что $r+1 \leq s$. Тогда мы можем выбрать произвольную $(r+1) \times (r+1)$ -подматрицу $\mathbf{D}$

матрицы $\mathbf{C}$. Для этой матрицы $\mathbf{D}$ мы имеем $\mathbf{D}\mathbf{x}^0 \equiv \mathbf{0}$, что невозможно, так как матрица $\mathbf{D}$, по предположению (3), является невырожденной. Следовательно,

$$r + 1 > s. \quad (3.5.2)$$

Применение аналогичного рассуждения к $w \times t$ -матрице, связанной с вектором $\mathbf{y}$, показывает, что

$$t + 1 > w. \quad (3.5.3)$$

Соотношения (3.5.1) и (3.5.3) дают нам $t + 1 > w \geq r$, откуда $t \geq r$. Из соотношений $s \geq t$ и $t \geq r$ мы получаем, что $s \geq r$, и, наконец, неравенство $r + 1 > s$ дает нам неравенство $r \geq s$. Отсюда легко следует, что $r = s = t = w$.

Так как $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ — произвольные оптимальные стратегии, которые удовлетворяют тождеству $t = s$, мы заключаем, что все оптимальные стратегии имеют одно и то же число положительных компонент. Следовательно, индексы положительных компонент для двух решений $\mathbf{y}$ совпадают, или, иначе говоря, выпуклая комбинация векторов $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}^0$ должна привести к оптимальной стратегии, вес которой превосходит t . Аналогично все оптимальные стратегии $\mathbf{x}$ обладают теми же положительными компонентами.

В таком случае равенство $r = s$ показывает, что для любых двух оптимальных стратегий $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$

$$(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{0}.$$

Так как, по предположению, матрица $\bar{\mathbf{B}}$ невырожденная, $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2$ и $\dim X^0 = 0$. Аналогично $\dim Y^0 = 0$.

Укажем теперь матрицу, удовлетворяющую условиям леммы 3.5.2. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — различные положительные числа ($\alpha_i \neq 1$), а $k_1, \dots, k_n$ — различные целые положительные числа. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_1^{k_1} & \dots & \alpha_n^{k_1} \\ \alpha_1^{k_2} & \dots & \alpha_n^{k_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{k_n} & \dots & \alpha_n^{k_n} \end{array} \right\| \quad (3.5.4)$$

и покажем, что она удовлетворяет условиям леммы.

Заметим, что квадратные подматрицы матрицы $\mathbf{B}$ будут того же вида, что и сама матрица $\mathbf{B}$. Если мы возьмем $r \times (r + 1)$ -подматрицу матрицы $\mathbf{B}$ и припишем к ней строку, состоящую из единиц, то мы снова получим матрицу того же вида, ибо можно положить $k_{n+1} = 0$. Добавление к $(r + 1) \times r$ -подматрице столбца, со-

стоящего из единиц, также приводит к матрице того же типа, причем можно положить $\alpha_{n+1} = 1$.

Следовательно, нам остается показать, что при любом выборе различных значений $k_i \neq 0$ и $\alpha_i \det \mathbf{B} \neq 0$. Но это есть классический определитель Вандермонда, который всегда отличен от нуля.

► Лемма 3.5.3. *Множество всех матриц, удовлетворяющих условиям леммы 3.5.2, является всюду плотным в множестве всех матриц.*

Доказательство. Возьмем произвольную матрицу $\mathbf{A}$ и матрицу $\mathbf{B}$ вида, указанного в (3.5.4). Пусть $\mathbf{R}$ — любая $r \times r$ -подматрица матрицы $\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{B}$.

Определитель матрицы $\mathbf{R}$ есть полином степени r от ϵ . Действительно, коэффициент при ϵ^r равен отличному от нуля определителю соответствующей подматрицы матрицы $\mathbf{B}$. Этот полином имеет не более чем r строго положительных корней.

Аналогично определитель каждой квадратной матрицы, полученной добавлением единичной строки или единичного столбца к $r \times (r+1)$ - или $(r+1) \times r$ -подматрицам матрицы $\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{B}$, есть полином от ϵ степени $r+1$. Число вещественных корней каждого такого полинома не превосходит $r+1$.

Число всех положительных корней ϵ_i , которое получается из всех возможных миноров матрицы $\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{B}$, конечно.

Следовательно, $\epsilon_0 = \min_i (\epsilon_i)$ строго положительно. Если $0 < \epsilon < \epsilon_0$, то матрица $\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{B}$ будет того же типа, что и матрица $\mathbf{B}$, и, следовательно, должна обладать единственными оптимальными стратегиями. Это завершает доказательство леммы и доказательство теоремы 3.5.2.

В заключение стоит отметить, что теорема 3.5.1 к играм, в которых единственную оптимальную стратегию имеет только один игрок, неприменима. Пусть, например,

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Здесь Y^0 есть множество $\{(y, 1-y)\}$ ($0 \leq y \leq 1$), в то время как X^0 состоит из единственной оптимальной стратегии $x^0 = (1, 0)$. Рассмотрим теперь преобразованную игру с матрицей

$$\mathbf{A}_\epsilon = \begin{vmatrix} 1+\epsilon & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

где $\epsilon > 0$. В этой игре уже множество $Y^0(\epsilon)$ состоит из единственной стратегии $y^0 = (0, 1)$, а множество $X^0(\epsilon)$ — из всех стратегий вида $(x, 1 - x)$, где

$$\frac{1}{1+\epsilon} \leq x \leq 1.$$

Таким образом, сколь угодно малое изменение одного элемента матрицы изменяет размерность множества X^0 от нуля до единицы.

3.6. Задачи.

1. Пусть A — 3×3 -матричная игра, во всех оптимальных стратегиях которой используются с положительной вероятностью одни и те же чистые стратегии. Показать, что решение этой игры является единственным, если число стратегий, которое используется двумя игроками, одинаково.

2. Показать, что редуцированная игра для симметричной игры также будет симметричной игрой.

3. Показать, что для симметричных игр $\dim \bar{X} - \dim X^0$ есть четное число.

4. Показать, что если $X^0 = Y^0$ и $(\dim \bar{X} - \dim X^0)$ — четное число, то существует симметричная игра с множествами оптимальных стратегий, натянутыми на X^0 и Y^0 .

5. Построить матричную игру с крайними стратегиями:

$$x = (0, 0, 1), \quad y_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \quad y_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right).$$

6. Построить матричную игру с крайними стратегиями:

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad y_1 = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right),$$

$$x_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad y_2 = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$y_3 = \left(0, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

7. Показать, что игра с бесконечной матрицей вида $a_{ij} = i - j$ ($i, j = 1, 2, 3, \dots$) значением не обладает.

8. Показать, что игра с бесконечной матрицей вида

$$a_{ij} = \frac{i-j}{\sqrt{1+(i-j)^2}} \quad (i, j = 1, 2, \dots)$$

не обладает значением.

9. Показать, что если $c_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$, то игра с бесконечной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 - 1 & c_2 & c_3 & \dots \\ 0 & c_1 & c_2 - 1 & c_3 & \dots \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 - 1 & \dots \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}$$

имеет единственное решение. Показать, что это решение не удовлетворяет соотношениям размерности этой главы. Описать редуцированную игру.

10. Показать, что для игры с бесконечной матрицей

$$D = \begin{pmatrix} d & 2d & \frac{1}{2} & 2d & \frac{1}{4} & \dots \\ d & 1 & 2d & \frac{1}{3} & 2d & \dots \end{pmatrix},$$

где $d \neq 0$, имеются лишь две оптимальные стратегии: $x = (1/2, 1/2)$, $y = (1, 0, 0, \dots)$. Показать, что в данном примере нарушается соотношение размерности, выведенное в этой главе.

11. Показать, что если $H = \|h_{ij}\|$ и $\alpha > 0$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{v(A + \alpha H) - v(A)}{\alpha} = \max_{x \in X^0(A)} \min_{y \in Y^0(A)} (x, Hy).$$

12. Показать, что

$$\left(\frac{\partial v}{\partial a_{ij}} \right)_+ = (\max_{x \in X^0} x_i) (\min_{y \in Y^0} y_j).$$

13. Вывести формулу для

$$\left(\frac{\partial v}{\partial a_{ij}} \right)_-.$$

14. Пусть A — матрица 2×2 -игры, а $X^0(A)$ и $Y^0(A)$ — множества оптимальных стратегий в этой игре. Показать, что существует такая окрестность U , что если B принадлежит U , то

$$\dim X^0(B) + \dim Y^0(B) \leq \dim X^0(A) + \dim Y^0(A).$$

15. Рассмотреть игру с матрицей $A_{\sigma} = \|e^{-\sigma(i-j)^2}\|$ ($i, j = 1, \dots, n$), где σ — положительный параметр и $n \leq 4$. Найти решения и значение игры. Показать, что при больших значениях σ оптимальные стратегии будут единственными.

16. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — $m \times n$ -матрица, в которой a_{ij} — независимые, одинаково распределенные случайные величины (см. п. В.3), плотность распределения каждой из которых есть $f(\xi)$. Показать, что вероятность того, что игра с матрицей A имеет седловую точку, не зависит от $f(\xi)$ и равна

$$\frac{m!n!}{(m+n-1)!}.$$

17. Пусть A и B — матрицы с неотрицательными компонентами. Предположим, что игра с матрицей $-A$ и игра с матрицей B имеют соответственно отрицательное и положительное значения. Показать, что существует такое p_0 ($0 < p_0 < 1$) и такие стратегии x^0 и y^0 , что $v(C) = 0$, $x^0 C \geq 0$, $C y^0 \leq 0$ и $(x^0, A y^0) > 0$, где

$$C = (1 - p_0) B - p_0 A.$$

18. Проверить результат предыдущей задачи для случая

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & \dots & n-1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

показав, что p_0 должно иметь вид $k/k+1$ для некоторого целого числа $k \leq n$, и найти стратегии x^0 и y^0 , обладающие указанными свойствами.

19. Пусть A — $n \times n$ -матрица, а X^0 и Y^0 — соответственно множества оптимальных стратегий для игроков I и II. Предположим, что множество Y^0 соприкасается с границей множества Y . Показать, что существует оптимальная стратегия x^0 , которая использует не более чем $n-1$ чистых.

20. Пусть W — ограниченный замкнутый выпуклый многогранник в пространстве E^n , который не касается положительного ортанта, за исключением, быть может, начала координат. Показать, что существует такой вектор $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, что $v_i > 0$ и $(v, w) \leq 0$ для любого $w \in W$.

Комментарии и библиография к главе 3

3.1. Теоремы 3.1.1 и 3.1.2 впервые были указаны Боненбластом, Карлином и Шепли [1]. Гейл и Шерман [1], которые дали другое доказательство теоремы 3.1.2, а также Дрешер и Карлин [1], которые изложили доказательства обеих теорем, ссылались на теорему Какутани о неподвижной точке. Теорема 3.1.1 может быть получена также в качестве следствия изучения „допустимых“ точек выпуклых множеств, что было осуществлено

в работе Эрроу, Баранкина и Блекуэлла [1]. Аналогичные структурные теоремы для задач линейного программирования были получены Голдманом и Таккером [1].

3.3. Теорема 3.3.1, описывающая соотношения между множествами оптимальных стратегий и ядром линейного преобразования, определяемого матрицей игры, разработана Боненбластом, Карлином и Шепли [1].

3.4. Обращение теоремы 3.1.2 принадлежит Боненбласту, Карлину и Шепли [1].

3.5. Теорема 3.5.1 впервые была указана Боненбластом, Карлином и Шепли [1] (см. также гл. 12).

3.6. Задачи 3 и 4 принадлежат Гейлу, Куну и Таккеру [1]. Задачи 11, 12 и 13 извлечены из работ Миллса [1] и Гросса [2]. Задача 16 принадлежит Голдману, а задача 17 — Томпсону [1] (см. также Кемени, Моргенштерн и Томпсон [1]).

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ ИГР

Несмотря на то что созданы общие численные методы решения игр (см. гл. 6), довольно часто для быстрого нахождения решения конкретной игры оказывается целесообразным воспользоваться ее специфическими свойствами. Интуитивные соображения часто приводят к хорошей первоначальной догадке, которую можно затем соответствующим образом использовать при получении решения.

Анализ пяти примеров в этой главе возвращает нас к ранее разработанной теории, именно к принципам доминирования, симметрии и к простейшим вероятностным рассуждениям. Эти примеры подобраны так, чтобы продемонстрировать перечисленные основные принципы теории игр, а не трафаретные итеративные процессы их решения и проиллюстрировать методы и типы рассуждений, которые применяются к широкому кругу задач.

Первые два примера связаны с элементарными матричными играми. В обоих примерах элементарные приложения теории получаются на основе анализа отношений доминирования. Третий пример является моделью покера, описанной в п. 1.2. В первых двух примерах для задания игры необходимо перечислить чистые стратегии каждого игрока и соответствующие выигрыши. В третьем примере, по-видимому, проще иметь дело с полным пространством стратегий непосредственно. Используемый в этом примере прием типичен для общего метода решения моделей покера.

Четвертый пример касается стратегий двух борющихся политических партий в предвыборной кампании — частный случай общей проблемы о распределении рекламных усилий. В той модели, которая здесь рассматривается, каждая из партий должна решить, в каких районах имеет смысл тратить для победы на выборах время и деньги. Детальный анализ игры приводит к некоторым неожиданным выводам.

В последнем примере описывается более сложная матричная игра. Ее первоначальное происхождение связано с военными задачами, но здесь она формулируется как задача, возникающая при переговорах двух „торгующихся“ сторон.

Математический аппарат этой главы большей частью элементарен. Тем не менее мы приводим исследование этих игр несколько более подробно, чтобы попытаться полностью показать методы и подходы, на которых основано решение игровых задач.

4.1. Игра полковника Блотто. „Игра полковника Блотто“ — это общее название некоторого класса тактических военных игр. Игра, которая рассматривается в этом пункте, является одним из наиболее простых примеров.

Две воюющие армии ведут борьбу за два пункта. Первая армия под командованием полковника Блотто состоит из четырех полков; вторая под командованием капитана Кижe¹⁾ состоит из трех полков. Армия, которая посылает больше полков на тот или иной пункт, занимает его и уничтожает все направленные на этот пункт силы противоположной стороны, получая единицу как за занятый пункт, так и за каждый уничтоженный полк противника. Полковник Блотто должен решить, как распределить силы для того, чтобы выиграть как можно больше очков.

У полковника Блотто имеется пять чистых стратегий. Эти стратегии могут быть представлены как пары чисел $\{x, y\}$, где x — число полков, посылаемых на пункт 1, а y — число полков, посланных на пункт 2; вот эти стратегии: $\{4, 0\}$, $\{0, 4\}$, $\{3, 1\}$, $\{1, 3\}$ и $\{2, 2\}$. Точно так же четыре стратегии капитана могут быть представлены парами $\{3, 0\}$, $\{0, 3\}$, $\{2, 1\}$ и $\{1, 2\}$. Приведем полную матрицу выигрышей:

		Кижe			
		a	a	b	b
		$\{3, 0\}$	$\{0, 3\}$	$\{2, 1\}$	$\{1, 2\}$
Блотто	$\alpha \{4, 0\}$	4	0	2	1
	$\alpha \{0, 4\}$	0	4	1	2
	$\beta \{3, 1\}$	1	—1	3	0
	$\beta \{1, 3\}$	—1	1	0	3
	$\gamma \{2, 2\}$	—2	—2	2	2

Эта игра симметрична для полковника Блотто относительно стратегий $\{4, 0\}$ и $\{0, 4\}$, а также относительно стратегий $\{3, 1\}$ и $\{1, 3\}$; для капитана Кижe стратегии $\{3, 0\}$, $\{0, 3\}$ и $\{2, 1\}$, $\{1, 2\}$ также

¹⁾ Выбор капитана Кижe (см. Ю. Н. Тынянов „Подпоручик Кижe“, ГИХЛ, Москва, 1956, 273—300) противником полковника Блотто хочется интерпретировать как стремление ограничить круг участников военных конфликтов вымышленными персонажами. Следует, однако, заметить, что знаменитый подпоручик Кижe скончался (в 1801 г.) в чине генерала. — *Прим. ред.*

являются симметричными. Поэтому представляется разумным искать оптимальные стратегии, обладающие аналогичными свойствами симметрии. Пусть a — вероятность того, что капитан Кижэ применит стратегию $\{3, 0\}$ (или $\{0, 3\}$), и b — вероятность того, что применяемая им стратегия будет $\{2, 1\}$ (или $\{1, 2\}$). Для того чтобы сделать смешанную стратегию (a, a, b, b) оптимальной для капитана Кижэ, необходимо и достаточно, чтобы

$$4a + 3b \leq v, \quad 3b \leq v, \quad -4a + 4b \leq v. \quad (4.1.1)$$

Очевидно, второе неравенство является следствием первого. Так как $2a + 2b = 1$, эти неравенства приобретают вид

$$4a + 3\left(\frac{1}{2} - a\right) \leq v, \quad \text{или} \quad a + \frac{3}{2} \leq v$$

и

$$-4a + 4\left(\frac{1}{2} - a\right) \leq v, \quad \text{или} \quad -8a + 2 \leq v.$$

Числа $a^0 = 1/18$, $b^0 = 4/9$ и $v = 14/9$ составляют решение неравенств (4.1.1) со строгим неравенством во втором соотношении.

Для оптимальности стратегии лемма 2.1.2 требует, чтобы было $\beta = 0$, где β — вероятность применения полковником Блотто стратегий $\{3, 1\}$ или $\{1, 3\}$. Смешанная стратегия $(\alpha, \alpha, 0, 0, \gamma)$ будет оптимальной тогда и только тогда, когда

$$4\alpha - 2\gamma \geq v = \frac{14}{9}, \quad 3\alpha + 2\gamma \geq v, \quad 2\alpha + \gamma = 1.$$

Величины $\alpha^0 = 4/9$ и $\gamma^0 = 1/9$ удовлетворяют этим уравнениям. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $(4/9, 4/9, 0, 0, 1/9)$ действительно является оптимальной стратегией полковника Блотто; $(1/18, 1/18, 4/9, 4/9)$ — оптимальная стратегия капитана Кижэ, а значение игры равно $14/9$. С помощью леммы 2.1.2 можно непосредственно установить, что оптимальная стратегия полковника Блотто (игрок I) является единственной. Однако множество оптимальных стратегий капитана Кижэ состоит более чем из одной стратегии, в чем можно убедиться, применяя к этому примеру соотношения размерностей из теоремы 3.1.2.

4.2. Опознание своего и неприятеля. Самолеты, приближаясь к воздушной базе, должны подавать сигнал наблюдателю, находящемуся на базе, независимо от того, являются они своими или неприятельскими. На основании сигнала наблюдатель должен решить, какой стороне, своей или неприятельской, принадлежит приближающийся самолет. Пусть выигрыш будет равен

a , если наблюдатель признает своего за своего;

b , если наблюдатель признает своего за неприятеля;

c , если наблюдатель признает неприятеля за своего;

d , если наблюдатель признает неприятеля за неприятеля, где $a > b$, d и $c > b$, d .

Предположим, что наблюдатель и все свои самолеты принимают некодированный сигнал, посредством которого свой самолет всегда дает сигнал „свой“. Пусть p — вероятность того, что подходящий самолет является своим. (Эта вероятность предполагается известной из предыдущей практики.)

В этом случае наблюдатель располагает четырьмя возможными стратегиями $I_1(C, H) = \{C, H\}$, $I_2(C, H) = \{H, H\}$, $I_3(C, H) = \{H, C\}$, $I_4(C, H) = \{C, C\}$, где, например, $I_2(C, H) = \{H, H\}$ означает, что наблюдатель опознает сигнал „свой“, как сигнал неприятеля, и сигнал „неприятель“, как сигнал неприятеля.

Неприятель имеет две возможные стратегии: сигналить „свой“ и сигналить „неприятель“. Эти стратегии обозначаются соответственно через C и H .

Если наблюдатель использует стратегию I_3 , а вражеская стратегия есть H , наблюдатель будет отождествлять своего с неприятелем и получать b с вероятностью p ; иногда он будет принимать неприятеля за своего и получать d с вероятностью $1 - p$. В таком случае средний выигрыш наблюдателя в игре будет равен $pb + (1 - p)d$. Восемь таких выигрышей, соответствующих комбинациям чистых стратегий, собраны в следующую матрицу:

	H	C
I_1	$pa + (1 - p)c$	$pa + (1 - p)d$
I_2	$pb + (1 - p)c$	$pb + (1 - p)c$
I_3	$pb + (1 - p)d$	$pb + (1 - p)c$
I_4	$pa + (1 - p)d$	$pa + (1 - p)d$

Так как $a > b$, d и $c > b$, d , строка I_1 , очевидно, доминирует строку I_4 , строка I_2 доминирует строку I_3 и в соответствующей уменьшенной матрице столбец H доминирует столбец C . Исходя из этого, неприятель должен всегда сигналить „свой“, а наблюдатель должен выбирать стратегию I_1 всякий раз, когда $pa + (1 - p)d > pb + (1 - p)c$ или

$$p > \frac{c - d}{a + c - b - d}.$$

Если заменить неравенство противоположным, то наблюдатель должен применять стратегию I_2 , а в случае равенства он может применять как I_1 , так и I_2 .

Значение игры равно $pa + (1 - p)d$ при

$$p > \frac{c - d}{a + c - b - d}$$

и $pb + (1 - p)c$ при

$$p < \frac{c - d}{a + c - b - d}.$$

В более реалистичном варианте игры на опознание своего и неприятеля должны применяться кодированные сигналы. Предположим, что наблюдатель и свои самолеты имеют некоторую систему, посредством которой в определенные дни они применяют сигнал „свой“, а в другие дни — сигнал „неприятель“. Если на данный день условлен сигнал „свой“, то для наблюдателя остаются лишь две разумные стратегии $I_1(C, H) = \{C, H\}$ и $I_2(C, H) = \{H, H\}$. Хотя здесь и существуют две другие чистые стратегии, но они доминируются соответственно стратегиями I_1 и I_2 и поэтому мы их не учитываем. Если условленным сигналом является „неприятель“, то две разумные чистые стратегии для наблюдателя будут $I_3(C, H) = \{H, H\}$ и $I_4(C, H) = \{H, C\}$.

Итак, матрица средних выигрышей будет иметь вид

	H	C
I_1	$pa + (1 - p)c$	$pa + (1 - p)d$
I_2	$pb + (1 - p)c$	$pb + (1 - p)c$
I_3	$pb + (1 - p)c$	$pb + (1 - p)c$
I_4	$pa + (1 - p)d$	$pa + (1 - p)c$

Пусть y означает вероятность, с которой неприятель применяет чистую стратегию H.

Случай 1.

$$pb + (1 - p)c < pa + (1 - p)\left(\frac{c + d}{2}\right).$$

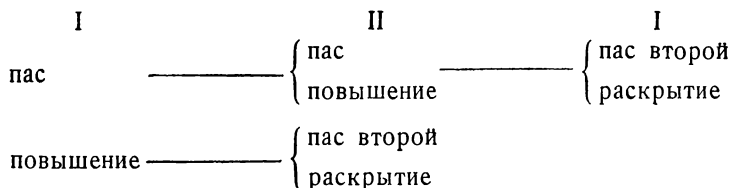
Применяя методы решения п. 2.3, можно легко установить, что $y^0 = 1/2$ — единственная оптимальная стратегия для неприятеля. Оптимальная стратегия для наблюдателя состоит в применении стратегий I_1 и I_4 с вероятностями $1/2$ каждая.

Случай 2.

$$pb + (1 - p)c > pa + (1 - p)\left(\frac{c + d}{2}\right).$$

Мы получаем здесь, что для неприятеля оптимально все множество стратегий y . Любая комбинация стратегий I_2 и I_3 является оптимальной для наблюдателя.

4.3. Игра в покер. Рассматриваемая здесь игра в покер ранее упоминалась в п. 1.2. Эта игра состоит в следующем. Имеется три различные карты: 1, 2 и 3, причем $1 < 2 < 3$ ($i < j$ означает, что карта j бьет карту i); каждый игрок получает одну из этих трех карт и ставит в банк сумму, равную a ; повышение состоит в прибавлении дополнительной суммы b . Далее показаны возможные последовательности ходов



Если как первый, так и второй игроки пасуют, то розданные карты сравниваются и обладатель старшей карты выигрывает. Если игрок объявляет пас второй (пасует после повышения), то другой игрок выигрывает банк. Если игрок раскрывает (принимает повышение другого), то карты сравниваются и старшая карта выигрывает.

Методы, используемые при решении этой игры, являются характерными методами анализа карточно-стратегических игр вообще. Еще более важно, что те же самые методы и приемы применяются и к тактическим непрерывным играм (см. гл. 17 и 18). Вследствие важности этой методики мы изложим аргументацию в этом примере достаточно подробно, особенно при описании учета действий противника, нужном для определения максимизирующей и минимизирующей оптимальных стратегий.

В этом примере стратегия игрока I есть множество, состоящее из трех троек вида $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, где, в условиях получения игроком I карты i , α_i — вероятность того, что игрок I сразу же повышает; β_i — вероятность того, что он пасует на первом круге и затем, если представляется возможность, раскрывает, и, наконец, γ_i — вероятность того, что он пасует на первом круге и затем, если представится случай, объявляет пас второй. Величины α_i , β_i и γ_i подчиняются следующим ограничениям:

$$0 \leq \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \leq 1 \text{ и } \alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1.$$

Каждая стратегия игрока II является множеством, состоящим из трех пар чисел (x_i, y_i) , где игрок II, получивший карту i , с вероятностью x_i повышает после паса, а с вероятностью y_i открывает после повышения. Числа x_i и y_i подчиняются ограничению

$$0 \leq x_i, y_i \leq 1.$$

Пусть

$$L(i, j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i > j, \\ -1, & \text{если } i < j. \end{cases}$$

Предположим, что игроку I досталась карта i , и поэтому он применяет стратегию $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$. Предположим далее, что игроку II досталась карта j и он использует стратегию (x_j, y_j) . Вероятность того, что как игрок I, так и игрок II будут пасовать, равна $(\beta_i + \gamma_i)(1 - x_j)$; выигрыш в этом случае должен быть равен $aL(i, j)$. Средний выигрыш в случае паса, объявленного игроком I, повышения, объявленного игроком II, и последующего повышения (раскрытия), объявленного игроком I, равен $(a + b)\beta_i x_j L(i, j)$; средний выигрыш в случае паса, объявленного игроком I, повышения, объявленного игроком II, и паса (второго паса), объявленного игроком I, равен $-a\gamma_i x_j$. Легко подсчитываются также различные вероятности и выигрыши в том случае, когда игрок I первоначально повышает. Полное математическое ожидание выигрыша будет равно

$$\begin{aligned} 3!K(\alpha, \beta, \gamma; x, y) = & a \sum_{i \neq j} (\beta_i + \gamma_i)(1 - x_j)L(i, j) + \\ & + (a + b) \sum_{i \neq j} \beta_i x_j L(i, j) - \\ & - a \sum_{i \neq j} \gamma_i x_j + a \sum_{i \neq j} \alpha_i (1 - y_j) + \\ & + (a + b) \sum_{i \neq j} \alpha_i y_j L(i, j). \end{aligned}$$

Для того чтобы получать решение игры, необходимо найти такие две стратегии (x^0, y^0) и $(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0)$, что

$$K(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0; x^0, y^0) \leq K(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0; x, y) \quad (4.3.1)$$

для всех (x, y) и

$$K(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0; x^0, y^0) \geq K(\alpha, \beta, \gamma; x^0, y^0) \quad (4.3.2)$$

для всех (α, β, γ) . Другими словами, это означает, что мы хотим минимизировать значение функции $K(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0; x, y)$ относительно (x, y) и надеемся, что этот минимум достигается для значений x^0, y^0 . Одновременно мы хотим максимизировать значение $K(\alpha, \beta, \gamma; x^0, y^0)$ относительно первого множества переменных и надеемся, что максимум достигается для $(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0)$. Это приводит к условиям совместности для оптимальных стратегий $\alpha^0, \beta^0, \gamma^0$ и x^0, y^0 .

Предположим, что коэффициент при x_i в функции выигрыша $K(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0; x, y)$ положителен; тогда, поскольку игрок II желает минимизировать свой проигрыш, он будет выбирать $x_i^0 = 0$. С другой стороны, если этот коэффициент будет отрицательным, игрок II будет выбирать $x_i^0 = 1$. В случае, когда коэффициент равен 0, прямые ограничения на x_i^0 не налагаются. Аналогичные рассуждения имеют место и в отношении y_i^0 .

Точка зрения игрока I не столь проста ввиду дополнительного ограничения $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = 1$. Для максимизации $K(\alpha, \beta, \gamma; x^0, y^0)$ игрок I должен положить равной единице ту из величин α^0 , β^0 или γ^0 , которая имеет наибольший коэффициент. Если два наибольших коэффициента равны или равны все три коэффициента, то ограничения на соответствующие величины α^0 , β^0 и γ^0 не налагаются (если не считать того, что они дополняют друг друга до 1).

Эти последние два абзаца описывают в общих чертах те рассуждения, с помощью которых мы будем пытаться решить данную игру в покер.

Далее в столбцах выписаны все входящие в функцию выигрыша переменные вместе с их коэффициентами. Эти выражения были получены посредством простого приведения подобных членов в функции выигрыша:

$$\begin{array}{ll}
 3! K(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0; x, y) = & 3! K(\alpha, \beta, \gamma; x^0, y^0) = \\
 = y_3 [-(\alpha_1^0 + \alpha_2^0)(2a + b)] & = \alpha_3 [2a + b(y_1^0 + y_2^0)] \\
 y_2 [-2a\alpha_1^0 - b(\alpha_1^0 - \alpha_3^0)] & \beta_3 [2a + b(x_1^0 + x_2^0)] \\
 y_1 [b(\alpha_2^0 + \alpha_3^0)] & \gamma_3 [2a - 2a(x_1^0 + x_2^0)] \\
 x_3 [-b(\beta_1^0 + \beta_2^0)] & \alpha_2 [2a + by_1^0 - (2a + b)y_3^0] \\
 x_2 [-2a\gamma_3^0 - b(\beta_1^0 - \beta_3^0)] & \beta_2 [b(x_1^0 - x_3^0)] \\
 x_1 [-2a(\gamma_2^0 + \gamma_3^0) + & \gamma_2 [-2ax_1^0] \\
 + b(\beta_2^0 + \beta_3^0)] & \alpha_1 [2a - (2a + b)(y_2^0 + y_3^0)] \\
 + \text{члены, не зависящие от } x_i & \beta_1 [-2a - b(x_2^0 + x_3^0)] \\
 \text{и } y_j; & \gamma_1 [-2a].
 \end{array}$$

Так как вполне возможно, что коэффициент при переменной y_3 отрицателен, если только $\alpha_1^0 + \alpha_2^0 \neq 0$, естественно предположить, что $y_3^0 = 1$. Аналогично, поскольку коэффициент при переменной y_1 , вероятно, положителен, можно предполагать, что $y_1^0 = 0$. Так как, наконец, величина $-b(\beta_1 + \beta_2)$ всегда отрицательна, предположим, что $x_3^0 = 1$.

Коэффициент при γ_3 , весьма возможно, будет меньше, чем коэффициенты при α_3 и β_3 , так что можно положить $\gamma_3^0 = 0$. Аналогично путем сравнения коэффициентов при β_1 с коэффициентами при γ_1 мы видим, что β_1^0 должно равняться 0.

Наше множество переменных и коэффициентов может быть теперь сокращено за счет исключения из него уже определенных величин и подстановки их значений в соответствующие коэффициенты.

В результате эти коэффициенты будут равны

$$y_2[-2a\alpha_1^0 - b(\alpha_1^0 - \alpha_3^0)] + x_2[b\beta_3^0] + x_1[-2a\gamma_2^0 + b(\beta_2^0 + \beta_3^0)]$$

и

$$\alpha_3[2a + by_2^0] + \beta_3[2a + b(x_1^0 + x_2^0)] + \alpha_2[-b] + \beta_2[b(x_1^0 - 1)] + \\ + \gamma_2[-2ax_1^0] + \alpha_1[-b - (2a + b)y_2^0] + \gamma_1[-2a].$$

Никакие дополнительные утверждения о коэффициентах не могут быть получены без наложения некоторых условий на величины a и b . Коэффициенты при α_2 , β_2 и γ_2 зависят лишь от x_1 ; поэтому мы сначала установим веса, с которыми они входят.

Если $2a > b$, то из неравенства

$$x_1^0 < \frac{b}{2a + b}$$

следует, что $\beta_2^0 = 0$, $\alpha_2^0 = 0$, $\gamma_2^0 = 1$, откуда в свою очередь вытекает, что коэффициент при x_1 , равный $[-2a + b\beta_3^0]$, меньше нуля. Это приводит нас к выводу о том, что $x_1^0 = 1$. Получилось противоречие.

Таким образом, если $2a > b$, то

$$x_1^0 \geq \frac{b}{2a + b}.$$

Предположим теперь, что

$$x_1^0 > \frac{b}{2a + b}.$$

Тогда равенство $\beta_2^0 = 1$ означает, что коэффициент при x_1^0 положителен и поэтому $x_1^0 = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, мы имеем

$$x_1^0 = \frac{b}{2a + b}$$

и $\alpha_2^0 = 0$.

Рассматривая y_2 и α_1 и предполагая, что

$$y_2^0 < \frac{2a - b}{2a + b},$$

мы получим, что $\alpha_1 = 1$, и потому коэффициент при y_2 отрицательный. Следовательно, $y_2^0 = 1$, и мы пришли к противоречию. Кроме того, $y_2^0 > \frac{2a - b}{2a + b}$ влечет $\alpha_1 = 0$, так что коэффициент при y_2 неотрицателен. Это дает нам соотношения $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 1$, из которых мы находим, что $x_2^0 = 0$ и

$$x_1^0 = \frac{b}{2a + b} > y_2^0 > \frac{2a - b}{2a + b},$$

так что если мы предположим $a \geq b$, то получим противоречие.

Случай 1. $a > b$. (Случай $b > a$ оставляем в качестве упражнения; см. задачи 4—7.) В этом случае мы уже обнаружили, что

$$x_1^0 = \frac{b}{2a+b}, \quad \alpha_2^0 = 0 \quad \text{и} \quad y_2^0 = \frac{2a-b}{2a+b}.$$

Теперь из $\beta_3^0 > 0$ следует, что $x_2^0 = 0$. Но тогда

$$[2a + b(x_1^0 + x_2^0)] < [2a + by_2^0]$$

и поэтому $\beta_3^0 = 0$, что противоречит предположенному. Следовательно, $\beta_3^0 = 0$ и $\alpha_3^0 = 1$. Наши выражения имеют, таким образом, вид

$$y_2[-(2a+b)\alpha_1^0 + b] + x_1[-2a\gamma_2^0 + \beta_2^0 b] + x_2 \cdot 0$$

и

$$\beta_2\left[\frac{-2ab}{2a+b}\right] + \gamma_2\left[\frac{-2ab}{2a+b}\right] + \alpha_1[-2a] + \gamma_1[-2a].$$

Так как $0 < x_1^0 < 1$, коэффициент при x_1 должен быть равен 0; таким образом,

$$\beta_2^0 = \frac{2a}{b} \gamma_2^0.$$

Но $\beta_2 + \gamma_2 = 1$. Отсюда

$$\beta_2^0 = \frac{2a}{2a+b} \quad \text{и} \quad \gamma_2^0 = \frac{b}{2a+b}.$$

Аналогично, поскольку $0 < y_2^0 < 1$, коэффициент при y_2 должен быть равен 0. Отсюда следует, что

$$\alpha_1^0 = \frac{b}{2a+b} \quad \text{и} \quad \gamma_1^0 = \frac{2a}{2a+b}.$$

Остается неопределенным только x_2 . Так как его коэффициент равен 0, это непосредственно не приводит к каким-либо ограничениям. Но так как $\beta_3^0 = 0$, мы должны иметь $x_1^0 + x_2^0 \leq y_2^0$. Поэтому

$$x_2^0 \leq \frac{2(a-b)}{2a+b}.$$

Множество стратегий, которые в случае 1 можно предполагать оптимальными, может быть описано следующим образом:

$$\begin{array}{lll} x_3^0 = 1, & & y_3^0 = 1, \\ x_2^0 \leq \frac{2(a-b)}{2a+b}, & & y_2^0 = \frac{2a-b}{2a+b}, \\ x_1^0 = \frac{b}{2a+b}, & & y_1^0 = 0, \\ \alpha_3^0 = 1, & \beta_3^0 = 0, & \gamma_3^0 = 0, \\ \alpha_2^0 = 0, & \beta_2^0 = \frac{2a}{2a+b}, & \gamma_2^0 = \frac{b}{2a+b}, \\ \alpha_1^0 = \frac{b}{2a+b}, & \beta_1^0 = 0, & \gamma_1^0 = \frac{2a}{2a+b}. \end{array} \quad (4.3.3)$$

Определяемые равенствами (4.3.3) значения переменных соответственно максимизируют и минимизируют значения $K(\alpha, \beta, \gamma; x^0, y^0)$ и $K(\alpha^0, \beta^0, \gamma^0; x, y)$. В том случае, когда полученные максимизирующие и минимизирующие величины совпадают с величинами, приведенными выше, соотношения (4.3.1) и (4.3.2) удовлетворяются, и указанные стратегии действительно оказываются оптимальными. Результаты анализа сведены в следующую таблицу:

$y_3 \left[\left(\frac{-b}{2a+b} \right) (2a+b) \right]$	минимизирует $y_3 = 1$
$y_2 \left[-2a \left(\frac{b}{2a+b} \right) - b \left(\frac{-2a}{2a+b} \right) \right]$	минимизирует произвольное значение y_2 и, в частности,
	$y_2 = \frac{2a-b}{2a+b}$
$y_1 [b]$	минимизирует $y_1 = 0$
$x_3 \left[\frac{-2ab}{2a+b} \right]$	минимизирует $x_3 = 1$
$x_2 [0]$	минимизирующим является любое значение, в частности,
	$x_2 \leq \frac{2(a-b)}{2a+b}$
$x_1 \left[\frac{-2ab}{2a+b} + \frac{2ab}{2a+b} \right]$	минимизирующим является любое значение, в частности,
	$x_1 = \frac{b}{2a+b}$
$\alpha_3 [2a + b(y_2^0)]$	максимизирует $\alpha_3 = 1$
$\beta_3 [2a + b(x_1^0 + x_2^0)]$	максимизирует $\beta_3 = 0$
$\gamma_3 [2a - 2a(x_1^0 + x_2^0)]$	максимизирует $\gamma_3 = 0$
$\alpha_2 [-b]$	максимизирует $\alpha_2 = 0$
$\beta_2 \left[-\frac{2ab}{2a+b} \right]$	{ максимизирует $\beta_2 + \gamma_2 = 1$, в частности,
$\gamma_2 \left[-\frac{2ab}{2a+b} \right]$	
$\alpha_1 \left[2a - (2a+b) \left(\frac{4a}{2a+b} \right) \right]$	{ максимизирует $\alpha_1 + \gamma_1 = 1$, в частности,
$\gamma_1 [-2a]$	
$\beta_1 [-2a - b(x_2^0 + 1)]$	$\alpha_1 = \frac{b}{2a+b}, \gamma_1 = \frac{2a}{2a+b}$ максимизирует $\beta_1 = 0$

Требования совместности здесь выполняются и, таким образом, стратегии будут оптимальными. Значение игры равно

$$-\frac{1}{6} \frac{b^2}{2a+b}.$$

Дальнейшее исследование использованных нами для получения вида решений в случае 1 рассуждений действительно показывает, что мы нашли все решения.

Случай 2. $a=b$. Решение для этого случая приводится без доказательства.

$$\begin{aligned} x_3^0 &= 1, & y_3^0 &= 1, \\ x_2^0 &= 0, & y_2^0 &= 1/3, \\ x_1^0 &= 1/3, & y_1^0 &= 0, \\ \alpha_2^0 &= 0, \quad -3\alpha_1^0 + \alpha_3^0 = 0, & \beta_3^0 + \alpha_3^0 &= 1, \\ \beta_1^0 &= 0, \quad -2\gamma_2^0 + \beta_2^0 + \beta_3^0 = 0, & \beta_2^0 + \gamma_2^0 &= 1, \\ \gamma_3^0 &= 0, & \alpha_1^0 + \gamma_1^0 &= 1. \end{aligned}$$

Значение игры равно $-a/6,3$.

Два полученных выше решения обладают несколькими интересными чертами. Например, игрок I, имея карту 2, никогда не должен повышать на первом круге. В этой связи мы видим, что для случая $a=b$ игрок II с картой 2 также не повышает, если игрок I перед этим спасовал. Выполнение этого требования не является обязательным для случая $a > b$.

В тех случаях, когда $a=b$, игрок I иногда нарочно „темнит“¹⁾, т. е. пасует на первом круге со старшей картой и раскрывает любое последующее повышение.

Необходимость рандомизированного блефа входит в оптимальные стратегии в качестве естественной их части. Это выражается тем фактом, что все величины x_1^0 , α_1^0 и γ_1^0 строго положительны. Желательная частота блефа зависит от отношения b/a .

4.4. Один пример рекламы. Две политические партии участвуют в предвыборной кампании. Имеется n избирательных участков, занумерованных от 1 до n , которые обычно голосуют за кандидата партии II. По числу избирателей эти участки распределены следующим образом: $a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$. Партия I объявила, что она намерена захватить один из этих участков с целью приобрести для себя голоса. Партия II будет пытаться ослабить кампанию партии I путем контрпропаганды. Средства и финансы ограничены, так что каждая из партий может направить свои усилия только на один

¹⁾ В оригинале „sandbags“. — *Прим. перев.*

участок. Предположим, что предвыборная кампания такова, что, если партия I захватывает участок j , ее выигрыш можно оценить числом a_j , если район не защищается партией II, и числом pa_j ($0 \leq p < 1$), если этот участок защищается. Коэффициент p можно рассматривать как меру эффективности партийных ораторов и т. д.

Каждая партия имеет n чистых стратегий. Матрица выигрыша равна

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & pa_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & \dots & pa_n \end{pmatrix}.$$

Интуитивно представляется естественным, чтобы партия I стремилась захватить более ценные участки, а партия II должна защищать также более ценные участки. Попытаемся определить смешанную оптимальную стратегию по первым r строкам, которые являются существенными, оставляя r в качестве параметра, значение которого будет определено позднее. Предположим, что $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_r^0, 0, \dots, 0)$ обозначает оптимальную стратегию. Предположим также (временно), что первые r чистых стратегий входят с ненулевыми вероятностями в некоторую стратегию y . Тогда в силу леммы 2.1.2 мы имеем

$$\sum_{i=1}^r a_i x_i^0 - (1-p) a_k x_k^0 = v \quad (1 \leq k \leq r). \quad (4.4.1)$$

Следовательно, для $2 \leq k \leq r$ должно быть $a_k x_k^0 = a_1 x_1^0$, и, согласно условию нормирования, мы получаем:

$$x_k^0 = \frac{\frac{1}{a_k}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}} \quad \text{и} \quad v = \frac{r+p-1}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}}. \quad (4.4.2)$$

Из формул (4.4.1) и (4.4.2) следует, что

$$x^0 A \geq v$$

(неравенство является строгим при $j > r$). По лемме 2.1.2 все оптимальные стратегии y должны концентрироваться в первых r столбцах (так как мы фактически еще не знаем, что x^0 является оптимальной стратегией для партии I, этот анализ должен рассматриваться лишь как

мотивированный поиск решения). Предполагая, что $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_r^0, 0, \dots, 0)$, определим величину y_i^0 из соотношения

$$\frac{p+r-1}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}} = p a_k y_k^0 + a_k (1 - y_k^0) \quad (1 \leq k \leq r)$$

или

$$y_k^0 = \frac{1}{1-p} \left[1 - \frac{\frac{p+r-1}{a_k}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}} \right] \quad (1 \leq k \leq r); \quad (4.4.3)$$

при этом числа y_k^0 неотрицательны тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{r+p-1} \geq \frac{\frac{1}{a_k}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}} \quad (1 \leq k \leq r). \quad (4.4.4)$$

Так как a_k строго убывает, соотношение (4.4.4) эквивалентно соотношению

$$\frac{1}{r+p-1} \geq \frac{\frac{1}{a_r}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}}.$$

Стратегия y^0 будет удовлетворять условию $Ay^0 \leq v$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\frac{1}{a_{r+1}}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}} \geq \frac{1}{r+p-1}. \quad (4.4.5)$$

Для того чтобы удовлетворялись как условия (4.4.4), так и (4.4.5), выберем в качестве r наименьшее натуральное число, меньшее или равное n , удовлетворяющее соотношению

$$\frac{\frac{1}{a_{r+1}}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}} > \frac{1}{r+p-1} \geq \frac{\frac{1}{a_r}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}}. \quad (4.4.6)$$

Если такого подчиняющегося этим неравенствам r нет, то положим $r = n$. Последний случай может иметь место только при

$$\frac{\frac{1}{a_n}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} \leq \frac{1}{n+p-1}. \quad (4.4.7)$$

Доказательство этого утверждения состоит в следующем. Заметим сначала, что если

$$\frac{1}{r+p-1} \geq \frac{\frac{1}{a_{r+1}}}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}},$$

то

$$\frac{1}{r+p} \geq \frac{\frac{1}{a_{r+1}}}{\sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{a_i}}.$$

(Первое неравенство означает здесь то же, что и

$$r+p-1 \leq \frac{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}}{\frac{1}{a_{r+1}}}.$$

Поэтому

$$r+p \leq \frac{\sum_{i=1}^r \frac{1}{a_i}}{\frac{1}{a_{r+1}}} + \frac{\frac{1}{a_{r+1}}}{\frac{1}{a_{r+1}}},$$

что является вторым неравенством.)

Заметим теперь, что правое неравенство в (4.4.6) имеет место при $r = 1$. Ввиду только что сказанного, мы можем заключить, что соотношение (4.4.6) может не выполняться для всех r только в тех случаях, когда имеет место соотношение (4.4.7).

Оптимальные стратегии теперь до конца выяснены. Нам остается выбрать в соответствии с неравенствами (4.4.6) число r и затем при помощи формул (4.4.2) и (4.4.3) определить стратегии x^0 и y^0 . Эти стратегии действительно составляют решение, как это было установлено в ходе анализа. За исключением того случая, когда a_k и p принимают особые значения [т. е. в тех редких случаях, когда в (4.4.6) имеет место равенство], оптимальные стратегии единственны.

Мы нашли, что обе партии концентрируют свое внимание на одних и тех же r привлекательных избирательных участках и что они различаются только наличием разных вероятностей выбора данного участка среди всех выбираемых участков.

4.5*. Пример торгов. Игра, которую мы будем рассматривать в этом пункте, является интерпретацией процесса коллективной торговли¹⁾. Такая интерпретация может показаться предельно надуманной, так как споры между рабочими и администрацией не отражают полного конфликта интересов, но тем не менее она наводит на мысль о возможности применения теории игр к ситуациям, возникающим в промышленности.

Первоначально наш пример понимался как игра, связанная с атакой и защитой скрытого объекта. Защитник имеет объект большой ценности, который он может скрыть в любом из многих укрытий; атакующая сторона предпринимает серию попыток уничтожения этого объекта путем поражения этих укрытий. В качестве иллюстрации предположим, что атомная бомба перевозится одним из двух однотипных бомбардировщиков, называемых О (охраняемый) и З (защитающий). Они летят в строю, в котором самолет О находится позади самолета З, так что неприятельский истребитель, желающий атаковать самолет О, должен пройти через полосу огня бомбардировщика З и двигаться с риском быть сбитым, прежде чем он будет способен подойти к цели. Однако, открыв огонь по своей цели, истребитель может сбить ее с вероятностью β . Защитник (игрок II) выбирает, какой самолет О или З будет нести бомбу. Атакующий (игрок I) выбирает упорядоченную последовательность из n букв ОЗЗО...О, где каждая буква представляет собой выбор им цели при каждой атаке с учетом всех предыдущих неудачных выборов. Число n представляет собой число допустимых атак, которые может сделать истребитель.

Вернемся теперь к торговой интерпретации, сохраняя обозначения О и З в качестве напоминания о возможности применения модели в задаче об атаке и защите.

Профессиональный союз и дирекция некоторой фирмы имеют два спорных вопроса З и О. При всех обстоятельствах пусть β — вероятность того, что профсоюз может положительно или отрицательно уладить спорный вопрос З. Если З улаживается положительно (в пользу профсоюза), то игра оканчивается, т. е. никаких дальнейших соглашений достичь нельзя. В том случае, когда вопрос З решается отрицательно, обозначим через β вероятность того, что профсоюзу удастся уладить спорный вопрос О. Если по вопросу З ре-

¹⁾ Здесь слово „торговля“ связано не с глаголом „торговать“, а с глаголом „торговаться“. — *Прим. ред.*

шение достигается, то пусть $\gamma < \beta$ — вероятность того, что профсоюзом улаживается вопрос О. Другими словами, в том случае, когда по вопросу З соглашение отсутствует, спорный вопрос О уладить труднее. (В модели „атака — защита“ самолет О труднее уничтожить в тех случаях, когда самолет З сохраняется, чем тогда, когда самолет З уничтожен.)

При любой возможности прийти к соглашению профсоюз должен решить, за улаживание какого спорного вопроса следует взяться. Будем предполагать, что администрация *a priori* склонна пойти на уступки не более чем по одному из этих спорных вопросов. У администрации имеется две чистые стратегии, т. е. она должна решить, по какому из этих спорных вопросов ей целесообразно уступить в случае необходимости. (Конечно, в действительности соответствующее решение с той или иной степенью уверенности принимается заранее.) Мы будем также предполагать, что профсоюз отдает себе отчет в том, что прогресс возможен не более чем в одном вопросе. Если администрация приготовилась уступить в одном из этих спорных вопросов, например в вопросе О, тогда мы будем предполагать, что вероятность установления профсоюзом безнадёжности улаживания З по-прежнему равна β . Наконец, мы предполагаем, что если безнадёжность улаживания спорного вопроса З становится известной профсоюзу, то следующая попытка при переговорах должна быть направлена на решение спорного вопроса О. Эта ситуация не является симметричной. Если при необходимости администрация решила уступить в вопросе З, то вероятность определить для профсоюза невозможность переговоров по вопросу О равна γ . Профсоюз имеет также две чистые стратегии; он должен решить, по какому из двух спорных вопросов заключить соглашение. Игрок I отождествляется с профсоюзом, игрок II — с дирекцией.

В случае только одной возможности для заключения соглашения (возможность заключить соглашение может соответствовать встрече каждые три месяца между представителями профсоюза и администрации) формальное описание задачи о заключении соглашения будет следующим. У игрока II имеются две стратегии: (1) поддержать соглашение по спорному вопросу О, (2) поддержать соглашение по спорному вопросу З. Игрок I также имеет две возможные стратегии: (1) пытаться заключить соглашение по спорному вопросу О, (2) пытаться заключить соглашение по спорному вопросу З. Функция выигрыша для игрока I считается равной вероятности положительного решения спорного вопроса для профсоюза.

	Соглашаться по вопросу О	Соглашаться по вопросу З
Поставить на обсуждение вопрос О	γ	0
Поставить на обсуждение вопрос З	0	β

Значение игры равно

$$v = \frac{\beta\gamma}{\beta + \gamma}.$$

Игрок I имеет единственную оптимальную стратегию:

выбирать О с вероятностью $\frac{\beta}{\beta + \gamma}$,

выбирать З с вероятностью $\frac{\gamma}{\beta + \gamma}$.

Игрок II имеет ту же самую оптимальную стратегию.

Обобщим теперь предыдущий случай, допуская для игрока I две возможности прийти к соглашению. Игрок I теперь будет иметь четыре чистые стратегии, и матрица выигрышей становится равной

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{О} & \text{З} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{О, О} \\ \text{О, З} \\ \text{З, О} \\ \text{З, З} \end{array} & \left\| \begin{array}{cc} 2\gamma - \gamma^2 & \beta\gamma \\ \gamma & \beta \\ \beta^2 + (1 - \beta)\gamma & \beta \\ \beta^2 & 2\beta - \beta^2 \end{array} \right\|. \end{array}$$

Первая буква чистой стратегии для игрока I указывает спорный вопрос, по которому надо прийти к соглашению при первой возможности, а вторая буква — спорный вопрос, по которому надо прийти к соглашению при второй возможности, если на первом заседании не принято решения вовсе или принято отрицательное решение. Значение функции выигрыша равно среднему выигрышу игрока I, или, что то же самое, вероятности успеха, соответствующего стратегиям, выбираемым игроками I и II. Подразумевается, что если игрок I может положительно или отрицательно полностью уладить свой спорный вопрос, то этот спорный вопрос можно считать исчерпанным.

Проведем теперь вычисление типичного элемента предыдущей матрицы $\beta^2 + (1 - \beta)\gamma$, стоящего на пересечении третьей строки и первого столбца. В этом случае стратегия игрока I есть З, О, а игрок II выбирает стратегию О. Если игрок I выбирает вопрос З, то имеется два возможных исхода: (а) З улаживается отрицательно (с вероятностью β), после чего вероятность улаживания спорного вопроса О оказывается равной β ; или (б) З не улаживается (с вероятностью $1 - \beta$), и вероятность улаживания спорного вопроса О будет равна γ . Таким образом, полная вероятность равна

$$\beta^2 + (1 - \beta)\gamma.$$

Переходим к исследованию решения игры. Заметим, что, поскольку $\gamma < \beta$, вторая строка доминируется третьей. Некоторые элементарные преобразования показывают, что четвертая строка хотя и не домини-

руется, но не входит ни в какую оптимальную стратегию для игрока I.

Решение будет следующим.

Случай 1. Если $\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 - \gamma \leq 0$, то оптимальная стратегия игрока I есть

$$З, О \text{ с вероятностью } \frac{\gamma(1-\beta) + \gamma(1-\gamma)}{\beta(1-\beta) + \gamma(1-\gamma)},$$

$$О, З \text{ с вероятностью } \frac{\beta(1-\beta) - \gamma(1-\beta)}{\beta(1-\beta) - \gamma(1-\gamma)};$$

оптимальная стратегия игрока II состоит в том, чтобы

$$\text{поддерживать соглашение по вопросу О} \quad \frac{\beta(1-\gamma)}{\beta(1-\beta) + \gamma(1-\gamma)},$$

$$\text{поддерживать соглашение по вопросу З} \quad \frac{\beta(\gamma-\beta) + \gamma(1-\gamma)}{\beta(1-\beta) + \gamma(1-\gamma)};$$

значение игры равно

$$v = \beta\gamma \frac{\beta(\gamma-\beta) + 2(1-\gamma)}{\beta(1-\beta) + \gamma(1-\gamma)}.$$

Случай 2. Если $\beta^2 - \beta\gamma + \gamma^2 - \gamma \geq 0$, то существует седловая точка. Игрок I выбирает стратегию З, О, а игрок II — стратегию О. Значение игры равно

$$v = \beta^2 - \beta\gamma + \gamma.$$

Наше заключительное обобщение этой модели состоит в том, чтобы предоставить игроку I n возможностей заключения соглашения. Стратегия описывается последовательностью из n букв З и О, которая определяет порядок постановки вопросов. Повторяем, что после того как один спорный вопрос полностью решен отрицательно, при ближайшей возможности рассматривается другой спорный вопрос.

При изучении этой общей игры заметим сначала, что каждая стратегия игрока I, в которой З содержится r раз, доминируется стратегией

$$\overbrace{З \dots З}^r \overbrace{О \dots О}^{n-r}.$$

(Частный случай этого обстоятельства проявился в последней матрице, где вторая строка доминировалась третьей.) Другими словами, если З ставится на обсуждение игроком I r раз, то его следует ставить первым. Аргументация в случае двух заседаний показывает, что $З \dots З О \dots$ доминирует аналогичную стратегию с чередующимися З и О. Итерация этого рассуждения устанавливает наше утверждение. Следовательно, стратегии игрока I описываются целым числом r ,

указывающим число обсуждений спорного вопроса 3. Определим теперь элементы матрицы выигрышей $a(r, O)$ и $a(r, 3)$, первый из которых соответствует стратегии r игрока I и стратегии O игрока II:

$$a(r, O) = 1 - P \text{ (игрок I не способен уладить спорный вопрос 3 при первых } r \text{ возможностях заключения соглашения)} \times P \text{ (игроку I не удалось заключить соглашение по спорному вопросу O) | игрок I не способен уладить спорный вопрос 3} - \sum_{k=1}^r P \text{ (игрок I способен уладить 3 при } k\text{-й возможности)} \times P \text{ (игроку I не удалось заключить соглашение O в остальных } n-k \text{ разбирательствах при условии, что вопрос 3 был улажен при } k\text{-м обсуждении отрицательно)} = 1 - (1 - \beta)^r (1 - \gamma)^{n-r} - r\beta (1 - \beta)^{n-1}.$$

Аналогичным образом находим, что

$$a(r, 3) = 1 - (1 - \beta)^r (1 - \gamma)^{n-r} - \gamma (1 - \beta)^r \frac{[(1 - \gamma)^{n-r} - (1 - \beta)^{n-r}]}{\beta - \gamma}.$$

Для решения игры мы полагаем r изменяющимся непрерывно и используем вогнутость функций $a(r, 3)$ и $a(r, O)$ относительно r . Пусть r_0 будет решением уравнения

$$\frac{da(r, O)}{dr} = 0,$$

и пусть

$$R = \frac{1 - \gamma}{1 - \beta}.$$

Тогда

$$r_0 = n - \frac{\ln \left[\frac{\beta}{1 - \beta} \right] - \ln \ln R}{\ln R}$$

при условии, что правая часть этого равенства положительна; в противном случае положим $r_0 = 0$. Если $a(r_0, O) \leq a(r_0, 3)$, то игрок I имеет чистую оптимальную стратегию r_0 , а игрок II — чистую оптимальную стратегию O. Если $a(r_0, O) \geq a(r_0, 3)$, то игрок I имеет чистую оптимальную стратегию r , которая дается решением уравнения

$$1 + \frac{r\beta(\beta - \gamma)}{\gamma(1 - \beta)} = \left(\frac{1 - \gamma}{1 - \beta} \right)^{n-r}$$

или, приближенно,

$$r = \frac{n\gamma}{\beta + \gamma},$$

если n достаточно велико, а β близко к γ . Игрок II имеет смешанную оптимальную стратегию. Для первоначальной дискретной игры определим число $r_1 = [r_0]$ и решим 2×2 -матричную игру

$$\begin{vmatrix} a(r_1, 0) & a(r_1, 3) \\ a(r_1 + 1, 0) & a(r_1 + 1, 3) \end{vmatrix}.$$

Если $a(r_1, 0) \leq a(r_1, 3)$, то мы получим решение в виде чистой стратегии; в противном случае оптимальная стратегия будет смешанной. Эта методика будет далее обсуждаться в одной из следующих глав в связи с выпуклыми играми. (См. также п. 2.7, задача 22.)

4.6. Задачи.

1. Определить все решения задачи полковника Блотто (п. 4.1).
2. Пусть A — $n \times n$ -матрица, где

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{если } i \neq j, \\ -1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Используя симметрию игры, найти оптимальные стратегии и значение этой игры.

3. Рассмотреть игру распознавания своего и неприятеля с одним кодовым сигналом, где сигнал является последовательностью длины n , состоящей из символов С и Н. Используя параметры a , b , c , d и p (см. п. 4.2), показать, что оптимальная стратегия для своего и наблюдателя заключается в том, чтобы кодировать сигналы и выбирать данный код случайным образом среди всех возможных кодов. Показать, что оптимальная стратегия неприятеля заключается в том, чтобы выбирать сигнал случайным образом из всех возможных сигналов. Показать также, что если

$$p > \frac{c - d}{c - d + 2^n(a - b)},$$

где n — длина сигнала, то наблюдатель считает исходящим от своего лишь сигнал „свой“, а если выполняется противоположное неравенство, то наблюдатель считает каждый сигнал неприятельским. Найти значение этой игры.

4. Проверить, что если $a = b$, то модель покера (п. 4.3) имеет решение, описанное в конце указанного пункта.

5. Проверить, что если $a < b < 2a$, то модель покера (п. 4.3) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} x_3^0 &= 1, & y_3^0 &= 1, \\ x_2^0 &= 0, & \frac{2a-b}{2a+b} &\leq y_2^0 \leq \frac{b}{2a+b}, \\ x_1^0 &= \frac{b}{2a+b}, & y_1^0 &= 0, \\ \alpha_3^0 &= 0, & \beta_3^0 &= 1, & \gamma_3^0 &= 0, \\ \alpha_2^0 &= 0, & \beta_2^0 &= \frac{2a-b}{2a+b}, & \gamma_2^0 &= \frac{2b}{2a+b}, \\ \alpha_1^0 &= 0, & \beta_1^0 &= 0, & \gamma_1^0 &= 1. \end{aligned}$$

6. Найти решение модели покера (п. 4.3), предполагая, что $2a = b$.

7. Найти решение модели покера (п. 4.3), предполагая, что $2a < b$.

8. Игрок I имеет три фишки, отмеченные цифрами 1, 2, 3, а игрок II — три фишки, отмеченные цифрами —1, —2, —3. У игроков имеется разграфленная доска размерами 3×3 , в которой квадраты (1, 3), (2, 2) и (3, 1) отмечены цифрой 0. Начиная игру, игрок I помещает одну из своих фишек в любой из непомеченных квадратов; затем игрок II помещает фишку в один из оставшихся квадратов, и так до тех пор, пока доска не заполнится. Такой процесс заполнения доски представляет собой матричную игру. Подсчитать число чистых стратегий для каждого игрока и показать, что у игрока II имеется стратегия, которая препятствует получению игроком I положительного выигрыша.

9. Показать, что в задаче 8 игрок I может быть уверен в выигрыше по крайней мере 0 единиц.

10. Игрок II предлагает игроку I выбор из N ящиков, D из которых содержат по доллару. Игрок I выбирает C из этих ящиков, и его выигрыш будет равен числу долларов, которое содержится в этих ящиках. Ему разрешается открыть любое число ящиков, перед тем как он сделает свой выбор, при условии, что окончательный выбор будет сделан среди неоткрытых ящиков. Игрок II знает содержимое каждого ящика и может давать ящики игроку I в любом порядке. Выигрыш игрока II равен сумме денег, которые не достались игроку I. Определить оптимальную стратегию каждого игрока.

11. Каждый из двух игроков пишет на листе бумаги число 0, 1 или 2, не показывая написанного противнику. Игрок I, зная свое собственное число, называет предполагаемую сумму двух чисел. Затем игрок II, зная свое число, называет предполагаемую сумму, причем ему не разрешается называть ту сумму, которую назвал игрок I.

Игрок I получает одну единицу, если он угадал; он платит одну единицу, если угадал игрок II. Если же не угадал ни один из игроков, то игра заканчивается вничью и выигрыш каждого игрока в этом случае равен нулю. Построить игру и определить оптимальные стратегии каждого игрока.

12. Колода карт отождествлена с набором целых чисел $1, 2, \dots, N$. После тасования каждому из игроков сдается по карте. Игрок I может либо сохранить свою карту, либо принудить игрока II поменяться с ним картами. Игрок II также может либо сохранить свою карту (которая может быть либо картой, которая ему досталась при сдаче, либо картой, которую он обменял с противником), либо поменять ее на другую, выбрав ее случайно из колоды. Когда оба игрока сделают свой выбор, их карты сравниваются и тот игрок, у которого карта старше, получает одну единицу от своего противника. Решить игру для случая $N=5$.

13. Каждый из двух игроков в покер ставит в банк одну единицу, после чего сдается по одной карте из стандартной колоды. Игрок I, знающий какая ему карта досталась, может либо сразу же пасовать, либо повышать на любую из сумм $a_1, \dots, a_n$. Если он повышает, то игрок II может либо пасовать (проигрывая банк), либо раскрываться. В последнем случае карты сравниваются и игрок со старшей картой выигрывает. (Предположим, что карты отождествлены с числами $1, \dots, 52$ и что карта i старше карты j , если $i > j$.) Решить игру для случая $n=1$ и $a_1 > 1$.

14. Решить задачу 13 для произвольного n , предполагая, что $1 < a_1 < \dots < a_n$. (См. также общую модель покера в гл. 18.)

15. В задаче об атаке и защите каждый игрок имеет две стратегии, а вероятность успеха атаки дается матрицей $\|a_{ij}\|$, где $a_{11} > a_{21}$ и $a_{12} < a_{22}$. Пусть дополнительно к этому атакующий может использовать часть своих сил для разведки. Если это сделано, то вероятность его успеха уменьшается на фиксированную величину r , но стратегия обороняющегося обнаруживается, если тот не выделяет части своих сил для контрразведки. Это отвлечение его сил увеличивает вероятность успешной атаки на s . Установить пространства смешанных стратегий и матрицы выигрыша для этой игры. Использовать для решения игры принципы доминирования.

Комментарии и библиография к главе 4

4.1. Более тщательно разработанные игры Блотто можно найти в работе Блэккетта [1].

4.2. Пример на опознание своего и неприятеля (задача 3) и его видоизменения в том виде, как здесь описано, были предложены и решены сотрудниками Корпорации РЭНД; см. Дрешер [1].

4.3. Этой модели покера мы обязаны Куну [1]. Однако он не получил полного перечисления всех оптимальных стратегий игры, что сделали мы в этом пункте. Метод Куна заключался в том, чтобы сначала описать игру в терминах матрицы выигрыша, соответствующей чистым стратегиям, и затем свести ее анализ, пользуясь принципом доминирования, к рассмотрению некоторого подкласса стратегий поведения. Наш метод, напротив, основан на сочетании интуиции и непосредственного анализа как наиболее простом пути рассмотрения салонных игр; см. также гл. 18.

4.4. Модель предвыборной кампании была предложена Дрешером [1].

4.5. Этот пример на заключение соглашения был разработан в Корпорации РЭНД в качестве модели «атака — защита»; см. Дрешер [1].

4.6. Задачи 4—7 являются различными вариантами игры в покер п. 4.3. Задача 10 является частным случаем игры, которая рассматривалась Гейлом [3]. Последняя содержала повторное разыгрывание игр с частичной информацией. Задача 12 включает существенные элементы классической игры „проходящий туз“ (Le Her), в которой обычная карточная колода заменяется на колоду карт, занумерованную последовательностью чисел $1, 2, \dots, N$. Первоначальная игра „проходящий туз“ была решена Дрешером [4].

Решения задач из глав 1—4

Глава 1

Задача 2. Стратегия игрока I состоит из двух компонент: вероятности повышения при условии, что ему досталась карта M , и вероятности повышения при условии, что ему досталась карта C . Стратегия игрока II задается единственным числом — вероятностью раскрытия при условии, что игрок I повышает. Оптимальные стратегии будут соответственно равны

$$\left\{ \frac{b-a}{b+a}, 1 \right\} \quad \text{и} \quad \left\{ \frac{2a}{b+a} \right\}.$$

Значение игры равно

$$\frac{a(b-a)}{b+a}.$$

Задача 4. Пусть $A = \|a_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, \dots, 9$) есть матрица выигрышей. Тогда

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } j-i \geq 2, \\ +1, & \text{если } i-j \geq 2, \\ +2, & \text{если } j-i = 1, \\ -2, & \text{если } i-j = 1, \\ 0, & \text{если } i-j = 0. \end{cases}$$

Задача 6. Оптимальные стратегии равны $(5/7, 2/7)$ и $(5/7, 2/7, 0, 0)$; значение игры равно $13/7$.

Задача 8. Как в матрице A_1 , так и в матрице A_2 элемент 1 является седловой точкой. Отсюда следует, что $v(A_1) = v(A_2) = 1$ и $v(A_1) + v(A_2) = 2$. Полагая $x = 3$, получим $v(A_1 + A_2) = 3 > 2$, а полагая $x = -1$, получим $v(A_1 + A_2) = 1 < 2$.

Задача 9. Рассмотрим игру

$$\left\| \begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right\|.$$

Значение игры равно 1. Однако заметим, что $x^* = (1/2, 1/2)$, $y^* = (1, 0)$ дает $(x^*, Ay^*) = 1$, и все же стратегия y^* не будет оптимальной.

Задача 10. Пусть $u = (u_1, \dots, u_n)$ — оптимальная стратегия игрока I и $w = (w_1, \dots, w_m)$ — оптимальная стратегия игрока II. Тогда

$$\sum_{i=1}^n u_i a_{ij} \geq v \geq \sum_{j=1}^m a_{ij} w_j$$

для всех i и j . Из этого следует, что если $v \geq 0$, то имеет место первая возможность, тогда как при $v < 0$ имеет место вторая возможность.

Задача 13. В игре с матрицей

$$C = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

элемент 0 является седловой точкой, и $\xi = 0$, $\eta = 1$ — единственные оптимальные стратегии. Таким образом,

$$x = (0, 0, \dots, 0, x_{n_1+1}^*, \dots, x_{n_1+n_2}^*),$$

$$y = (y_1^0, \dots, y_{m_1}^0, 0, \dots, 0).$$

Если игрок II применяет любые из первых m_1 столбцов, то игрок I получает нуль; если игрок II применяет любые из m_2 последних столбцов, то игрок I получает по крайней мере $d > 0$. Поэтому, взяв их комбинацию, мы получим $C(x, \tilde{y}) \geq 0$ для любого $\tilde{y}$. Аналогично $C(\tilde{x}, y) \leq 0$ для любого $\tilde{x}$, и $\{x, y\}$ будет ситуацией равновесия.

Задача 15. Рассмотрим игру с матрицей $a_{ij} = f(x_i, y_j)$. Если $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ — оптимальные стратегии, то

$$x^0 = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i \quad \text{и} \quad y^0 = \sum_{j=1}^m \eta_j y_j$$

удовлетворяют этим неравенствам.

Задача 16. Если не существует $x \in X$, для которого $f(x, y) > \alpha$ при всех $y \in Y$, то множество $B_x = \{y \mid f(x, y) \leq \alpha\}$ непусто, замкнуто (потому что функция f непрерывна снизу) и выпукло (потому что f — выпуклая относительно y функция). Для любого конечного набора $x_1, x_2, \dots, x_n$ множество $B_{x_1, x_2, \dots, x_n} = \{y \mid f(x_i, y) \leq \alpha \text{ для всех } i\}$ также будет непустым, замкнутым и выпуклым. В противном случае образ Y из E^n , определяющийся посредством отображения $y \rightarrow \{f(x_i, y) - \alpha\}$, имеет выпуклое замыкание, которое нигде не касается отрицательного ортанта. Значит, должна существовать строго разделяющая эти множества гиперплоскость с компонентами нормали ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющими условию $\xi_i \geq 0$, причем не все из этих компонент равны нулю. Из этого следует, что множество B_{x_0} пусто, в то время как

$$x_0 = \sum_{i=1}^n \xi_i x_i.$$

Это противоречие показывает, что пересечение $\bigcap B_{x_1, x_2, \dots, x_n}$, взятое по всем конечным наборам x_i , содержит элемент y_0 , удовлетворяющий условию $f(x, y_0) \leq \alpha$ для всех $x \in X$.

Задача 17. Пусть $A = \|a_{ij}\|_{n \times m}$, $b_j = \max_{1 \leq i \leq n} a_{ij}$ и i_j — такое значение i , что $a_{i_j j} = b_j$. Будем рассуждать индукцией по m . Если $m = 2$, то рассмотрим 2×2 -подматрицу

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} \end{vmatrix}.$$

(Если $i_1 = i_2$, то возьмем эту строку и любую другую; если же $n = 1$, то теорема тривиальна.) Если $a_{i_1 1}$ — седловая точка этой 2×2 -подматрицы, то $a_{i_1 1} \leq a_{i_1 2}$ и $a_{i_1 1} = b_1 \geq a_{i_1 1}$ для всех i , а отсюда $a_{i_1 1}$ — седловая точка первоначальной $n \times 2$ -матрицы. Если $a_{i_2 1}$ — седловая точка 2×2 -подматрицы, то $a_{i_2 1} \leq a_{i_2 2}$ и $a_{i_2 1} \geq a_{i_1 1} = b_1 \geq a_{i_1 1}$ для всех i , и отсюда $a_{i_2 1}$ — седловая точка первоначальной $n \times 2$ -матрицы. Аналогичные рассуждения имеют место для $a_{i_1 2}$ и $a_{i_2 2}$.

Предположим теперь, что теорема верна для $m - 1$. Пусть $a_{i_0 j_0}$ — седловая точка $n \times (m - 1)$ -подматрицы, состоящей из первых $m - 1$ столбцов нашей $n \times m$ -матрицы. Если $a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 m}$, то $a_{i_0 j_0}$ будет седловой точкой полной матрицы. Поэтому рассмотрим случай, когда $a_{i_0 j_0} > a_{i_0 m}$. Если $a_{i_0 m} = a_{i_m m}$, то $a_{i_0 m}$ — седловая точка $n \times m$ -матрицы. Следовательно, мы можем рассматривать лишь случай, когда $a_{i_0 m} < a_{i_m m}$.

Случай I. $a_{i_m m} \leq a_{i_m j_0}$. Пусть k — произвольное целое число между 1 и $n - 1$. Рассмотрим 2×2 -подматрицу

$$\begin{vmatrix} a_{i_m k} & a_{i_m m} \\ a_{i_0 k} & a_{i_0 m} \end{vmatrix}.$$

Далее, $a_{i_0 m} < a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 k}$, и поэтому $a_{i_0 k}$ не может быть седловой точкой этой 2×2 -подматрицы. Кроме того, поскольку $a_{i_0 m} < a_{i_m m}$, то $a_{i_0 m}$ не может быть седловой точкой. Если $a_{i_m k}$ — седловая точка, то $a_{i_m k} \geq a_{i_0 k} \geq a_{i_0 j_0} \geq a_{i_m j_0} \geq a_{i_m m}$. С другой стороны, если $a_{i_m m}$ — седловая точка, мы также имеем $a_{i_m k} \geq a_{i_m m}$. Таким образом, $a_{i_m m}$ — седловая точка $n \times m$ -матрицы.

Случай II. $a_{i_m m} > a_{i_m j_0}$. Будем поступать, как и выше: в том случае, когда $a_{i_m k}$ — седловая точка 2×2 -подматрицы, мы имеем $a_{i_m k} \geq a_{i_m j_0}$. Если $a_{i_m m}$ — седловая точка, то $a_{i_m k} \geq a_{i_m m} > a_{i_m j_0}$. Поэтому $a_{i_m j_0} \leq a_{i_m k}$ ($k = 1, 2, \dots, m$). Рассмотрим теперь 2×2 -подматрицу

$$\begin{vmatrix} a_{i_m j_0} & a_{i_m m} \\ a_{i_0 j_0} & a_{i_0 m} \end{vmatrix}.$$

Ясно, что $a_{i_0 m} \leq a_{i_0 j_0}$, следовательно, $a_{i_0 j_0}$ не является седловой точкой этой 2×2 -подматрицы; $a_{i_0 m} < a_{i_m m}$, поэтому $a_{i_0 m}$ не является седловой точкой; $a_{i_m m} > a_{i_m j_0}$, отсюда $a_{i_m m}$ не является седловой точкой. Таким образом, элемент матрицы $a_{i_m j_0}$ должен быть седловой точкой этой 2×2 -матрицы, так что $a_{i_m j_0} \geq a_{i_0 j_0} \geq a_{i_0 m}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Следовательно, $a_{i_m j_0}$ — седловая точка $n \times m$ -матрицы.

Задача 18. Пример

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

показывает, что доказываемое утверждение неверно, если опустить условие строгости седловой точки.

Задача 19. См. работу Вулфа [2].

Глава 2

Задача 3. Оптимальная стратегия каждого игрока единственна:

$$x^* = y^* = \left(\frac{\frac{1}{a_1}}{\sum_i \frac{1}{a_i}}, \frac{\frac{1}{a_2}}{\sum_i \frac{1}{a_i}}, \dots, \frac{\frac{1}{a_n}}{\sum_i \frac{1}{a_i}} \right), \quad v = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{a_i}}.$$

Задача 9. $(0, 0, 0, 0, \frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{1}{16})$.

Задача 10. $v = \frac{10}{3}$, $x^0 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ — единственная оптимальная стратегия игрока I.

Крайние оптимальные стратегии игрока II будут равны

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0, 0 \right); \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{6}, 0, 0 \right); \left(\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, 0, 0, \frac{1}{9}, 0 \right); \\ & \left(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6} \right); \left(0, \frac{4}{15}, 0, 0, \frac{7}{15}, \frac{4}{15} \right); \left(0, \frac{1}{9}, \frac{7}{9}, 0, 0, \frac{1}{9} \right); \\ & \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{6} \right); \left(0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Задача 13. Следует различать три случая: $n = 3k$, $a = 3k + 1$ и $n = 3k + 2$. Если $n = 3k$, то

$$\begin{aligned} x^0 &= \left(0, \frac{1}{k}, 0, 0, \frac{1}{k}, 0, \dots, 0, \frac{1}{k}, 0 \right), \\ y^0 &= \left(\frac{1}{k}, 0, 0, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0 \right), \\ v &= \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично. Оптимальные стратегии не являются единственными.

Задача 16. Столбец 2 доминирует столбец 3; после вычеркивания столбца 2 строка 1 доминирует строку 3. Следовательно,

$$\begin{aligned} v &= \frac{a_4 a_5 - a_1 a_3}{a_4 + a_5 - a_1 - a_3}; \\ x^0 &= \left(\frac{a_5 - a_1}{a_4 + a_5 - a_1 - a_3}, \frac{a_4 - a_3}{a_4 + a_5 - a_1 - a_3}, 0 \right); \\ y^0 &= \left(\frac{a_5 - a_3}{a_4 + a_5 - a_1 - a_3}, 0, \frac{a_4 - a_1}{a_4 + a_5 - a_1 - a_3} \right). \end{aligned}$$

В первоначальной матрице $A(x^0, \beta_2) > v$, поэтому $y_2 = 0$. Аналогично $x_3 = 0$. Так как $v = A(x^0, y^0) = a_4 y_1^0 + a_3 y_3^0$, а $y_1^0 > 0$, $y_3^0 > 0$, $y_1^0 + y_3^0 = 1$, то

$a_3 < v < a_4$. В силу леммы 2.1.2 имеем $a_4 x_1^0 + a_1 x_2^0 = v$ и $a_3 x_1^0 + a_5 x_2^0 = v$. Аналогичные равенства имеют место для y^0 . Все эти соотношения однозначно определяют x^0 и y^0 . Далее, очевидно, мы имеем $x_1^0 > y_1^0 > x_2^0$, и из соотношений $x_1^0 > x_2^0$ и $x_1^0 + x_2^0 = 1$ следует, что $x_1^0 > 1/2$.

Задача 18. Пусть $x^0 \in \cap X^k$. Тогда $G^k(x^0, y) \geq v^k$ для всех y ($k = 1, \dots, K$). Итак, если игрок II применяет стратегию y в игре G , а игрок I применяет стратегию x^0 , то

$$\begin{aligned} G(x^0, y) &= \sum_{i,j} x_i^0 G_{ij} y_j = \sum_{i,j} x_i^0 \sum_k G_{ij}^k y_j = \\ &= \sum_k \sum_{i,j} x_i^0 G_{ij}^k y_j = \sum_k G^k(x^0, y) \geq \sum_k v^k. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$v \geq \sum_k v^k.$$

Задача 20. Предположим, что A — матрица вполне смешанной симметричной игры, имеющая четный размер. По теореме 2.5.1 ядро этой игры должно совпадать с полной матрицей. Так как значение симметричной игры равно нулю, $|A| = 0$ (теорема 2.4.3). Так как A — особенная, косо-симметрическая матрица четного порядка, она имеет ранг, не превосходящий $n-2$ (так как ранг должен быть четным). Но из того, что A — матрица вполне смешанной игры, вытекает, что уравнение $Ay = 0$ имеет решение, все компоненты которого строго положительны. Так как ранг не превосходит $n-2$, мы можем несколько изменить решение и все же иметь положительное решение с суммой компонент, равной 1. Это противоречит единственности.

Задача 22. Доказательство проводится индукцией по числу столбцов.

Глава 3

Задача 3. По формуле (3.3.3) $\dim \bar{X} = r(\tilde{A}) + \dim \eta(\tilde{A}^T) - 1$. Из теоремы 3.3.1 мы имеем $\dim X^0 + 1 = \dim \eta(\tilde{A}^T)$. Комбинируя эти результаты, мы получим $\dim \bar{X} - \dim X^0 = r(\tilde{A})$. Согласно задаче 2, $\tilde{A}$ — косо-симметрическая матрица и поэтому имеет четный ранг.

Задача 4. См. Гейл, Кун, Таккер [1].

Задача 6.

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right\|.$$

Задача 8. Пусть даны y и ε ; выберем такое N , чтобы $y_1 + \dots + y_N > 1 - \varepsilon$. Выберем теперь такое i , чтобы $i > N/\varepsilon$, и пусть стратегия x приписывает массу 1 числу i . Тогда

$$A(x, y) = \sum_j a_{ij} y_j \geq (1 - \varepsilon) a_{iN} + \varepsilon(-1).$$

Но $a_{iN} \geq 1 - \varepsilon$, поэтому $A(x, y) > 1 - 3\varepsilon$ и, конечно, $A(x, y) \leq 1$. Таким образом,

$$\inf_y \sup_x A(x, y) = 1.$$

Аналогично

$$\sup_x \inf_y A(x, y) = -1.$$

Задача 10. Использовать метод графического представления из п. 2.3.

Задача 11. Пусть $\{x^0, y^0\}$ — оптимальные стратегии игры с матрицей A , а $\{x_\alpha, y_\alpha\}$ — оптимальные стратегии для матрицы $A + \alpha H$. Тогда

$$v(A + \alpha H) \leq (x_\alpha, (A + \alpha H)y^0) \leq v(A) + \alpha(x_\alpha, Hy^0)$$

и

$$v(A + \alpha H) \geq (x^0, (A + \alpha H)y_\alpha) \geq v(A) + \alpha(x^0, Hy_\alpha).$$

Отсюда следует, что

$$(x^0, Hy_\alpha) \leq \frac{v(A + \alpha H) - v(A)}{\alpha} \leq (x_\alpha, Hy^0).$$

Пусть теперь X^* — множество всех предельных точек последовательностей $\{x_{\alpha_k}\}$ при $\alpha_k \rightarrow 0$, и пусть Y^* аналогичным образом определено через y_α . По лемме 3.5.1 мы имеем $X^* \subset X^0(A)$ и $Y^* \subset Y^0(A)$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \max_{x \in X^0(A)} \min_{y \in Y^0(A)} (x, Hy) &\leq \max_{x \in X^0(A)} \min_{y \in Y^*} (x, Hy) \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{v(A + \alpha H) - v(A)}{\alpha} \leq \\ &\leq \max_{x \in X^*} \min_{y \in Y^0(A)} (x, Hy) \leq \max_{x \in X^0(A)} \min_{y \in Y^0(A)} (x, Hy). \end{aligned}$$

Задача 16. Ограничимся сначала подмножеством пространства матриц, состоящим из тех матриц, все элементы которых различны. Это подмножество имеет вероятность 1. Если никакие два элемента матрицы не равны друг другу, то в ней может быть лишь одна седловая точка. Следовательно, события $\{a_{ij} \text{ — седловая точка}\}$ являются несовместными. Таким образом,

$$P\{A \text{ имеет седловую точку}\} = \sum_{i,j} P\{a_{ij} \text{ — седловая точка}\}$$

(P означает вероятность указанного события). Но любой элемент матрицы a_{ij} является седловой точкой в том случае, когда этот элемент является наибольшим элементом в своем столбце и наименьшим в своей строке, т. е. тогда, когда он будет m -м в наборе из $m + n - 1$ произвольных чисел. Вероятность этого события равна

$$\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}.$$

Отсюда следует, что

$$P\{A \text{ имеет седловую точку}\} = m \cdot n \cdot \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} = \frac{m!n!}{(m+n-1)!}.$$

Задача 17. См. работу Томпсона [1].

Задача 19. Предположим, что нет такой оптимальной стратегии x^0 , которая использует не более $n-1$ чистых. Тогда все оптимальные стратегии x^0 будут использовать все n чистых. Но любая игра со стратегией x^0 , использующей все n чистых стратегий, должна иметь ядро, соответствующее

всей матрице A . Поэтому $\dim X^0 = 0$ и $\dim \bar{X} = n - 1$. Значит, оптимальная стратегия y^0 будет единственной и, следовательно, $\dim Y^0 = 0$. Отсюда, согласно теореме 3.1.2, получим $\dim \bar{Y} = n - 1$. Но это означает, что множество $\{y^0\} = Y^0$ содержится в множестве Y , что является противоречием.

Задача 20. Использовать теорему 3.5.1. (См. также лемму 5.3.1.)

Глава 4

Задача 2. $x^0 = y^0 = (1/n, \dots, 1/n)$; $v = (n - 2)/n$.

Задача 3. Имеется 2^n возможных сигналов. Единственно приемлемыми стратегиями для наблюдателя являются стратегии: (1) считать все сигналы неприятельскими; (2) считать самолеты, подающие условный сигнал, своими, а все другие неприятельскими. Если используется стратегия (1), то средний выигрыш независимо от того, кем применяется условный сигнал, равен $pb + (1 - p)c$. В случае применения стратегии (2) выигрыш равен $pa + (1 - p)d$; если неприятель использует тот же сигнал, и равен $pa + (1 - p)c$, если неприятель применяет любой другой сигнал. Исходя из этого, матрица будет иметь вид

$$\begin{array}{l} \text{План (2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Код:} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ 2^n \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Сигналы неприятеля} \\ \begin{array}{ccc} 1 & \dots & 2^n \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} pa + (1 - p)d & \dots & pa + (1 - p)c \\ pa + (1 - p)c & \dots & pa + (1 - p)c \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ pa + (1 - p)c & \dots & pa + (1 - p)d \end{array} \right\| \end{array} \\ \text{План (1): любой код} \left\| \begin{array}{ccc} pb + (1 - p)c & \dots & pb + (1 - p)c \end{array} \right\| \end{array}.$$

Заметим, что если

$$pa + (1 - p) \frac{d + (2^n - 1)c}{2^n} > pb + (1 - p)c, \quad (a)$$

то последняя строка будет доминироваться; поэтому (по соображениям симметрии) $(1/2^n, \dots, 1/2^n)$ — единственная оптимальная стратегия для каждого игрока. С другой стороны, если выполняется противоположное неравенство, то игрок I, применяя стратегию (1), может гарантировать себе выигрыш $pb + (1 - p)c$. Если игрок I применяет любую другую строку, то игрок II может, применяя стратегию $(1/2^n, \dots, 1/2^n)$, ограничить его выигрыш суммой, равной левой части соотношения (a). Следовательно, в этом случае наблюдатель должен считать все сигналы неприятельскими, а неприятель может применять любую стратегию. Неравенство (a) сводится к этой задаче.

Задача 7.

$$\begin{array}{ll} x_3^0 = 1 & y_3^0 = 1 \\ x_2^0 = 0 & y_2^0 = 0 \\ x_1^0 = 0 & y_1^0 = 0 \\ \alpha_2^0 = 0 & \beta_2^0 = 0 & \gamma_2^0 = 1 & \alpha_3^0 + \beta_3^0 + \gamma_3^0 = 1 \\ \alpha_1^0 = 0 & \beta_1^0 = 0 & \gamma_1^0 = 1 & -2a\gamma_3^0 + b\beta_3^0 \geq 2a. \end{array}$$

Задача 9. Одна такая стратегия для игрока I состоит в следующем. Поместим фишку 3 в квадрат (1.1). Если игрок II не занял квадрат (1.2), то поместим фишку 2 в квадрат (1.2) и в получившейся игре применим стратегию (1, 0, 0). Если игрок II занимает квадрат (1.2), поместим фишку 2 в квадрат (3.2). В том случае, когда игрок II не занимает квадрат (3.3) при своем втором ходе, поместим фишку 1 в квадрат (3.3) и в получившейся игре применим стратегию (0, 0, 1). Если игрок II при своем втором ходе не занял квадрат (3.3), то поместим тогда фишку 1 в квадрат (2.3). В результате этого мы получим следующую матрицу:

3	$-j_1$	0
$-j_3$	0	1
0	2	$-j_2$

Итак, следующая стратегия дает (для игрока I) нуль:

$$\left(\frac{j_2 j_3}{3j_2 + 3 + j_2 j_3}, \frac{3j_2}{3j_2 + 3 + j_2 j_3}, \frac{3}{3j_2 + 3 + j_2 j_3} \right).$$

Задача 11. Оптимальная стратегия игрока I заключается в следующем: выбирать каждое из чисел 0, 1 и 2 с вероятностью $1/3$ и называть 2.

Оптимальная стратегия игрока II состоит в выборе каждого из чисел 0, 1 и 2 с вероятностью $1/3$. Если выбран 0 и игрок I называет 2, то следует называть 0. Если выбрана 1 или 2 и игрок I назвал 2, то нужно называть 3. В том случае, когда 2 не называется, называть 2.

Задача 13. Пусть α_i — вероятность того, что игрок I повышает при наличии у него карты i , и β_j — вероятность того, что игрок II раскрывает при наличии у себя карты j . Матрица выигрыша будет равна

$$K(\alpha, \beta) = \frac{1}{51 \cdot 52} \sum_{i \neq j} \{ -(1 - \alpha_i) + \alpha_i (1 - \beta_j) + \alpha_i \beta_j L(i, j) \} a_j.$$

Решение игры получается путем рассуждений, аналогичных тем, которые использовались в п. 4.3. Любая оптимальная стратегия имеет вид

$$\beta_1^0 = \dots = \beta_{m-1}^0 = 0; \quad \beta_m^0 = m - 52 + \frac{2(51)}{a+1}; \quad \beta_{m+1}^0 = \dots = \beta_{52}^0 = 1$$

и

$$\alpha_m^0 = \dots = \alpha_{52}^0 = 1, \quad \text{а} \quad \alpha_1^0, \dots, \alpha_{m-1}^0$$

— произвольные числа между нулем и единицей, за исключением тех, которые удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^0 = \frac{a-1}{a+1} (52-m), \quad \text{если} \quad \beta_m^0 < 1,$$

и удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^0 \geq \frac{a-1}{a+1} (52-m) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i^0 \leq \frac{a-1}{a+1} (53-m), \quad \text{если} \quad \beta_m^0 = 1,$$

где m равно наибольшему целому числу, не превосходящему

$$\frac{53 - 2 \cdot 51}{a + 1}.$$

Задача 15. В дополнение к первоначальным стратегиям, обозначенным через 1 и 2, обороняющийся имеет теперь две новые стратегии, которые могут быть обозначены через 1О и 2О. Стратегия 1О состоит в использовании против атаки противника стратегии 1 и использовании контрразведки. Атакующий в добавление к своим первоначальным стратегиям, помеченным цифрами 1 и 2, имеет стратегии, в которых он производит разведку и использует полученную информацию; например 1Р может означать стратегию 1, если ему не известно, что враг использует стратегию 2. Имеются и другие возможные стратегии для игрока I, которые игнорируют или неправильно используют информацию, получаемую во время разведки. Все эти стратегии доминируются. Связанная с данной игрой матрица имеет вид

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 1О & 2О \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 1Р \\ 2Р \end{array} & \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{11} + c & a_{12} + c \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} + c & a_{22} + c \\ a_{11} - r & a_{22} - r & a_{11} - r + c & a_{12} - r + c \\ a_{11} - r & a_{22} - r & a_{21} - r + c & a_{22} - r + c \end{array} \right\| \end{array} \end{array}.$$

Часть II

**ЛИНЕЙНОЕ
И НЕЛИНЕЙНОЕ
ПРОГРАММИРОВАНИЕ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ЭКОНОМИКА**

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Программирование состоит в определении допустимых программ (планов, расписаний, распределений), которые оптимальны с точки зрения некоторого принятого критерия. Определение оптимальной программы обычно заключается в выборе среди всех допустимых программ такой, которая максимизирует (или минимизирует) целевую функцию.

Допустимой программой называется программа, подчиненная определенным ограничениям. Если эти ограничения представляют собой линейные¹⁾ неравенства и целевая функция также линейна, то перед нами задача линейного программирования. Если целевая функция, которая должна быть оптимизирована, или некоторые условия (ограничения) нелинейны, то мы имеем дело с задачей нелинейного программирования.

Эти допущения о линейности, а также предположения о конечности числа переменных и аддитивности выигрышей и потерь ограничивают сферу применения линейного программирования. Мы не будем здесь обсуждать достоинства и недостатки этих допущений. В этой главе мы будем рассматривать лишь сущность задач линейного программирования и свойства, которыми должны обладать их решения.

Может показаться, что решение нашей задачи легко получить с помощью классического метода нахождения максимумов и минимумов функций, употребляемого в дифференциальном исчислении. К сожалению, эти традиционные способы едва ли применимы к задачам программирования, так как в таких задачах решения попадают на границу области изменения переменных. Поэтому для исследования качественной структуры таких задач нужны новые методы.

Кроме того, ввиду огромного числа практических применений этой теории важно найти эффективные вычислительные алгоритмы для нахождения приближенных решений. Этот вопрос будет подробно изучаться в гл. 6. В настоящей главе на первый план выдвигается не столько сама теория, сколько простота и изящность изложения.

¹⁾ Относительно характеризующих программу параметров. — *Прим. ред.*

5.1. Формулировка задачи линейного программирования. Задача линейного программирования в математической форме ставится следующим образом.

Пусть переменные $x_1, \dots, x_n$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Требуется найти набор переменных $x_1, \dots, x_n$, максимизирующий ¹⁾ скалярное произведение

$$(c, x) = x_1c_1 + x_2c_2 + \dots + x_nc_n.$$

Записанная в векторных обозначениях задача состоит в отыскании вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$, максимизирующего (c, x) при ограничениях $x \geq 0$ и $Ax \leq b$, где $c = (c_1, \dots, c_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$ и A — матрица коэффициентов системы линейных неравенств (5.1.1).

Вектор x , удовлетворяющий условиям (5.1.1), называется допустимым вектором (допустимой стратегией). Множество всех допустимых векторов является выпуклым многогранником, лежащим в пересечении $m + n$ полупространств, заданных неравенствами (5.1.1). Может случиться, что эти неравенства несовместны, так что допустимых векторов не существует. Поскольку поверхностями уровня функции (c, x) являются гиперплоскости в n -мерном пространстве, точка максимума не может находиться строго внутри какой-либо грани. Следовательно, максимум должен достигаться либо на одной из вершин многогранника, либо на всех точках некоторой его грани. Конечно, даже в том случае, когда множество допустимых векторов непусто, может оказаться, что задача не имеет решения, так как при движении x по границе множества допустимых векторов функция (c, x) может неограниченно возрастать. Читателю легко построить соответствующие примеры.

Многие важные задачи экономики и организации производства могут быть сведены к линейному программированию без существенных искажений или потери общности. Оставшаяся часть этого пункта и будет посвящена описанию нескольких таких задач.

¹⁾ Или минимизирующий. Если рассматривается задача на минимум, то векторное неравенство $Ax \leq b$, соответствующее (5.1.1), обычно заменяется неравенством противоположного смысла, имеющим вид $uA \geq c$. В этом случае целевой функцией вместо (c, x) будет (u, b) . См. также первый абзац п. 5.2.

А. Задача о диете. Имеется m видов пищи ($i = 1, 2, \dots, m$), содержащих в тех или иных количествах n питательных веществ ($j = 1, 2, \dots, n$), необходимых для здоровья. В качестве n питательных веществ можно представлять себе, например, белки, минеральные соли, витамины и т. д.

Обозначим через y_i количество единиц купленного i -го продукта, через b_i — цену единицы этого продукта, а через c_j — необходимый минимум j -го питательного вещества.

Пусть a_{ij} есть количество j -го питательного вещества, содержащееся в единице i -го продукта. Спрашивается, как застаться всеми необходимыми питательными веществами при минимальных издержках?

Иными словами, при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m y_i a_{ij} \geq c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

мы хотим определить вектор, минимизирующий общую стоимость

$$\sum_{i=1}^m b_i y_i.$$

Исторически эта задача линейного программирования была рассмотрена одной из первых¹⁾. Она была поставлена и решена в условиях цен 1944 года. При этом оказалось, что для оплаты соответствующей диеты требуется примерно 60 долларов в год, если диета соответствует вкусам тех редких людей, которые могут получить удовольствие от однообразного поглощения сушеных бобов, капусты, пшеничной муки и других подобных продуктов. Несмотря на такое мало обнадеживающее начало, метод проб и ошибок, примененный при решении задачи о диете, положил начало нескольким успешным применениям методов линейного программирования к задачам технологии и организации производства. В своем первоначальном виде эта задача применяется при определении наилучшего корма для цыплят.

Задачи линейного программирования, весьма напоминающие задачу о диете, возникают в нефтяной промышленности, например при расчете наиболее дешевого способа смешивания определенных сортов и количеств бензина для получения нескольких видов топлива. При этом каждый вид топлива должен обладать определенным минимумом свойств, а также выдерживать заданный ассортимент.

Б. Транспортная задача. Имеется m портов или пунктов производства с запасами некоторого продукта и n пунктов потребления

¹⁾ Первой следует считать задачу о распределении обработки деталей по станкам с целью максимизации производительности при условии комплектности. (См. Канторович [1]). — *Прим. ред.*

или рынков сбыта, в которые этот продукт должен быть доставлен. Пусть в i -м пункте производства находится s_i единиц продукта ($i = 1, 2, \dots, m$), и в j -й пункт потребления должно быть доставлено r_j единиц ($j = 1, 2, \dots, n$).

Пусть x_{ij} — количество продукта, которое мы хотим направить из i -го порта в j -й пункт потребления.

Будем при условиях $\sum_j x_{ij} \leq s_i$ и $\sum_i x_{ij} \geq r_j$ минимизировать общую стоимость перевозок

$$\sum_{i,j} x_{ij} c_{ij}.$$

Эта транспортная задача привлекала внимание исследователей больше, чем какая-либо другая задача линейного программирования; многие вычислительные схемы были созданы специально для нее. Некоторые задачи программирования, относящиеся, казалось бы, к совершенно другим областям — в первую очередь задача об оптимальном назначении, задача о железнодорожных тарифах, — сводятся к транспортной задаче.

Транспортная задача подробно рассматривается в п. 5.9.

В. Задача о рациональном использовании склада. Предположим, что на складе вместимости C имеется начальный запас A .

Обозначим через x_i количество продукта, которое мы намерены купить в конце i -го периода по цене c_i долларов за единицу, а через y_i — количество продукта, проданное в течение i -го периода по цене b_i долларов за единицу. Пусть, наконец, число рассматриваемых периодов равно n .

Задача состоит в том, чтобы определить векторы x и y , максимизирующие функцию прибыли

$$\sum_{i=1}^n (-c_i x_i - b_i y_i)$$

и подчиненные ограничениям

$$y_{i+1} \leq A + \sum_{j=1}^i (x_j - y_j) \leq C$$

и

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Правые неравенства в ограничениях первого вида выражают условия, связанные с вместимостью склада, которая ограничивает всякую программу покупки и продажи. Левые неравенства напоминают, что невозможно продать больше продукта, чем имеется в наличии.

Г. Модель анализа технологических процессов¹⁾. Пусть имеется n технологических процессов, связанных с потреблением m видов сырья.

Пусть, далее, a_{ij} — количество i -го вида сырья, расходуемое при применении j -го процесса с единичной интенсивностью. Интенсивность применения процесса может определяться числом предприятий, использующих этот процесс, или уровнем затрат труда, который часто рассматривается как экзогенный фактор; можно принять любое из этих толкований.

Пусть b_i — имеющееся количество i -го сырья, c_j — цена продукции, полученной в результате применения j -го процесса с единичной интенсивностью, x_j — планируемая интенсивность j -го процесса.

Нашей целью является нахождение вектора x , подчиненного ограничениям

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

и $x_j \geq 0$ при всех i и j и максимизирующего общую стоимость произведенной продукции

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

5.2. Задача линейного программирования и двойственная ей задача. В предыдущем пункте задача линейного программирования трактовалась как задача отыскания такого вектора x , что $Ax \leq b$, $x \geq 0$, и функция $(c, x) = \sum c_j x_j$ принимает максимальное значение. Эту задачу мы будем называть задачей I. С ней тесно связана задача, называемая двойственной к задаче I, — задача отыскания вектора $y = (y_1, \dots, y_m)$, минимизирующего функцию $(y, b) = \sum b_i y_i$ и удовлетворяющего условиям $yA \geq c$ и $y \geq 0$ (A — $m \times n$ -матрица, $c = (c_1, \dots, c_n)$, $b = (b_1, \dots, b_m)$).

В этой задаче, которую мы будем называть задачей II, максимизация заменена минимизацией, векторы b и c поменялись ролями, а знак неравенства в основных ограничениях заменен на обратный. Формально связь между задачами I и II может быть охарактеризована следующим сопоставлением:

Задача I: $x = (x_1, \dots, x_n)$

Задача II: $y = (y_1, \dots, y_m)$

$$Ax \leq b, x \geq 0$$

$$yA \geq c, y \geq 0$$

$$\max_x (c, x)$$

$$\min_y (y, b)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 303. — Прим. ред.

Если некоторые из ограничений в задаче I представляют собой равенства, то в задаче II соответствующие компоненты вектора y могут изменяться вообще без ограничений (в частности, они могут быть и отрицательными). Наоборот, если в задаче I некоторая часть переменных x_i не подчинена ограничениям положительности, то соответствующие ограничения векторного неравенства $yA \geq c$ суть равенства.

Если некоторая задача линейного программирования имеет экономический смысл, то и двойственная к ней задача обычно допускает некоторую экономическую интерпретацию. В модели анализа производственных процессов, например двойственным переменным y_i , обычно придается характер цен; y принято называть вектором „условных оценок“, причем „условная оценка“ может мыслиться как фиктивная цена, которая приписывалась бы продукту, если бы экономика строилась на основе полной конкуренции (см. гл. 8). Чтобы проиллюстрировать высказанную концепцию, мы должны ненадолго вернуться к модели анализа производственных процессов и к транспортной задаче, рассмотренным в предыдущем пункте.

Модель анализа технологических процессов. Пусть y — вектор внутренних условных оценок, которые общество должно приписать своим ресурсам, чтобы отразить их общественную стоимость. С точки зрения экономики в целом, к общественным ресурсам следовало бы относить (кроме сырья и труда) также аппарат управления, церковь и т. д. Пусть, как и раньше, c_j — выраженная в долларах цена продукции, полученной при применении j -го способа с единичной интенсивностью. Тогда если y_i есть внутренняя оценка единицы i -го ресурса, то

$$\sum_i y_i a_{ij}$$

представляет собой общую стоимость в долларах (согласно этим оценкам) продукции, затрачиваемой при использовании j -го процесса с единичной интенсивностью.

Следовательно, ограничения $yA \geq c$ показывают, что внутренние оценки не могут быть назначены так, чтобы выгода от производства превзошла затраты на него. Другими словами, в условиях равновесия законы экономики не позволяют получать прибыль. Природа этого допущения и его следствия будут подробно исследованы в гл. 8, где вопрос о конкурентном равновесии будет рассмотрен с общей точки зрения.

В двойственной задаче при условиях $yA \geq c$ и $y \geq 0$ мы стремимся минимизировать общую стоимость затрачиваемых ресурсов $\sum_i b_i y_i$. Как и раньше, через b_i обозначен запас i -го ресурса.

Транспортная задача. В задаче, двойственной к транспортной, ограничения имеют вид

$$\begin{aligned} c_{ij} &\geq v_j - u_i, \\ u_i &\geq 0 & (i = 1, \dots, m), \\ v_j &\geq 0 & (j = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Здесь u_i может быть интерпретировано как условная оценка (в долларах или в ином выражении) единицы продукта, посылаемого из i -го пункта производства, а v_j — как условная оценка единицы продукта, доставленного в j -й пункт потребления. Смысл уравнений (5.2.1) состоит в том, что в условиях равновесия общественная стоимость единицы продукта, доставленного в j -й пункт потребления, составляется из стоимости перевозки c_{ij} и условной оценки единицы продукта, приготовленного к перевозке в i -м пункте производства. Далее мы увидим, что если в оптимальном плане запланирована перевозка из i -го пункта производства в j -й пункт потребления, то для соответствующей пары индексов в неравенствах (5.2.1) имеют место равенства.

Задача, двойственная к транспортной, формулируется следующим образом. При ограничениях (5.2.1) требуется найти значения переменных u_i и v_j , минимизирующие функционал

$$\sum_{i=1}^m u_i s_i - \sum_{j=1}^n v_j r_j,$$

где s_i — объем производства i -го пункта производства и r_j — объем потребления j -го пункта потребления.

В следующих пунктах будут выявлены дальнейшие связи между двойственными задачами линейного программирования (см. также задачу 18, в которой условным оценкам придается иной смысл).

5.3. Основные теоремы линейного программирования (предварительные результаты). Настоящий пункт и два следующих за ним посвящены доказательству двух фундаментальных теорем линейного программирования. В этом пункте мы получим несколько предварительных результатов, касающихся выпуклых множеств, и применим их к задачам линейного программирования. В п. 5.4 мы выведем условия, при которых решение задачи существует, а также связь между решениями задач I и II. В п. 5.5 будет выяснена связь между линейным программированием и теорией игр.

В процессе поисков решения задачи максимизации при ограничениях обычно используют соответствующую форму Лагранжа. Однако когда вместо уравнений связи, как это обычно бывает в вариационных задачах, мы имеем дело с неравенствами, исследование соответствующей формы Лагранжа весьма затруднительно. К счастью,

теория выпуклых множеств оказалась именно тем аппаратом, который позволяет преодолеть трудности, вызванные ограничениями типа линейных неравенств. Вместе с тем следующая лемма играет существенную роль при изучении формы Лагранжа для задачи I. Пользуясь обозначениями п. 5.2, мы можем определить форму Лагранжа¹⁾ для этой задачи следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad (5.3.1)$$

при $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \geq \mathbf{0}$.

Задача II будет приведена к виду задачи I, если знаки всех параметров изменить на противоположные, т. е. если $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ заменить соответственно на $-\mathbf{A}$, $-\mathbf{b}$ и $-\mathbf{c}$.

Следовательно, форма Лагранжа, соответствующая задаче II, имеет, согласно (5.3.1), вид

$$\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -(\mathbf{y}, \mathbf{b}) + (\mathbf{y}\mathbf{A} - \mathbf{c}, \mathbf{x}), \quad (5.3.2)$$

где $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, причем, очевидно,

$$\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Пара векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ называется седловой точкой для $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, если

$$\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0} \quad (5.3.3)$$

и

$$\varphi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}}) \leq \varphi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \leq \varphi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ и } \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \quad (5.3.4)$$

Следует отметить, что это определение седловой точки вполне соответствует аналогичному понятию теории игр (см. п. 1.4). Связь между решением задачи I и седловыми точками функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будет выяснена ниже, в теореме (5.3.1). Следующая лемма играет важную роль в доказательствах теорем 5.3.1 и 5.4.1.

► Лемма 5.3.1. Пусть S — замкнутый выпуклый многогранник в $(m+n)$ -мерном векторном пространстве ($m \geq 1$), удовлетворяющий следующим двум условиям:

$$(a) \text{ если } \mathbf{z} = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in S$$

и $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$), то $\mathbf{y} \leq \mathbf{0}$, т. е. если $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, то не все его компоненты y_j ($1 \leq j \leq m$) положительны;

(б) многогранник S содержит хотя бы одну точку

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{y}^0 \end{pmatrix},$$

для которой $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y}^0 \geq \mathbf{0}$ [из условия (а) следует, что в этом случае $\mathbf{y}^0$ есть тождественный нуль].

¹⁾ Переменные задачи II играют здесь в известном смысле роль лагранжевых „лямбд“. — Прим. ред.

Тогда существуют n -мерный вектор u^0 и m -мерный вектор v^0 , удовлетворяющие условиям

$$(1) u^0 \geq 0, \quad v^0 > 0;$$

$$(2) (u^0, x) + (v^0, y) \leq 0 \quad \text{для всех} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ из } S.$$

Замечание. Смысл этой леммы помогает понять следующая геометрическая интерпретация. Если многогранник S имеет точки, лежащие на грани $y=0$, и не содержит других точек положительного ортанта, то он может быть отделен гиперплоскостью от внутренней части положительного ортанта и строго отделен от грани $x=0$. Эта лемма может быть получена как непосредственное следствие теоремы 3.1.1. Однако для того, чтобы сделать содержание этого пункта независимым, мы приведем еще одно доказательство, которое к тому же облегчит понимание теории двойственности выпуклых конусов¹⁾ (см. пункт Б. 3 приложений).

Доказательство. Сначала расширим многогранник S следующим образом. Положим

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ для некоторого } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S \right\}.$$

(Неравенство в определении T должно выполняться покомпонентно.) Легко показать, что T — замкнутый, выпуклый многогранник, содержащий в силу условия (б) отрицательный ортант.

Через T^* обозначим многогранный конус, двойственный к T . В явном виде множество T^* задается как

$$T^* = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid (\alpha, \xi) + (\beta, \eta) \leq 0 \text{ для } \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in T \right\}.$$

Иначе T^* можно охарактеризовать так:

$$T^* = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha \geq 0, \beta \geq 0, (\alpha, x) + (\beta, y) \leq 0 \text{ для всех } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in S \right\}.$$

Здесь ограничения $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ необходимы, так как конус T содержит отрицательный ортант. Вторая формулировка определения T^* основана на определении T и на том факте, что α и β обязаны быть неотрицательными векторами.

Для доказательства леммы достаточно установить, что для каждой фиксированной j -компоненты ($1 \leq j \leq m$) конус T^* имеет непустое пересечение с множеством

$$H_j = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mid u \geq 0, v \geq 0, v_j > 0 \right\}.$$

Действительно, в этом случае может быть составлена надлежащая выпуклая комбинация векторов из H_j , которая удовлетворяет усло-

¹⁾ Синонимы: сопряженные конусы, полярные конусы. — Прим. ред.

виям (1) и (2). Для доказательства того, что T^* пересекается с H_j , предположим обратное, т. е. что $T^* \subset K_{j_0}$, где

$$K_{j_0} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \middle| u \geq 0, v \geq 0, v_{j_0} = 0 \right\}.$$

Из теории двойственности выпуклых конусов известно, что

$$T^{**} \supset K_{j_0}^* = \left\{ \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \middle| \xi \leq 0, \eta_1 \leq 0, \dots, \eta_{j_0-1} \leq 0, \right. \\ \left. \eta_{j_0+1} \leq 0, \dots, \eta_m \leq 0, \text{ а } \eta_{j_0} \text{ произвольно} \right\}, \quad (5.3.5)$$

где

$$T^{**} \text{ — конус с вершиной в начале координат, натянутый на } T, \quad (5.3.6)$$

так как T — замкнутый выпуклый многогранник, содержащий отрицательный ортант. Рассмотрим вектор $c = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \end{pmatrix}$, у которого n первых компонент нули, а из остальных компонент отлична от нуля лишь одна j_0 -я компонента, которая равна $\delta > 0$. Очевидно, c принадлежит $K_{j_0}^*$. В силу определений T и T^* существуют такие вектор $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \in S$ и число $\lambda \geq 0$, что

$$\begin{aligned} \lambda x_i^* &\geq 0 & (i = 1, \dots, n), \\ \lambda y_i^* &\geq 0 & (i = 1, \dots, j_0 - 1, j_0 + 1, \dots, m), \\ \lambda y_{j_0}^* &\geq \delta > 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство может иметь место только при $\lambda > 0$; следовательно, $x^* \geq 0$ и $y^* \geq 0$, что противоречит условиям леммы. Лемма доказана.

► Теорема 5.3.1. Для того чтобы вектор $\bar{x}$ был решением задачи I линейного программирования, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой вектор $\bar{y}$, чтобы точка $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ была седловой точкой формы Лагранжа $\varphi(x, y)$.

► Доказательство. Докажем сначала, что если $\bar{x}$ — решение задачи I, то существует такой вектор $\bar{y}$, что $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ — седловая точка функционала $\varphi(x, y)$. Рассмотрим в $(m+1)$ -мерном векторном пространстве множество

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} b - Ax \\ (c, x - \bar{x}) \end{pmatrix} \middle| x \geq 0 \right\}.$$

Элементами множества S являются, таким образом, $m + 1$ -мерные векторы, у которых первые m компонент совпадают с компонентами образа $\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$ некоторого неотрицательного вектора $\mathbf{x}$, а последняя компонента — вещественное число $(\mathbf{c}, \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$, вычисленное для того же вектора $\mathbf{x}$. Очевидно, S есть выпуклый многогранник, а из неравенств $\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ и $\mathbf{x} \geq 0$ следует неравенство $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) - (\mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}}) \leq 0$, так как $\bar{\mathbf{x}}$ — решение задачи I.

Далее, подставляя $\bar{\mathbf{x}}$ вместо $\mathbf{x}$ в соотношение, определяющее вектор из S , мы получаем неотрицательный вектор из S . Таким образом, все условия леммы 5.3.1 выполнены, а поэтому существует m -мерный вектор $\bar{\mathbf{y}}$, удовлетворяющий условиям

$$\bar{\mathbf{y}} \geq 0 \quad (5.3.7)$$

и

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}) - (\mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{для всех } \mathbf{x} \geq 0. \quad (5.3.8)$$

Полагая в (5.3.8) $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$ и вспоминая, что

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{b}, \quad (5.3.9)$$

мы получаем

$$(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) = 0 \quad \text{и} \quad (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) \geq 0 \quad \text{для } \bar{\mathbf{y}} \geq 0. \quad (5.3.10)$$

Выражения (5.3.7) — (5.3.10) показывают, что $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}\}$ — седловая точка функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Покажем теперь, что если $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}\}$ — седловая точка функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, то $\bar{\mathbf{x}}$ есть решение задачи I. Из неравенств (5.3.4) легко получить следующее:

$$(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) \leq (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \geq 0. \quad (5.3.11)$$

Поскольку любую из компонент $\mathbf{y}$ можно выбрать сколь угодно большой, последние неравенства могут выполняться только в случае

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} \geq 0, \quad \bar{\mathbf{x}} \geq 0. \quad (5.3.12)$$

Следовательно, $(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) \geq 0$. С другой стороны, если в (5.3.11) положить $\mathbf{y} = 0$, то получится

$$(\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) = 0. \quad (5.3.13)$$

Из неравенств (5.3.4) следует

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}) + (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \leq (\mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \geq 0 \quad (5.3.14)$$

или, учитывая (5.3.13),

$$(\mathbf{c}, \mathbf{x}) + (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}) \leq (\mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}}) \quad \text{для всех } \mathbf{x} \geq 0. \quad (5.3.15)$$

Поэтому для всех $x \geq 0$, таких, что $b - Ax \geq 0$, мы получаем

$$(c, x) \leq (c, \bar{x}),$$

т. е. вектор $\bar{x}$ есть решение задачи I.

5.4. Основные теоремы линейного программирования (продолжение). С помощью теоремы 5.3.1 мы можем теперь доказать при весьма общих условиях основную теорему о существовании решений задач I и II. Сначала рассмотрим следующую теорему двойственности, которая описывает связи между решениями задач I и II.

► **Теорема 5.4.1.** (Теорема двойственности.) *Если задача I имеет решение x , то задача II имеет решение $\bar{y}$, причем*

$$(c, \bar{x}) = (\bar{y}, b). \quad (5.4.1)$$

Доказательство. Если $\bar{x}$ — решение задачи I, то по теореме 5.3.1 существует такой вектор $\bar{y}$, что $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ есть седловая точка формы Лагранжа $\varphi(x, y)$, где

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (c, x) + (y, b - Ax) = \\ &= -[(y, -b) - (yA - c, x)] = -\psi(y, x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\psi(y, \bar{x}) \leq \psi(\bar{y}, \bar{x}) \leq \psi(\bar{y}, x), \quad (5.4.2)$$

и, следовательно, $\{\bar{y}, \bar{x}\}$ есть седловая точка функционала $\psi(y, x) = (y, -b) + (yA - c, x)$. Поскольку этот функционал представляет собой форму Лагранжа для задачи II, $\bar{y}$ опять-таки по теореме 5.3.1 является решением задачи II.

Так как

$$(\bar{y}, b - A\bar{x}) = 0 \text{ и } (\bar{y}A - c, \bar{x}) = 0 \quad (5.4.3)$$

(см. 5.3.10), мы имеем

$$(\bar{y}, b) = (\bar{y}, A\bar{x}) = (\bar{y}A, \bar{x}) = (c, \bar{x}).$$

► **Теорема 5.4.2.** (Теорема существования.) *Если задача I и задача II имеют хотя бы по одному допустимому вектору, то обе эти задачи имеют решения. Для любой пары решений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ справедливо равенство $(c, \bar{x}) = (\bar{y}, b)$.*

Доказательство. Пусть y^0 — допустимый вектор задачи II, т. е. $y^0 \geq 0$ и $y^0A \geq c$. Так как множество допустимых векторов задачи I непусто, возьмем какой-либо допустимый вектор x . Тогда

$$(c, x) \leq (y^0A, x) \leq (y^0, b).$$

Поэтому множество

$$F = \{(c, x) | x \text{ есть допустимый вектор задачи I}\}$$

ограничено сверху, а так как множество допустимых векторов представляет собой замкнутый выпуклый многогранник, функция (c, x) достигает на нем своего максимума.

Остальные утверждения этой теоремы следуют из теоремы 5.4.1.

► Следствие 5.4.1. Если x^* и y^* — допустимые векторы соответственно задач I и II, а $(c, x^*) = (y^*, b)$, то векторы x^* , y^* образуют пару решений, и обратно.

Доказательство. Из соотношения (5.4.4) следует, что если x и y — соответственно допустимые векторы для задачи I и II, то

$$(c, x) \leq (y, b). \quad (5.4.5)$$

В частности, для x и y^* мы имеем

$$(c, x) \leq (y^*, b) = (c, x^*),$$

и поэтому x^* есть решение задачи I.

Аналогично устанавливается, что y^* есть решение задачи II. Обратное предложение содержится в утверждении теоремы 5.4.1.

Доказанное следствие снабдило нас простым вычислительным критерием для проверки: является ли данная пара допустимых векторов парой решений. Кроме того, благодаря неравенству (5.4.5) допустимые векторы могут использоваться для получения оценок и границ в задачах I и II. Эти приложения исследуются в гл. 6, где будут разработаны методы решения задач линейного программирования.

Свойство решений $\{\bar{x}, \bar{y}\}$, которое выражено формулами (5.4.3), мы, ввиду его экономической важности, сформулируем как теорему.

► Теорема 5.4.3. Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — соответственно решения задач I и II, то

$$(a) (\bar{A}\bar{x})_j < b_j \quad \text{влечет} \quad \bar{y}_j = 0,$$

$$(b) (\bar{y}A)_i > c_i \quad \text{влечет} \quad \bar{x}_i = 0.$$

Эти характеристики решений играют существенную роль во всех вычислительных алгоритмах, но их основное значение выявляется при их экономической интерпретации.

Рассмотрим, например, модель анализа производственных процессов и двойственную к ней задачу, сформулированные в п. 5.1 и 5.2. В этом случае пункт (a) теоремы означает, что если $\bar{x}$ представляет

оптимальный план, при применении которого j -й ресурс используется не полностью, то этот ресурс имеется в избытке и не имеет денежной оценки на рынке при конкурентном равновесии. Пункт (б) утверждает, что если цена продукции, полученной при применении i -го способа, меньше производственных затрат на него, то этот способ не применяется (иными словами, его интенсивность равна нулю). Оба условия имеют экономический смысл. Второе из них фактически означает, что способ, который ведет к денежным потерям, не должен применяться. Первое же может рассматриваться как следствие закона предложения и спроса.

5.5*. Связь между задачами линейного программирования и теорией игр. В двух предыдущих пунктах мы установили существование решений задач I и II и выяснили связь между этими решениями. При этом мы ввели в рассмотрение понятие седловой точки, т. е. задачу игрового типа (форму Лагранжа).

Теперь мы установим связь между решениями задач I и II и решением матричной игры:

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} n & m & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} n \\ m \\ 1 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -A^T & c \\ A & 0 & -b \\ -c & b & 0 \end{array} \right\| \end{matrix}.$$

Числа m , n и 1, стоящие рядом с матрицей, обозначают число строк и столбцов соответствующих подматриц матрицы B . Матрица косо-симметрична; следовательно, значение игры равно нулю. Кроме того, множества стратегий обоих игроков одинаковы (см. п. 2.5). Произвольную пару стратегий игроков будем обозначать через $(x, y, \lambda) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \lambda)$.

► **Теорема 5.5.1.** *Если симметричная игра B имеет решения для любого $\lambda > 0$, то обе задачи линейного программирования имеют решения, и обратно.*

Доказательство. Пусть $z = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, \lambda)$ есть оптимальная стратегия в игре с матрицей B при $\lambda > 0$. Так как значение игры равно нулю, то $Bz \leq 0$ или

$$-yA + c\lambda \leq 0, \quad Ax - b\lambda \leq 0, \quad -(c, x) + (b, y) \leq 0.$$

Так как $\lambda > 0$, из леммы 2.1.2 следует, что в последнем неравенстве имеет место знак равенства. Поэтому

$$\frac{y}{\lambda} A \geq c, \quad A \frac{x}{\lambda} \leq b, \quad \left(c, \frac{x}{\lambda}\right) = \left(b, \frac{y}{\lambda}\right). \quad (5.5.1)$$

Пусть $y' = y/\lambda$ и $x' = x/\lambda$. Эти векторы допустимы в силу (5.5.1). Далее, для каждого допустимого вектора x из X (множества всех допустимых векторов) мы имеем

$$(c, x) \leq (y'A, x) = (y', Ax) \leq (y', b) = (c, x').$$

Следовательно,

$$\max_{x \in X} (c, x) = (c, x')$$

и аналогично

$$\min_{y \in Y} (y, b) = (y', b).$$

Отсюда следует, что x' и y' являются соответственно решениями задачи I и II.

Обратно, пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ — соответственно решения задач I и II линейного программирования. Положим

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{1 + \sum x_i + \sum y_i}, \\ \bar{x}_i &= \lambda x_i, \\ \bar{y}_i &= \lambda y_i, \\ z &= (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m, \lambda) = (\bar{x}, \bar{y}, \lambda). \end{aligned}$$

Ясно, что $\sum \bar{z}_i = 1$. Убедимся в том, что $\bar{z}$ есть решение симметричной игры B ; по теореме 5.4.1

$$\begin{aligned} yA \geq c &\rightarrow \lambda yA \geq \lambda c \rightarrow -\bar{y}A + \lambda c \leq 0, \\ Ax \leq b &\rightarrow \lambda Ax \leq \lambda b \rightarrow A\bar{x} - \lambda b \leq 0 \end{aligned}$$

и

$$(c, x) = (y, b).$$

Отсюда видно, что $B\bar{z} \leq 0$; следовательно, $\bar{z}$ есть решение игры.

Теорема 5.5.1 дает возможность применять полезные результаты теории игр к линейному программированию, и наоборот.

5.6*. Обобщения теоремы двойственности. Обобщение задач I и II можно сформулировать следующим образом: пусть A, B, C — некоторые матрицы соответственно порядков $r \times n$, $r \times m$ и $s \times n$, и пусть D — произвольная матрица. Пусть, далее, векторы x, y, u и v принадлежат соответственно пространствам E^n, E^m, E^r и E^s .

Задача А. Среди всех матриц D , удовлетворяющих условию $Du \leq Cx$, где $Ax \leq By$ для некоторых $x \geq 0$ и $y > 0$, найти максимальную матрицу.

Матрица D называется *максимальной*, если среди всех матриц, удовлетворяющих указанным выше условиям, не существует такой

матрицы D' , что для некоторых $x \geq 0$ и $y > 0$ $D' \geq D$, т. е. каждый элемент D' не меньше соответствующего элемента D и хотя бы один из элементов больше.

Задача Б. Найти минимальную матрицу D , удовлетворяющую условиям $vD \geq uB$, причём $uA \geq vC$ для некоторых $v > 0$ и $u \geq 0$.

Замечание. Если $A — m \times n$ -матрица, $B — m \times 1$ -матрица, $C — 1 \times n$ -матрица и $D — 1 \times 1$ -матрица (т. е. D — вещественное число), то задача А превращается в задачу I.

Сформулируем обобщения теорем 5.4.1 и 5.4.2.

► **Теорема 5.6.1.** Если задача А имеет решение D , то и задача Б имеет решение D . Обратно, если задача Б имеет решение Δ , то и задача А имеет решение Δ .

► **Теорема 5.6.2.** Если существуют такие векторы $x_0 \geq 0$, $y_0 > 0$, $u_0 \leq 0$ и $v_0 > 0$, что $Ax_0 \leq By_0$ и $u_0A \geq v_0C$, то множества решений задачи А и задачи Б совпадают.

Доказательство теоремы 5.6.1. Пусть D — решение задачи А. Рассмотрим в $r + s$ -мерном пространстве множество S :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} By - Ax \\ Cx - Dy \end{pmatrix} \middle| x \geq 0, y \geq \varepsilon \right\},$$

где ε — вектор соответствующей размерности, все компоненты которого равны ε ($\varepsilon > 0$ — фиксированное число). Множество S представляет собой такой замкнутый выпуклый многогранник, что из

$$By - Ax \geq 0, x \geq 0, y \geq \varepsilon \text{ следует } Cx - Dy \leq 0. \quad (5.6.1)$$

Если бы было $Cx \geq Dy$, причем хотя бы для одной компоненты имело место строгое неравенство, то один из элементов матрицы D можно было бы, не нарушая неравенства $Cx \geq Dy$, увеличить. Это, однако, противоречило бы предположению о том, что D — максимальная матрица задачи А.

Так как D — максимальная матрица задачи А, векторы $x^0 \geq 0$ и $y^0 > 0$ таковы, что

$$Dy^0 = Cx^0 \quad (5.6.2)$$

и

$$Ax^0 = By^0. \quad (5.6.3)$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $y^0 \geq \varepsilon$, следовательно, векторы x^0 и y^0 удовлетворяют условиям, определяющим множество S . Легко видеть, что при таком выборе ε множество S содержит вектор,

у которого хотя бы одна компонента неотрицательна. Таким образом, множество S удовлетворяет условиям (а) и (б) леммы 5.3.1.

По лемме 5.3.1 существуют такие векторы $u^0 \geq 0$, $v^0 > 0$, что $(u^0, By - Ax) + (v^0, Cx - Dy) \leq 0$ для всех $x \geq 0$, $y > \varepsilon$. (5.6.4)

Это утверждение можно переписать как

$$(u^0 B - v^0 D, y) + (v^0 C - u^0 A, x) \leq 0 \text{ для всех } x \geq 0, y > \varepsilon. \quad (5.6.5)$$

Полагая в (5.6.5) $x = 0$, мы получаем для всех $y > \varepsilon$

$$(u^0 B - v^0 D, y) \leq 0.$$

Следовательно,

$$u^0 B \leq v^0 D. \quad (5.6.6)$$

Поскольку неравенство (5.6.5) справедливо для любых $x \geq 0$, $y > \varepsilon$, мы имеем

$$v^0 C \leq u^0 A. \quad (5.6.7)$$

Формулы (5.6.6) и (5.6.7) показывают, что D является допустимой матрицей для задачи Б.

Докажем теперь, что D — минимальная матрица задачи Б. Допустим, что D не минимальна; тогда найдется такая матрица Δ , что

$$\Delta \leq D, \quad (5.6.8)$$

$$v\Delta \geq uB, \quad (5.6.9)$$

$$uA \geq vC \quad (5.6.10)$$

для некоторых $u \geq 0$ и $v > 0$.

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} (v, Dy^0) &> (v, \Delta y^0) \geq (u, By^0) \text{ в силу (5.6.8) и (5.6.9),} \\ &\geq (u, Ax^0) \text{ в силу (5.6.3),} \\ &\geq (v, Cx^0) \text{ в силу (5.6.10),} \\ &\geq (v, Dy^0) \text{ в силу (5.6.2),} \end{aligned}$$

а это невозможно. Следовательно, D — минимальная матрица задачи Б. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

Доказательство теоремы 5.6.2. Пусть $By_0 = b$ и $v_0 C = c$. Рассмотрим симметричную игру с матрицей

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & -A^T & +c \\ A & 0 & -b \\ -c & +b & 0 \end{array} \right\|.$$

Пусть (x, u, λ) — оптимальная стратегия игрока I. Тогда $(c, x) = (b, u) \geq 0$. Если $\lambda = 0$, то $uA \geq 0$ и $Ax \leq 0$, откуда

$$0 \leq (uA, x_0) = (u, Ax_0) \leq (u, By_0) = (u, b).$$

Точно так же из неравенства $Ax \leq 0$ следует, что $(c, x) \leq 0$. С другой стороны, если $\lambda > 0$, то по лемме 2.1.2 $(c, x) - (b, u) = 0$. Таким образом, в любом случае мы имеем $(c, x) - (b, u) = 0$.

Согласно теореме 3.1.1, должна существовать оптимальная стратегия с $\lambda > 0$. Для любой такой стратегии (x, u) должно быть $(c, x) = (b, u)$, $uA \geq \lambda c$ и $\lambda b \geq Ax$. Векторы u и x могут быть нулевыми. Пусть $\bar{u} = u/\lambda$ и $\bar{x} = x/\lambda$. Тогда $\bar{u}A \geq c = v_0 C$; $A\bar{x} \leq b = By_0$, а также $(\bar{u}, b) = (c, \bar{x})$ или $(\bar{u}, By_0) = (v_0 C, \bar{x})$, что равносильно равенству $(\bar{u}B, y_0) = (v_0, C\bar{x})$. Если $(\bar{u}B, y_0) \neq 0$, то положим

$$Dy = \frac{(\bar{u}B, y) C\bar{x}}{(\bar{u}B, y_0)},$$

а в противном случае —

$$Dy = \frac{(\bar{u}B, y) 1}{(v_0, 1)} + \frac{(1, y) C\bar{x}}{(1, y_0)},$$

где $1 = (1, 1, \dots, 1)$. Легко видеть, что $Dy_0 = C\bar{x}$ и $v_0 D = \bar{u}B$, а также, что справедливы неравенства $A\bar{x} \leq By_0$ и $\bar{u}A \geq v_0 C$. Таким образом, построенная матрица D удовлетворяет условиям задач А и Б. Нам осталось показать, что D есть решение этих задач. Предположим, что матрица $\Delta > D$ обладает свойством $Ax' \leq By'$ и $Cx' \geq \Delta y'$, где $y' > 0$ и $x' \geq 0$. Тогда $Cx' \geq \Delta y' \geq Dy'$, причем хотя бы для одной компоненты имеет место строгое неравенство. Из свойств вектора $\{\bar{u}, v_0\}$ следует, что

$$\left\| \begin{matrix} \xi \\ \eta \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -A' & C' \\ B' & -D' \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \bar{u} \\ v_0 \end{matrix} \right\| \leq 0. \quad (5.6.11)$$

Значит, скалярное произведение неотрицательного вектора $\{x', y'\}$ и вектора $\{\xi, \eta\}$ неположительно. Однако

$$\left\| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -A & B \\ C & -D \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| \geq 0, \quad (5.6.12)$$

причем неравенство имеет место для какой-нибудь из компонент, отвечающих β . Таким образом, поскольку $v_0 > 0$, скалярное произведение векторов $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ и $\{\bar{u}, v_0\}$ строго положительно. Но оба этих скалярных произведения представляют собой одно и то же выражение. Мы получили противоречие, и теорема доказана.

5.7. Задача о рациональном использовании склада. Пункты 5.7—5.12 посвящены аналитическому исследованию конкретных моделей, приводящих к задачам линейного программирования.

В этом пункте мы рассмотрим сформулированную в п. 5.1 задачу о рациональном использовании склада. Склад вместимости C используется для хранения некоторого товара. Начальное количество имеющегося в наличии товара обозначим через A . Требуется определить, сколько товара следует покупать и продавать в течение каждого из n периодов времени, чтобы получить максимальную прибыль. Считается, что покупка производится в конце каждого периода. Обозначим через x_i количество товара, купленного в конце i -го периода, через c_i — цену единицы товара в конце i -го периода, через y_i — количество товара, проданного за i -й период, а через b_i — его продажную цену. Мы хотим максимизировать форму

$$\pi = \sum_{i=1}^n [b_i y_i - c_i x_i].$$

Условия задачи приводят к ограничениям двух типов: (1) невозможно покупать больше, чем может вместить склад, и (2) невозможно продать больше товара, чем имеется в наличии. Математически эти условия записываются как

$$A + \sum_{j=1}^i (x_j - y_j) \leq C \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.7.1)$$

и

$$y_{i+1} \leq A + \sum_{j=1}^i (x_j - y_j) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (5.7.2)$$

Кроме того, имеются обычные ограничения: $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Мы начнем с решения двойственной задачи, после чего решение исходной задачи получится немедленно. Двойственная задача состоит в минимизации формы

$$(C - A) \sum_{i=1}^n t_i + A \sum_{i=1}^n u_i,$$

где $t_i \geq 0$, $u_i \geq 0$, при ограничениях

$$\begin{aligned} T_k - U_{k+1} &\geq -c_k & (k = 1, 2, \dots, n), \\ -T_k + U_k &\geq b_k & (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

где мы положили

$$T_k = \sum_{i=k}^n t_i, \quad U_k = \sum_{i=k}^n u_i \quad \text{и} \quad U_{n+1} = 0.$$

Условия неотрицательности t_i и u_i равносильны условиям

$$T_{k-1} \geq T_k, \quad T_n \geq 0 \quad \text{и} \quad U_{k-1} \geq U_k, \quad U_n \geq 0. \quad (5.7.3)$$

Нам нужно минимизировать при этих ограничениях форму $(C - A)T_1 + AU_1$.

Из ограничивающих соотношений (5.7.3) видно, что минимальными значениями для величин T_k и U_k будут

$$\begin{aligned} T_n^* &= \max(-c_n, 0), \\ U_n^* &= \max(b_n + T_n^*, 0), \\ T_{n-1}^* &= \max(U_n^* - c_{n-1}, T_n^*), \\ U_{n-1}^* &= \max(b_{n-1} + T_{n-1}^*, U_n^*), \\ T_{n-2}^* &= \max(U_{n-1}^* - c_{n-2}, T_{n-1}^*), \\ &\dots \end{aligned} \quad (5.7.4)$$

причем в конце концов получаются формулы для T_1^* и U_1^* . Иными словами, если при некотором k значение $U_k(T_k)$ выбрано большим, чем $U_k^*(T_k^*)$, то, как следует из ограничений, T_1 и U_1 превзойдут соответственно T_1^* и U_1^* . Следовательно, T_1^* и U_1^* дают решение двойственной задачи.

Из рекуррентных равенств (5.7.4) следует, что T_1^* и U_1^* зависят от b_i и c_i линейно. Следовательно, форма $(C - A)T_1^* + AU_1^*$ может быть переписана следующим образом:

$$(C - A)T_1^* + AU_1^* = \sum_i [b_i f_i(A, C) - c_i g_i(A, C)], \quad (5.7.5)$$

где $f_i(A, C)$ и $g_i(A, C)$ — функции, зависящие только от векторов A и C . Неотрицательность функций f_i и g_i может быть получена из их определения; действительно, все коэффициенты при b_j в формулах (5.7.4) неотрицательны, а все коэффициенты при c_j неположительны.

В дальнейшем будет показано, что векторы с компонентами $y_i^0 = f_i(A, C)$ и $x_i^0 = g_i(A, C)$ являются допустимыми. В силу следствия 5.4.1 план, соответствующий так определенной паре (x^0, y^0) , будет самым выгодным из возможных.

Остается лишь проверить допустимость векторов x^0, y^0 . Из рекуррентных формул (5.7.4) видно, что возможен один из следующих двух случаев.

Случай А.

$$\begin{aligned} U_1^* &= b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + \dots + b_i + T_{i+1}^*, \\ T_1^* &= -c_1 + b_2 - c_2 + \dots + b_i + T_{i+1}^* \end{aligned} \quad (5.7.6)$$

для некоторого $1 < i \leq n$, или

$$\begin{aligned} U_1^* &= b_1 + T_2^*, \\ T_1^* &= T_2^*. \end{aligned} \quad (5.7.6a)$$

Случай Б.

$$\begin{aligned} U_1^* &= b_1 - c_1 + b_2 - c_2 + \dots - c_j + U_{j+2}^*, \\ T_1^* &= -c_1 + b_2 - c_2 + \dots + c_j + U_{j+2}^* \end{aligned} \quad (5.7.7)$$

для некоторого $j (1 < j \leq n-1)$ (если $j = n-1$, то полагаем $U_{j+2}^* = 0$), или

$$\begin{aligned} U_1^* &= U_2^*, \\ T_1^* &= -c_1 + U_2^*. \end{aligned} \quad (5.7.7a)$$

Мы имеем

$$T_{i+1}^* = -c_{i+k_1} + b_{i+k_2} - c_{i+k_3} + \dots,$$

где $1 < k_1 < k_2 < \dots$ (если $i + k_1 > n$, то $T_{i+1}^* = 0$). Аналогично

$$U_{j+2}^* = +b_{j+2+l_1} - c_{j+2+l_2} + \dots,$$

где $0 < l_1 < l_2 < \dots$ (если $j + 2 + l_1 > n-1$, то $U_{j+2}^* = 0$).

Так как вид U_1^* и T_1^* известен [см. (5.7.6) и (5.7.7)], нетрудно непосредственно проверить соблюдение условий (5.7.1) и (5.7.2).

5.8. Задача об оптимальном назначении. Пусть имеется m работ, которые должны быть распределены между m рабочими, причем на каждую работу назначается по одному рабочему. Будем считать, что l -й рабочий на j -й работе создает продукт ценности a_{lj} ($a_{lj} > 0$). Задача состоит в отыскании такого распределения m работ между m рабочими, которое дает максимальный общий доход. Каждое распределение работ по рабочим записывается как перестановка

$$S = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & m \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_m \end{pmatrix},$$

где работа 1 поручена j_1 -му рабочему, работа 2 — j_2 -му рабочему и т. д. Таким образом, задача заключается в том, чтобы среди всех $m!$ возможных перестановок чисел $1, 2, \dots, m$, каждая из которых представляет m -мерный вектор $(j_1, j_2, \dots, j_m)$, выбрать такую, которая максимизирует выражение

$$\sum_{i=1}^m a_{ij_i}.$$

Эту же задачу можно сформулировать, пользуясь понятием перестановочной матрицы. Перестановочной называется такая $m \times m$ -матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой один элемент равен 1, а все остальные — нули. Если через $\mathcal{P}$ обозначить

множество всех перестановочных $m \times m$ -матриц, то наша задача сводится к отысканию такой матрицы P^0 , что

$$\max_P \sum_{i,j} a_{ij} p_{ij} = \sum_{i,j} a_{ij} p_{ij}^0.$$

Фон Нейман сводит задачу об оптимальном назначении к решению некоторой $2m \times m^2$ -игры¹⁾, потому что в большинстве случаев игру решить легче, чем отыскивать максимум на множестве всех перестановочных матриц. Прежде чем доказывать эквивалентность задачи об оптимальном назначении и игровой задачи, мы рассмотрим первую как задачу линейного программирования.

(1) Рассмотрим множество $\mathcal{X}$ всех дважды стохастических $m \times m$ -матриц. Напомним, что матрица $\|x_{ij}\| \in \mathcal{X}$ называется *дважды стохастической*, если $\sum_i x_{ij} = 1$ для всех j , $\sum_j x_{ij} = 1$ для всех i и $x_{ij} \geq 0$ для всех i и j . Ясно, что множество $\mathcal{X}$ представляет собой выпуклый многогранник, поскольку оно образуется пересечением $2m$ гиперплоскостей и положительного ортанта m^2 -мерного пространства.

► Лемма 5.8.1. *Матрицы класса $\mathcal{X}$ образуют выпуклое множество, причем перестановочные матрицы являются его крайними точками.*

Доказательство. Выпуклость множества $\mathcal{X}$ уже была отмечена выше. Пусть $X = \|x_{ij}\|$ — одна из крайних точек этого множества.

(а) Матрица X имеет не более $2m - 1$ строго положительных элементов.

Для того чтобы доказать это утверждение, рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m z_{ij} &= 0 & (i = 1, 2, \dots, m), \\ \sum_{i=1}^m z_{ij} &= 0 & (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \tag{5.8.1}$$

Эта система содержит $2m$ уравнений с m^2 неизвестными, но линейно независимых уравнений здесь не более чем $2m - 1$, так как

$$\sum_i \left(\sum_j z_{ij} \right) - \sum_j \left(\sum_i z_{ij} \right) = 0.$$

¹⁾ См. Дж. фон Нейман, Об одной нулевой игре двух лиц, эквивалентной задаче оптимального назначения, сборник [2]. — Прим. ред.

Матрица A системы (5.8.1) имеет вид

$$A = \left(\begin{array}{cccccccc} \overbrace{11 \dots 1}^m & & & & & & & \\ & 11 \dots 1 & & & & & & \\ & & 11 \dots 1 & & & & & \\ & & & 11 \dots 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 11 \dots 1 & \\ 1 & & 1 & & 1 & & \dots & 1 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \dots & & 1 \end{array} \right) \quad (5.8.2)$$

(все элементы, кроме обозначенных единицами, — нули). Мы знаем, что матрица A имеет размеры $2m \times m^2$, а ранг ее не превосходит $2m - 1$.

Предположим, что матрица $X = \|x_{ij}\|$ имеет не менее чем $2m$ ненулевых элементов. Для тех i и j , для которых $x_{ij} = 0$, мы в уравнениях (5.8.1) примем $z_{ij} = 0$ и будем рассматривать (5.8.1) как систему уравнений относительно оставшихся переменных. Так как имеется не менее $2m$ неизвестных, а ранг матрицы A равен $2m - 1$ (см. задачу 6 к гл. 6), существует ненулевое решение системы, которое мы обозначим через z_{ij} .

Выберем ϵ настолько малым, чтобы для всех i, j выполнялись неравенства $x_{ij} + \epsilon z_{ij} \geq 0$ и $x_{ij} - \epsilon z_{ij} \geq 0$. Введем обозначения $X_1 = \|x_{ik} + \epsilon z_{ij}\|$ и $X_2 = \|x_{ij} - \epsilon z_{ij}\|$.

Легко убедиться в том, что X_1 и X_2 принадлежат классу π .

Но $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$; следовательно, X не является крайней точкой.

(б) Если X — крайняя точка, то X — перестановочная матрица, и обратно.

Это утверждение доказывается следующим образом. Согласно (а), если X — крайняя точка, то не более $2m - 1$ ее элементов отличны от нуля. Значит, в такой матрице имеется хотя бы одна строка, содержащая всего один ненулевой элемент. Этот элемент должен быть равен 1 (так как сумма всех элементов строки равна 1) и является поэтому единственным отличным от нуля элементом в своем столбце.

Однако если X — крайняя точка множества $\mathcal{X}$, то матрица, получаемая вычеркиванием строки и столбца с одним ненулевым

элементом, есть также крайняя точка множества $(m-1) \times (m-1)$ -матриц типа $\mathcal{X}$.

Повторяя предыдущее рассуждение, мы приходим к выводу, что матрица $\mathbf{X}$ может иметь лишь один ненулевой элемент в каждой строке и в каждом столбце и поэтому является перестановочной матрицей.

Обратное, т. е. что всякая перестановочная матрица является крайней точкой множества $\mathcal{X}$, очевидно, и лемма доказана.

Поскольку $\mathcal{P} \subset \mathcal{X}$, то

$$\max_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} \sum a_{ij} x_{ij} \geq \max_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \sum a_{ij} p_{ij}.$$

Но всякая матрица $\|x_{ij}\| \in \mathcal{X}$ есть выпуклая комбинация крайних точек множества $\mathcal{X}$, так что (по лемме 5.8.1)

$$\max_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}} \sum a_{ij} x_{ij} = \max_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \sum a_{ij} p_{ij}.$$

Таким образом, матрица $\mathbf{X}^0 \in \mathcal{X}$, максимизирующая $\sum a_{ij} x_{ij}$, должна быть или элементом множества $\mathcal{P}$, или выпуклой комбинацией всех элементов $\mathcal{P}$, максимизирующих $\sum a_{ij} p_{ij}$. Поэтому, зная $\mathbf{X}^0$, мы можем найти матрицу $\mathbf{P}^0 \in \mathcal{P}$, максимизирующую $\sum a_{ij} p_{ij}$. Следовательно, при отыскании максимума можно вместо $\mathcal{P}$ рассматривать множество $\mathcal{X}$.

Произведем дальнейшее расширение нашей области, включив в нее множество $\mathcal{Y}$ матриц $\|y_{ij}\|$, удовлетворяющих условиям $\sum_i y_{ij} \leq 1$ для всех j , $\sum_j y_{ij} \leq 1$ для всех i и $y_{ij} \geq 0$ для всех i, j .

Очевидно, что

$$\max_{\mathcal{Y}} \sum a_{ij} y_{ij} = \max_{\mathcal{X}} \sum a_{ij} x_{ij},$$

причем максимум достигается только на элементах из $\mathcal{X}$.

► Лемма 5.8.2. Если матрица $\|y_{ij}^0\| \in \mathcal{Y}$ максимизирует $\sum_{ij} a_{ij} y_{ij}$, то

$$\|y_{ij}^0\| \in \mathcal{X}.$$

Доказательство. Положим $\sum_j y_{ij}^0 = r_i$ и $\sum_i y_{ij}^0 = s_j$; тогда $\sum_i r_i = \sum_j s_j = K$. Если одно из чисел r_i (например, r_{i_0}) меньше 1, то одно из чисел s_j (например, s_{j_0}) также меньше 1, и обратно; при этом K меньше, чем m .

Пусть

$$t_{ij} = \frac{(1-r_i)(1-s_j)}{m-K};$$

тогда, очевидно, $t_{i_0 j_0} > 0$. Кроме того, $\sum_j t_{ij} = 1 - r_i$ и $\sum_i t_{ij} = 1 - s_j$, так что $t_{ij} + y_{ij}^0 \geq 0$ и $\sum_j (t_{ij} + y_{ij}^0) = 1 - r_i + r_i = 1$ для всех i, j . Точно так же сумма по i равна 1. Поэтому $\|t_{ij} + y_{ij}^0\| \in \mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$.

Но

$$\sum_{i,j} a_{ij}(t_{ij} + y_{ij}^0) = \sum_{i,j} a_{ij}y_{ij}^0 + c,$$

где c — положительное число, и поэтому $\|y_{ij}^0\|$ не является точкой максимума. Это противоречит предположению, следовательно, $\|y_{ij}^0\| \in \mathcal{X}$.

Теперь наша задача приобретает вид задачи линейного программирования. Выбирая надлежащим образом y из m^2 -мерного пространства, мы хотим максимизировать сумму $\sum_{i,j} a_{ij}y_{ij}$ при ограничениях $y \leq 0$ и $Ay \leq u$, A — матрица из леммы 5.8.1, а u есть $2m$ -вектор $(1, 1, \dots, 1)$. Таким образом, решение задачи линейного программирования приводит к решению задачи об оптимальном назначении. Двойственной к рассмотренной задаче будет следующая: выбрать вектор $z = (t_1, \dots, t_m, s_1, \dots, s_m)$, минимизирующий форму $\sum t_i + \sum s_j$ при ограничениях $z \geq 0$ и $zA \geq \|a_{ij}\|$.

В записи по компонентам ограничения имеют следующий вид: $t_i + s_j \geq a_{ij}$, $t_i \geq 0$, $s_j \geq 0$ для всех i, j .

(2) Фон Нейман сводил задачу оптимального назначения к антагонистической игре, определяемой $2m \times m^2$ -матрицей:

$$B = \left\{ \begin{array}{c} m \\ \left\| \begin{array}{cccc} \overbrace{1/a_{11} \dots 1/a_{1m}}^m & & & \\ & 1/a_{21} \dots 1/a_{2m} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/a_{m1} \dots 1/a_{mm} \\ 1/a_{11} & & & \\ & 1/a_{21} & & \dots 1/a_{m1} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1/a_{1m} & \dots 1/a_{2m} \dots 1/a_{mm} \end{array} \right\| \end{array} \right.$$

(все необозначенные элементы матрицы равны нулю).

Решение задачи об оптимальном назначении может быть сконструировано из компонент оптимальной стратегии игрока II в этой матричной игре. Пусть

$$\mathbf{z}^0 = (z_{11}^0, \dots, z_{1m}^0, z_{21}^0, \dots, z_{2m}^0, \dots, z_{m1}^0, \dots, z_{mm}^0)$$

— такая оптимальная стратегия. Тогда скалярное произведение $\mathbf{z}^0$ на любую строку матрицы $\mathbf{B}$ должно быть меньше или равно v , где v — значение игры; иными словами, $\mathbf{B}\mathbf{z}^0 \leq v$, где $v = (v, v, \dots, v)$. Поскольку $a_{ij} > 0$, должно быть и $v > 0$.

Пусть

$$y_{ij}^0 = \frac{z_{ij}^0}{a_{ij}v}.$$

Ясно, что $y_{ij}^0 \geq 0$, а так как вектор $\mathbf{z}^0$ — оптимальный, мы получаем $\sum_j y_{ij}^0 \leq 1$ для всех i и $\sum_i y_{ij}^0 \leq 1$ для всех j . Мы хотим показать, что $\mathbf{y}^0$ максимизирует $\sum a_{ij}y_{ij}$. Заметим, прежде всего, что $\sum_{ij} a_{ij}y_{ij}^0 = M = 1/v$. Допустим, что для некоторого $\bar{\mathbf{y}} \in \mathcal{Y}$ имеет место $\sum_{ij} a_{ij}\bar{y}_{ij} = M' > M$. Положим

$$\bar{z}_{ij} = \frac{a_{ij}\bar{y}_{ij}}{M'}.$$

Тогда $\bar{z}_{ij} \geq 0$ и $\sum_{i,j} \bar{z}_{ij} = 1$, так что $\bar{\mathbf{z}}$ оказывается стратегией игрока II в игре с матрицей $\mathbf{B}$. Оценим скалярное произведение $\bar{\mathbf{z}}$ и i -й строки:

$$\sum_j \bar{z}_{ij} \frac{1}{a_{ij}} = \frac{1}{M'} \sum_j \bar{y}_{ij} \leq \frac{1}{M'} < v.$$

Для последних m строк мы получаем

$$\sum_i \bar{z}_{ij} \frac{1}{a_{ij}} = \frac{1}{M'} \sum_i y_{ij} \leq \frac{1}{M'} < v,$$

что невозможно, так как v — значение игры. Следовательно, $\mathbf{y}^0$ максимизирует функционал $\sum a_{ij}y_{ij}$ на $\mathcal{Y}$.

Однако ранее было установлено, что если $\mathbf{y}^0$ максимизирует $\sum a_{ij}y_{ij}$, то $\mathbf{y}^0 \in \mathcal{X}$; следовательно, решение задачи об оптимальном назначении может быть извлечено из представления $\mathbf{y}^0$ в виде выпуклой комбинации крайних точек.

Матричную игру **В** можно интерпретировать как игру в прятки. Рассмотрим матрицу

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1/a_{11} & 1/a_{12} & \dots & 1/a_{1m} \\ 1/a_{21} & 1/a_{22} & \dots & 1/a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{m1} & 1/a_{m2} & \dots & 1/a_{mm} \end{array} \right\|.$$

Игрок I выбирает строку матрицы или ее столбец, а игрок II — одну из ее клеток. Если клетка находится в строке или столбце, выбранном игроком I, то последний платит сумму, указанную в этой клетке. В противном случае он не платит ничего. Читатель может убедиться в том, что матрицей этой игры действительно является матрица **В**.

5.9. Транспортная задача и задача о потоке. Транспортная модель была введена в п. 5.1; в настоящем пункте мы будем пользоваться теми же обозначениями. Если отвлечься от экономической интерпретации, то транспортная задача принимает следующий вид: требуется минимизировать функционал

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_{ij} c_{ij}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m x_{ij} &\geq r_j \quad (j=1, \dots, n), \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &\leq s_i \quad (i=1, \dots, m), \\ x_{ij} &\geq 0 \quad \text{для всех } i, j. \end{aligned} \tag{5.9.1}$$

По предположению, $c_{ij} > 0$, $r_j > 0$ и $s_i > 0$. Существование решения очевидно.

В этом пункте мы будем всюду предполагать, что $\sum_j r_j \leq \sum_i s_i$ (т. е. что суммарный объем производства не меньше суммарного объема потребления).

► **Лемма 5.9.1.** Решениями задачи (5.9.1) могут быть лишь векторы, удовлетворяющие условиям

$$\sum_i x_{ij} = r_j, \quad \sum_j x_{ij} \leq s_i, \quad x_{ij} \geq 0.$$

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{x}^0 = \|x_{ij}^0\|$ есть решение задачи (5.9.1) и что для некоторого j_0

$$\sum_i x_{ij_0}^0 = b_{j_0} > r_{j_0}.$$

Тогда существует такой номер i_0 , что $x_{i_0 j_0}^0 > 0$. Положим $y_{ij} = x_{ij}^0$, если $i \neq i_0$, или $j \neq j_0$ и $y_{i_0 j_0} = x_{i_0 j_0}^0 - \epsilon$; тогда при достаточно малом $\epsilon > 0$

$$y_{ij} \geq 0, \quad \sum_i y_{ij} \geq r_j \quad \text{и} \quad \sum_j y_{ij} \leq s_i.$$

Ясно, что

$$\sum_{i,j} y_{ij} c_{ij} < \sum_{i,j} x_{ij}^0 c_{ij},$$

а это противоречит тому, что $\mathbf{x}^0$ — решение. Следовательно, $\sum_i x_{ij}^0 = r_j$ для всех j .

В дальнейшем мы будем считать, что $\sum_j r_j = \sum_i s_i$ (т. е. что суммарное производство равно суммарному потреблению). Тогда всякий вектор, удовлетворяющий условиям (5.9.1), удовлетворяет, очевидно, также условиям

$$\sum_i x_{ij} = r_j, \quad \sum_j x_{ij} = s_i \quad \text{и} \quad x_{ij} \geq 0. \quad (5.9.2)$$

Обозначим через Γ совокупность векторов $\mathbf{x} = \|x_{ij}\|$, удовлетворяющих условиям (5.9.2). Будем теперь искать решения задачи (5.9.1) только среди векторов, принадлежащих Γ .

Читатель уже мог заметить, что задачу об оптимальном назначении можно рассматривать как тот частный случай транспортной задачи, для которого $r_i = s_j = 1$ и $m = n$. Поэтому естественно ожидать, что многие результаты, установленные для задачи о назначении, имеют аналоги для транспортной задачи. Некоторые из них будут сейчас рассмотрены.

Матрица основных ограничений транспортной задачи напоминает матрицу (5.8.2):

$$A = \begin{pmatrix} x_{11}, \dots, x_{1n}, & x_{21}, \dots, x_{2n}, & \dots & x_{m1}, \dots, x_{mn} \\ \left\{ \begin{array}{l} m \\ n \end{array} \right. \left\| \begin{array}{cccc} 1 & \dots & 1 & \\ & & 1 & \dots & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & 1 & & \dots & 1 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ & & 1 & & 1 & & 1 \end{array} \right\| \end{pmatrix}.$$

Пусть $\omega = (s_1, \dots, s_m, r_1, \dots, r_n)$. Тогда система ограничений (5.9.2) может быть записана как векторное равенство $Ax = \omega$.

При исследовании любой задачи линейного программирования желательно иметь характеристику крайних точек множества допустимых векторов, поскольку оптимум должен достигаться именно в одной из них. Для этой цели полезна следующая лемма.

► *Лемма 5.9.2. Если r_i и s_j — целые числа, не все равные нулю, то крайние точки Γ содержатся в подмножестве целых точек Γ , т. е. таких точек, координаты которых являются целыми числами. Существует, по крайней мере, одна строка (или один столбец), имеющая не более одного отличного от нуля элемента.*

Доказательство основано на той же идее, что и доказательство леммы 5.8.1. Из аргументации, примененной в ходе доказательства этой леммы, видно, что всякая крайняя точка $x \in \Gamma$ имеет не более $m + n - 1$ ненулевых координат. Следовательно, существует строка или столбец (пусть это будет для определенности строка), где содержится не более одного ненулевого элемента, который обязан быть целым (так как все числа r_i целые). Вычеркнув эту строку и изменив соответствующим образом одно из чисел s_j , мы получим крайнюю точку x , описываемую матрицей, имеющей $m - 1$ строк и не более n столбцов, причем новые r_i и s_j снова целые числа. Повторение этих рассуждений доказывает лемму.

Из леммы 5.9.2 легко получается следующая теорема целочисленного программирования.

► *Теорема 5.9.1. Если числа r_i и s_j — целые, то существует решение x^0 задачи (5.9.1) с целыми компонентами x_{ij}^0 .*

Теорема 5.9.1 весьма привлекательна. Она утверждает, что если объемы производства и потребления исчисляются в целых неделимых единицах товара (например, 50 холодильников, 2000 мешков соли и т. п.), то оптимальный план, минимизирующий издержки, требует перевозок целого числа единиц товара с пунктов производства в различные пункты потребления, даже если а priori мы и допускаем планы, допускающие перевозки дробных количеств товара.

Задача о потоках в сетях. Оставшаяся часть этого пункта посвящена исследованию задач, связанных с потоками в сетях. Эта модель тесно связана, а в известном смысле даже эквивалентна транспортной модели. Сетевая задача естественно возникает при изучении транспортных сетей. Пусть задана сеть, т. е. совокупность узлов и направленных дуг, причем выделены два узла, один из

которых назван *источником*, другой *стоком*¹⁾. Каждую дугу можно понимать как железную дорогу, соединяющую два конечных пункта, а узлы могут мыслиться как склады, расположенные на промежуточных станциях. Каждой дуге сети сопоставляется неотрицательное целое число — ее *пропускная способность*; каждый узел также имеет определенную пропускную способность, которую можно понимать как емкость склада. Можно считать, что ребра, имеющие одним из концов источник, состоят из дуги, направленной от этого источника. Аналогично ребра, инцидентные²⁾ со стоком, состоят из дуг, направленных к нему.

Требуется найти максимальный поток от источника к стоку при следующих двух условиях: (1) на каждом ребре направление потока

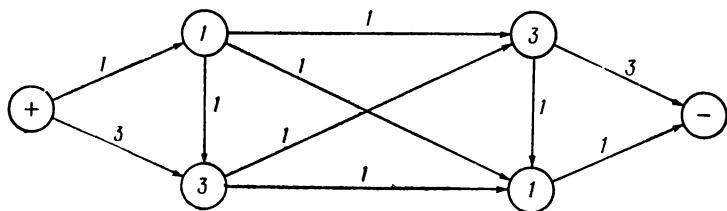


Рис. 6.

совпадает с направлением одной из входящих в него дуг и не превосходит его пропускной способности; (2) поток через каждый узел не превосходит его пропускной способности. Поток, входящий в каждый из промежуточных узлов, должен быть равен потоку, выходящему из него. Значение потока определяется суммой потоков, выходящих из источников, лежащих на этой дуге. Так как любой поток удовлетворяет ограничениям на пропускную способность, его значение равно также сумме потоков, входящих в стоки. Рассмотрим,

¹⁾ Задача, в которой имеется несколько источников и стоков, причем каждый из источников связан с каждым стоком, может быть сведена к задаче с одним источником и одним стоком.

Случай, когда допускается поток в обоих направлениях при ограниченной общей пропускной способности каждого ребра, сводится к предыдущему, если каждое ребро интерпретировать как пару дуг, по одной из которых допускается поток в одном направлении, а по другой — в противоположном. Ограничение общей пропускной способности ребра заменяется парой таких же ограничений, налагаемых на поток в каждом из направлений, поскольку рассмотрение потока одновременно в обоих направлениях не дает никаких преимуществ.

Вместо отдельного рассмотрения узлов и их пропускных способностей можно рассматривать дуги, связывающие узлы сами с собой.

²⁾ Дуга (или ребро) называется *инцидентной* узлу (стоку, источнику), если она начинается в этом узле, но не оканчивается в нем или оканчивается в нем, но не начинается. — *Прим. ред.*

например, рис. 6, где источник и сток обозначены соответственно плюсом и минусом и указаны пропускные способности дуг и узлов. Максимальный поток для случая этой сети представлен на рис. 7.

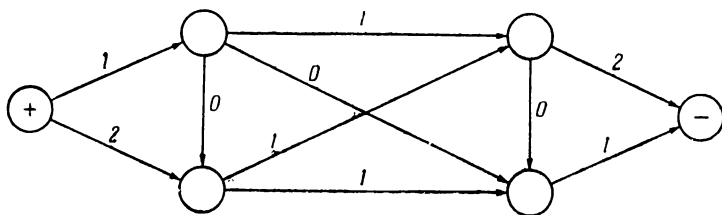


Рис. 7.

Пусть число $x_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$, $i, j = 1, \dots, m$) обозначает поток от i -го узла к j -му¹⁾; x_{ii} ($i = 1, \dots, m$) есть поток через i -й узел; x_{0j} ($j = 1, \dots, m$) — поток от источника к j -му узлу; $x_{i,}$ — поток от i -го узла к стоку.

Для общей задачи о потоках в сетях мы введем псевдотранспортную конструкцию:

						суммы:
x_{00}	x_{01}	x_{02}	$\dots$	x_{0m}	0	
x_{10}	$-x_{11}$	x_{12}	$\dots$	x_{1m}	0	
$\vdots$					$\vdots$	
$\vdots$					$\vdots$	
x_{m0}	x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	$-x_{mm}$	0	
суммы: 0	0	0	$\dots$	0		

которая схематизирует систему уравнений

$$\begin{aligned}
 -x_{ii} + \sum_{j \neq i} x_{ij} &= 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m), \\
 -x_{jj} + \sum_{i \neq j} x_{ij} &= 0 \quad (j = 0, 1, \dots, m).
 \end{aligned} \tag{5.9.3}$$

Ясно, что здесь x_{00} есть значение потока, и задача состоит в максимизации x_{00} при ограничениях (5.9.3) и

$$0 \leq x_{ij} \leq a_{ij} \quad (i, j) \neq (0, 0), \tag{5.9.4}$$

где a_{ij} — заданные неотрицательные числа, определяющие пропускные способности узлов и дуг. Если i -й и j -й узлы дугой не соединены, то полагаем $a_{ij} = 0$.

¹⁾ То есть суммарный поток по всем путям, не имеющим общих дуг, выходящих из i -го узла и входящих в j -й. — Прим. ред.

5.10. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. *Путем* называется любая совокупность дуг и узлов, ведущая от источника к стоку. *Разрезом* в ориентированной сети называется совокупность дуг и узлов, пересекающаяся со всяким путем, соединяющим источник со стоком. *Значением разреза* называется сумма пропускных способностей всех входящих в него узлов и дуг. Ясно, что максимальный поток не может превосходить минимального значения разреза, и наоборот. Таким образом, мы имеем следующую теорему.

Эта теорема по существу есть перефразировка теоремы двойственности (теорема 5.4.1) для случая задачи о потоке в сети. Для того чтобы провести доказательство, исследуем вид двойственной задачи.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_{00}, x_{01}, \dots, x_{0m}, x_{10}, x_{11}, \dots, x_{1m} \dots x_{m0}, x_{m1}, \dots, x_{mm} \end{matrix} \\ \begin{matrix} m+1 \\ m \\ m-1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} -1 & 1 & \dots & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & -1 & \dots & 1 & & & & \\ & & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 1 & \dots & -1 \\ -1 & & & & 1 & & & & \dots & 1 & & & \\ & 1 & & & & -1 & & & & & 1 & & \\ & & \cdot & & & & \cdot & & & & & \cdot & \\ & & \cdot & & & & \cdot & & & & & \cdot & \\ & & & 1 & & & & 1 & \dots & & & & -1 \end{array} \right. \\ \begin{matrix} m^2+2m \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right. \end{matrix}$$

где I — единичная матрица порядка $m^2 + 2m$.

Положим

$$\mathbf{b} = (0, \overbrace{0, \dots, 0}^{2m+2}, a_{01}, a_{02}, \dots, a_{0m}, a_{10}, a_{11}, \dots, a_{mm}).$$

Тогда ограничения задачи о потоке в сети можно записать в матричной форме, как $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, причем для первых $2m+2$ компонент имеет место равенство. Поскольку в задаче о потоке отыскивается максимум x_{00} , система двойственных ограничений для двойственных переменных $u_i (i=0, \dots, m)$, $v_j (j=0, 1, \dots, m)$ и $\omega_{ij} [(i, j) \neq (0, 0)]$ приобретает вид

$$\begin{aligned} u_i + v_j + \omega_{ij} &\geq 0 & (i, j=0, \dots, m; i \neq j), \\ -u_i - v_i + \omega_{ii} &\geq 0 & (i=1, \dots, m), \\ -u_0 - v_0 &\geq 1, \\ \omega_{ij} &\geq 0 & (i, j) \neq (0, 0). \end{aligned} \quad (5.10.1)$$

Обозначим множество всех (u, v, ω) , удовлетворяющих условиям (5.10.1), через T . Так как среди исходных ограничений имеется $2m+2$ равенств, переменные u_i и v_j изменяются без ограничений (см. стр. 146). В силу теоремы 5.4.3 для оптимальной стратегии (кроме тривиальных случаев) должно быть $x_{00} > 0$; следовательно, $-u_0 - v_0 = 1$. Далее, поскольку одно из уравнений (5.9.3) является излишним, мы можем произвольно положить $u_0 = 0$, откуда $v_0 = -1$.

Здесь нам понадобится следующая лемма.

► Лемма 5.10.1. Если $u_0 = 0$ и $v_0 = -1$, то координаты крайних точек T обладают следующим свойством: u_i равны 0 или 1 для всех i ; v_j равны 0 или -1 для всех j и ω_{ij} равны 0 или 1 для всех пар i, j .

Доказательство. Система (5.10.1) содержит $m^2 + 4m$ переменных и $2m^2 + 4m$ неравенств. Крайние точки T представляют собой решения всех возможных наборов по $m^2 + 4m$ независимых уравнений с таким же числом неизвестных. Все множества уравнений, выводимых из (5.10.1), можно свести к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} v_j + \omega_{0j} &= 0, & u_i + \omega_{i0} &= 1, \\ u_i + v_j + \omega_{ij} &= 0 & (i, j=1, \dots, m; i \neq j), \\ \omega_{ij} &= 0 & (i, j \neq 0, 0), \\ -u_i - v_i + \omega_{ii} &= 0 & (i=1, \dots, m). \end{aligned} \quad (5.10.2)$$

Подставив, там где нужно, $\omega_{ij} = 0$, мы получим систему уравнений для оставшихся ω_{ij} , u_i и v_j .

Если в системе (5.10.2) отсутствует уравнение $\omega_{i_0 j_0} = 0$, то соответствующая переменная $\omega_{i_0 j_0}$ может быть определена с помощью одного из оставшихся уравнений:

$$\begin{aligned} u_i + v_j + \omega_{ij} &= 0 & (i, j \neq 0, 0 \text{ и } i \neq j), \\ -u_i - v_i + \omega_{ii} &= 0 & (i \neq 0), \\ v_j + \omega_{0j} &= 0 & (j \neq 0) \end{aligned}$$

или

$$u_i + \omega_{i0} = 1 \quad (j \neq 0).$$

Из этих уравнений нельзя определить u_i и v_j . Но если i, j не равны нулю, то значения переменных u_i и v_j могут быть определены из $2m$ независимых уравнений, каждое из которых имеет вид

$$u_i + v_j = 0, \quad v_j = 0 \quad \text{или} \quad u_i = 1. \quad (5.10.3)$$

Каждая переменная u_i ($i = 1, \dots, m$) и v_j ($j = 1, \dots, m$) входит в некоторые из уравнений (5.10.3). Легко видеть, что система независимых уравнений типа (5.10.3), содержащая все переменные u_i и v_j ($i, j = 1, \dots, m$), может иметь лишь решения, в которых u_i равны 0 или 1, а v_j равны 0 или -1 . Из системы (5.10.2) следует, что ω_{ij} равны 0 или 1, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5.10.1. Двойственная задача заключается в минимизации функционала $\sum_{ij} a_{ij} \omega_{ij}$ при ограничениях (5.10.1). В силу теоремы двойственности (теорема 5.4.1) и леммы 5.10.1

$$\max x_{00} = \sum_{\sigma} a_{ij}, \quad (5.10.4)$$

где σ — множество тех дуг i, j и узлов i , для которых $\omega_{ij} = 1$. По теореме 5.4.3 $\omega_{ij} = 1$ влечет $x_{ij} = a_{ij}$, а $\omega_{ii} = 1$ влечет $x_{ii} = a_{ii}$. Утверждается, что σ представляет собой разрез. По предположению, все a_{ij} , для которых $i, j \notin \sigma$, возрастают при $\epsilon > 0$. Из (5.10.4) видно, что это увеличение не может изменить решения двойственной задачи и, следовательно, не может увеличить поток в данной сети. Но если существует путь от источника к стоку, не пересекающийся с σ , то очевидно, что поток может быть увеличен. Таким образом, σ есть разрез, а так как поток не может превзойти значение какого-либо разреза, σ есть минимальный разрез.

5.11*. Задача о поставщике. Для того чтобы обслуживать столовую в течение m последовательных дней, поставщику требуется r_j чистых салфеток в j -й день. Обычная стирка продолжается p дней и обходится b центов за салфетку; срочная стирка выполняется за

q дней (p и q — целые числа) и стоит c центов за салфетку. Новая салфетка стоит a центов. Как должен поставщик организовать обслуживание столовой, чтобы потребности были удовлетворены, а расход за m дней оказался бы минимальным?

Другая интерпретация этой модели относится к военной авиации. Стирка соответствует ремонту техники, за единицу времени естественнее вместо дня принять месяц и т. д.

Практические соображения диктуют следующие ограничения:

$$r_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad a > b, \quad a > c, \quad c > b, \quad p > q.$$

Пусть x_j есть число салфеток, покупаемых для использования в j -й день, y_j — сумма в центах, выделяемая на обычную стирку, z_j — на срочную и, наконец, s_j — число грязных салфеток, имеющих на j -й день ($j = 1, \dots, m$). Прописными буквами обозначим накопленные количества, например

$$X_j = \sum_{i=1}^j x_i, \quad \text{и т. д.}$$

Задача о поставщике в этих обозначениях формулируется следующим образом.

Задача А. Требуется минимизировать общую стоимость

$$a \sum_{j=1}^m x_j + b \sum_{j=1}^m y_j + c \sum_{j=1}^m z_j = aX_m + bY_m + cZ_m \quad (5.11.1)$$

при ограничениях

$$x_j + y_{j-p} + z_{j-q} \geq r_j, \quad (5.11.2)$$

$$y_j + z_j + s_j - s_{j-1} = r_j, \quad (5.11.3)$$

$$x_j, y_j, z_j, s_j \geq 0, \quad (5.11.4)$$

где $j = 1, \dots, m$, $s_0 = 0$, $y_{-k} = z_{-k} = 0$ для $k \geq 0$.

Формула (5.11.2) выражает потребности, а (5.11.3) — конкретную обстановку. В формулировке ограничений подразумевается, что ни одна салфетка не покупается и не стирается раньше времени. Задачу о поставщике можно формулировать как распределительную или транспортную задачу, в которой вместо пунктов производства участвует поставщик, вместо мощностей рассматривается ежедневный расход салфеток, а ежедневные потребности в чистых салфетках и предельно допустимое количество грязных салфеток заменяют соответственно спрос в пунктах потребления и емкость промежуточных складов (см. задачу 10 гл. 6). Следовательно, некоторые частные вычислительные схемы для транспортной задачи могут с успехом быть применены и для численного решения задачи о поставщике.

Для наших целей, однако, некоторые свойства задачи о поставщике важнее, чем ее численное решение. Для последующего анализа мы воспользуемся методом Джексона, который дает явное аналитическое решение в случае $p - 1 = q$. Подход Джексона — изящный пример сведения сложной задачи линейного программирования к задаче более простого вида.

В задаче А могут быть сделаны два упрощения. Во-первых, ясно, что ограничения (5.11.2) могут быть переписаны так:

$$x_j + y_{j-p} + z_{j-q} = r_j \quad (j = 1, \dots, m). \quad (5.11.2a)$$

Во-вторых, салфетки нет смысла отдавать в стирку, если они не вернутся к m -му дню; таким образом, $y_j = 0$ ($m - p < j \leq m$) и $z_j = 0$ ($m - q < j \leq m$). Тогда функция издержек принимает вид

$$aX_m + bY_{m-p} + cZ_{m-q}.$$

Заметив, что $X_m + Y_{m-p} + Z_{m-q} = R_m$ [это равенство получено суммированием (5.11.2a) по $j = 1, \dots, m$], мы получим

$$\begin{aligned} aX_m + bY_{m-p} + cZ_{m-q} &= (a - b)X_m + (c - b)Z_{m-q} + bR_m = \\ &= (c - b) \left\{ \frac{a - b}{c - b} X_m + Z_{m-q} \right\} + bR_m. \end{aligned}$$

Теперь задача А свелась к следующей задаче.

Задача Б. Требуется минимизировать

$$\lambda X_m + Z_{m-q} \quad (5.11.5)$$

при ограничениях (5.11.2a), (5.11.3), (5.11.4), где

$$\lambda = \frac{a - b}{c - b} > 0.$$

Преобразуем теперь переменные, для того чтобы исключить из ограничений задачи индивидуальные x_j . Суммируя (5.11.2a) до j , мы получаем

$$X_j + Y_{j-p} + Z_{j-q} = R_j; \quad (5.11.6)$$

а суммируя (5.11.3) до $j - p$, мы получаем

$$Y_{j-p} + Z_{j-p} + s_{j-p} = R_{j-p}. \quad (5.11.7)$$

Вычитая (5.11.7) из (5.11.6), мы получаем

$$X_j + Z_{j-q} - Z_{j-p} - s_{j-p} = R_j - R_{j-p}. \quad (5.11.8)$$

Перейдем от переменных (x, y, s, z) к переменным (w, u, v, z) по формулам

$$w = X_m, \quad u_j = X_m - X_j + s_{j-p}, \quad v_j = x_j + y_{j-p}, \quad z_j = z_j.$$

Тогда формулы (5.11.8), (5.11.2а) и (5.11.4) запишутся в виде

$$w + Z_{j-q} - Z_{j-p} - u_j = R_j - R_{j-p}, \quad (5.11.9)$$

$$z_{j-q} + v_j = r_j, \quad (5.11.10)$$

$$w, z_j, u_j, v_j \geq 0, \quad (5.11.11)$$

а функция, подлежащая минимизации, примет вид

$$\lambda w + Z_{m-q}. \quad (5.11.12)$$

Докажем теперь следующую лемму.

► Лемма 5.11.1. *Задача Б может быть сведена к следующей задаче.*

Задача В. Минимизировать функцию (5.11.12) при ограничениях (5.11.9) — (5.11.11).

Доказательство. Как отмечалось выше, каждому допустимому вектору (x, y, s, z) задачи Б соответствует допустимый вектор (w, u, v, z) задачи В. Обратное не имеет места. Однако каждое решение задачи В является образом допустимого вектора (x, y, s, z) задачи Б.

Пусть (w, u, v, z) — оптимальный вектор; положим $X_m = w$ и

$$X_j = w - \min_{i \leq j} u_i,$$

так что X_j не убывают. Из первого соотношения (5.11.9) вытекает, что $w \geq u_1$, следовательно, все величины $x_j = X_j - X_{j-1}$ неотрицательны. Далее,

$$\min_{1 \leq j \leq m} u_j = 0,$$

так как в противном случае w и u_j могут быть уменьшены на определенное число, что противоречит предположению об оптимальности. Следовательно, оба наших определения X_m совпадают. Далее, $X_m - X_j \leq u_j$; следовательно, $s_{j-p} = u_j - X_m + X_j \geq 0$.

Остается показать, что все числа $y_j = v_{j+p} - x_{j+p}$ неотрицательны. Если $x_k = 0$, где $k = j + p$, то доказательство закончено. Предположим поэтому, что $x_k > 0$. Тогда из определения x_k следует, что $X_k = X_m - u_k$ и $u_i > 0$ для $i < k$. Допустим, что z_{k-p} положительно; тогда если мы уменьшим z_{k-p} на некоторое число и вместе с тем уменьшим $u_{k-p+q}, u_{k-p+q+1}, \dots, u_{k-1}$ на то же самое число, а также подходящим образом изменим v_{k-p+q} , то ограничения задачи В останутся прежними, в то время как Z_{m-q} уменьшится.

Это противоречит предположению об оптимальности; следовательно, $z_{k-p} = 0$. Далее,

$$s_{k-p} = u_k - X_m + X_k = 0,$$

поэтому

$$y_j = y_{k-p} = r_{k-p} + s_{k-p-1} - s_{k-p} - z_{k-p} = 0 + r_{k-p} + s_{k-p-1} \geq 0.$$

Лемма доказана.

В силу леммы 5.11.1 нашу задачу можно сформулировать следующим образом.

Задача В'. Минимизировать функцию $[\lambda w + Z_{m-q}]$ при следующих ограничениях:

$$w = Z_{j-q} - Z_{j-p} \geq R_j - R_{j-p} \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (5.11.13)$$

$$0 \leq z_{j-q} \leq r_j \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (5.11.14)$$

$$0 \leq w. \quad (5.11.15)$$

(Читатель может заметить, что мы заменили ограничения задачи В на эквивалентные им так, что все ограничения приняли вид неравенств.)

Алгоритм решения задачи о поставщике при произвольных p и q содержится в задачах 22—26 (см. также комментарии к этому пункту в конце главы). Здесь же мы ограничимся случаем $q = p - 1$ и найдем решение задачи В' в явном виде.

При $q = p - 1$ формулы (5.11.13) переписутся следующим образом:

$$w + z_{j-q} \geq R_j - R_{j-q-1} \quad (j = 1, \dots, m). \quad (5.11.16)$$

Из (5.11.15) и (5.11.14) мы получаем

$$w \geq R_j - R_{j-q} \quad (j = 1, \dots, m). \quad (5.11.17)$$

Положим

$$\bar{w} = w - \max_{1 \leq i \leq m} \{R_{i-1} - R_{i-p}\},$$

$$H_j = R_j - R_{j-p} - \max_{1 \leq i \leq m} \{R_{i-1} - R_{i-p}\}.$$

Тогда (5.11.16) и (5.11.17) можно записать, как

$$\bar{w} + z_{j-q} \geq H_j, \quad \bar{w} \geq 0.$$

Покажем теперь, что задачу В' можно привести к следующему виду.

Задача В". Минимизировать функцию $\lambda \bar{w} + Z_{m-q}$ при ограничениях

$$\bar{w} + z_{j-q} \geq H_j, \quad \bar{w} \geq 0, \quad z_{j-q} \geq 0.$$

Доказательство. Ясно, что решение задачи В' допустимо для задачи В".

Пусть $\bar{w}$, z_{j-q} — решение задачи В". Покажем, что тогда соблюдаются условия (5.11.14).

Из соотношения

$$H_j \leq R_j - R_{j-p} - (R_{j-1} - R_{j-p}) = r_j$$

следует, что вектор z_{j-q} , для которого $z_{j-q} > r_j$, не может быть отрицательным.

Решение задачи В" определяется следующей леммой.

► Лемма 5.11.2. Пусть $a_1 \geq \dots \geq a_m \geq 0$. Тогда решение задачи о минимизации функции $\lambda w + Z_m$ при ограничениях

$$w + z_j \geq a_j, \quad w \geq 0, \quad z_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

дается формулами

$$w = a_{[\lambda]+1}, \quad z_j = \max \{0, a_j - a_{[\lambda]+1}\}$$

при $\lambda < m$. Если $\lambda \geq m$, то минимум достигается при

$$w = 0, \quad z_j = a_j.$$

Доказательство. Для произвольного $w \geq 0$ значение Z_m минимально, если

$$z_j = \max \{0, a_j - w\} \quad (j = 1, \dots, m).$$

Пусть $a_k \geq w_k \geq a_{k+1}$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \varphi(w_k) &= \lambda w_k + \sum_{j=1}^m \max \{0, a_j - w_k\} = \\ &= \lambda w_k + \sum_{j=1}^k (a_j - w_k) = (\lambda - k) w_k + \sum_{j=1}^k a_j; \end{aligned}$$

тогда должно быть

$$\begin{aligned} \varphi(w_k) - \varphi(w_{k+1}) &= (\lambda - k)(w_k - w_{k+1}) - (a_{k+1} - w_{k+1}), \\ &\leq 0, \text{ если } k \geq \lambda, \\ &\geq 0, \text{ если } k < \lambda - 1. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\varphi(w_k)$ принимает наименьшее значение, когда

$$w_k = a_k, \quad k = [\lambda] + 1,$$

а это и требовалось доказать.

Если теперь результат переформулировать для первоначальной задачи, то решение задачи А получается в следующем виде:

$$z_j = \max \{ (H_{j+p-1} - \bar{w}), 0 \}, \quad [\text{из (5.11.2a)}],$$

$$x_j = \max_{i \leq j} \{ R_i - R_{i-p} - z_{i-p+1} \} - \max_{i \leq j-1} \{ R_i - R_{i-p} - z_{i-p+1} \},$$

[из (5.11.7)],

$$y_j = p_{i+p} - x_{j+p} + z_{j+1}$$

$$s_j = R_j - Y_j - Z_j$$

где

$$H_j = \max \left\{ \left(R_j - R_{j-p} - \max_{1 \leq i \leq m} \{ R_i - R_{i-p} \} \right), 0 \right\}$$

и $\bar{w} = H_{[\lambda]+1}$, причем $[\lambda]$ есть наибольшее целое число, не превосходящее $(a-b)/(c-d)$.

5.12*. Модель биржевой игры. В течение $m+1$ периодов времени могут продаваться или покупаться различные акции. Цены b_k в течение каждого периода могут быть предсказаны и поэтому предполагаются известными. Несмотря на это нереальное предположение, анализ такой детерминированной задачи представляет все же некоторый интерес.

Обозначим через X_{k-1} количество акций, имеющееся к началу k -го периода. Изменение капитала за k -й период равно $b_k(X_{k-1} - X_k)$; $X_k > X_{k-1}$ означает, что была произведена покупка; если же $X_k < X_{k-1}$, то часть акций продана. Мы считаем цену запаса акций на некоторый период пропорциональной количеству имеющихся акций; но эти ценности не реализуются до истечения m периодов и, таким образом, не влияют на количество денег, которые можно использовать для игры. Чистый доход за k -й период равен поэтому

$$b_k(X_{k-1} - X_k) - cX_k.$$

Если принять во внимание процент на капитал i , то общий доход за все $m+1$ периодов будет равен

$$\sum_{k=0}^m \alpha^k [b_k(X_{k-1} - X_k) - cX_k], \quad \text{где } \alpha = \frac{1}{1+i}, \quad (5.12.1)$$

полагая $X_{-1} = 0$. Сумма денег M_k , имеющаяся на руках, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$M_k = M_{k-1} + b_k(X_{k-1} - X_k), \quad (5.12.2)$$

где M_0 — фиксированное число, обозначающее начальное количество денег, предназначенных для игры на бирже. Требуется найти такую

программу биржевой игры, которая максимизирует общий доход при ограничении $M_k \geq 0$ для всех k . Иными словами, игрок не может купить акции в долг, и займы также запрещены.

Ограничивающие неравенства можно переписать как

$$0 \leq X_k \leq \frac{M_0 + \sum_{i=0}^{k-1} (b_{i+1} - b_i) X_i}{b_k} \quad (k = 1, \dots, m), \quad (5.12.3)$$

где $b_0 = 0$. Наша задача заключается в том, чтобы при ограничениях (5.12.3) найти такую программу X , для которой максимизируется выражение

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha^j (\alpha b_{j+1} - b_j - c) X_j + \alpha^m X_m (-b_m - c). \quad (5.12.4)$$

Очевидно, что максимум достигается здесь при $X_m = 0$ (к концу m -го периода все акции проданы).

Исследование должно определить оптимальные X_k для всех предшествующих периодов времени. Это оправдано тем, что в ограничивающие соотношения для X_i входят только иксы с меньшими индексами. Например, если коэффициент $\alpha^{m-1}(\alpha b_m - b_{m-1} - c)$ при X_{m-1} положителен, то оптимальное значение X_{m-1} в (5.12.3) должно равняться правой части соответствующего неравенства

$$X_{m-1} = \frac{M_0 + \sum_{i=0}^{m-2} (b_{i+1} - b_i) X_i}{b_{m-1}} \quad (5.12.5)$$

при условии, что это выражение положительно.

Мы покажем, что положительным значениям X_i в оптимальной программе должны соответствовать подмножества индексов i , обладающие свойством $b_{i+1} - b_i > 0$. Следовательно, верхние границы в неравенствах (5.12.3) всегда положительны. Короче говоря, если цены понижаются, то запас увеличивать невыгодно. Однако если цены растут слишком медленно, можно акции не покупать, чтобы сохранить капитал для будущего.

Обратимся теперь к определению решения в явном виде. Некоторые полезные для этого выводы мы можем сделать из соотношения (5.12.5). Отметим, что если имеет место равенство (5.12.5) (т. е. если $\alpha b_m - b_{m-1} - c > 0$), то коэффициент при X_{m-2} в (5.12.4) должен иметь вид

$$\alpha^{m-2} (\alpha b_{m-1} - b_{m-2} - c) + \frac{b_{m-1} - b_{m-2}}{b_{m-1}} \alpha^{m-1} (\alpha b_m - b_{m-1} - c). \quad (5.12.6)$$

Следовательно, если коэффициент (5.12.6) положителен, то X_{m-2} нужно выбирать как можно большим, так что [см. (5.12.3)]

$$X_{m-2} = \frac{M_0 + \sum_{i=0}^{m-3} (b_{i+1} - b_i) X_i}{b_{m-2}}. \quad (5.12.7)$$

Подставляя это значение X_{m-2} в (5.12.5), мы получаем

$$X_{m-1} = \frac{M_0 + \sum_{i=0}^{m-3} (b_{i+1} - b_i) X_i}{b_{m-2}}.$$

Это соотношение выполняется всегда: как только в ограничивающей формуле (5.12.3) для некоторого X_i выполняется равенство, то и последующие X_i обладают тем же свойством. Далее, если коэффициент (5.12.6) положителен, то $b_{m-1} > b_{m-2}$. Если же коэффициент (5.12.6) отрицателен, то $X_{m-2} = 0$ и из (5.12.5) следует, что

$$X_{m-1} = \frac{b_{m-2}}{b_{m-1}} \frac{M_0 + \sum_{i=0}^{m-3} (b_{i+1} - b_i) X_i}{b_{m-2}}.$$

Разберем теперь общий случай. Построение будем вести по индукции. Предполагая, что формулы для X_i при $r_k + 1 \leq i \leq m - 1$ определены, постараемся найти выражение для X_{r_k} .

Допустим, прежде всего, для определенности, что $\alpha b_m - b_{m-1} - c > 0$, так что $X_{m-1} > 0$. Читатель легко проведет рассуждение для противоположного случая.

Случай 1. Пусть

$$X_i = 0 \quad \text{для} \quad r_2 < i \leq r_1, \quad r_4 < i \leq r_3, \quad \dots, \quad r_k < i \leq r_{k-1}.$$

$$X_i = \frac{b_{r_2}}{b_{r_1}} \cdot \frac{b_{r_4}}{b_{r_3}} \dots \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \left(\frac{M_0 + \sum_{j=0}^{r_k} (b_{j+1} - b_j) X_j}{b_{r_k}} \right) \quad \text{для} \quad r_1 < i \leq m - 1,$$

$$X_i = \frac{b_{r_4}}{b_{r_3}} \dots \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \left(\frac{M_0 + \sum_{j=0}^{r_k} (b_{j+1} - b_j) X_j}{b_{r_k}} \right) \quad \text{для} \quad r_3 < i \leq r_2,$$

$$X_i = \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \left(\frac{M_0 + \sum_{j=0}^{r_k} (b_{j+1} - b_j) X_j}{b_{r_k}} \right) \quad \text{для} \quad r_{k-1} < i \leq r_{k-2},$$
(5.12.8)

причем $m-1 > r_1 > r_2 > \dots > r_{k-1} > r_k$. Подставляя эти выражения в (5.12.4), мы видим, что коэффициент при X_{r_k} равен

$$\begin{aligned} & \alpha^{r_k} (ab_{r_{k+1}} - b_{r_k} - c) + \\ & + \left(\frac{b_{r_{k+1}} - b_{r_k}}{b_{r_k}} \left\{ \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \sum_{r_{k-1} < i \leq r_{k-2}} \alpha^i (ab_{i+1} - b_i - c) + \right. \right. \\ & + \frac{b_{r_{k-2}}}{b_{r_{k-3}}} \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \sum_{r_{k-4} < i \leq r_{k-3}} \alpha^i (ab_{i+1} - b_i - c) + \\ & + \dots + \frac{b_{r_2}}{b_{r_1}} \frac{b_{r_4}}{b_{r_3}} \dots \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \sum_{r_1 < i \leq m-1} \alpha^i (ab_{i+1} - b_i - c) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (5.12.9)$$

Поэтому если выражение (5.12.9) отрицательно, то оптимальное значение X_{r_k} должно быть равно 0. В этом случае мы рассматриваем коэффициенты при $X_{r_{k-1}}$ после первого приведения всех соотношений (5.12.8) и замечаем, что они имеют тот же самый вид. Если коэффициент (5.12.9) положителен, то $b_{r_{k+1}} > b_{r_k}$ и X_{r_k} должен равняться своей верхней границе в (5.12.3). Мы приходим таким образом к второй группе соотношений, которые справедливы, если последняя группа определенных иксов удовлетворяет ограничительным соотношениям (5.12.3) с равенством на верхней границе. Эти соотношения имеют следующий вид:

Случай 2.

$X_i = 0$ для $r_2 < i \leq r_1$, $r_4 < i \leq r_3$, ..., $r_k < i \leq r_{k-1}$
и $r_{k+1} < r_k$,

$$\begin{aligned} X_i &= \frac{b_{r_2}}{b_{r_1}} \cdot \frac{b_{r_4}}{b_{r_3}} \dots \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \frac{M_0 + \sum_{j=0}^{r_{k+1}} (b_{j+1} - b_j) X_j}{b_{r_{k+1}} + 1} \\ &\quad \text{для } r_1 < i \leq m-1, \\ X_i &= \frac{b_{r_4}}{b_{r_3}} \dots \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \frac{M_0 + \sum_{j=0}^{r_{k+1}} (b_{j+1} - b_j) X_j}{b_{r_{k+1}} + 1} \\ &\quad \text{для } r_3 < i \leq r_2, \\ &\vdots \\ X_i &= \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \frac{M_0 + \sum_{j=0}^{r_{k+1}} (b_{j+1} - b_j) X_j}{b_{r_{k+1}} + 1} \quad \text{для } r_{k-1} < i \leq r_{k-2}, \\ X_i &= \frac{M_0 + \sum_{j=0}^{r_{k+1}} (b_{j+1} - b_j) X_j}{b_{r_{k+1}} + 1} \quad \text{для } r_{k+1} < i \leq r_k. \end{aligned} \quad (5.12.10)$$

Относительно $X_{r_{k+1}}$ решение принимается в зависимости от знака его коэффициента $L_{r_{k+1}}$, получающегося, если подставить (5.12.10) в (5.12.4). Коэффициент $L_{r_{k+1}}$ равен

$$\begin{aligned} & \alpha^{r_{k+1}} (ab_{r_{k+1}+1} - b_{r_{k+1}} - c) + \\ & + \frac{b_{r_{k+1}+1} - b_{r_{k+1}}}{b_{r_{k+1}+1}} \left\{ \sum_{r_{k+1} < i \leq r_k} \alpha^i (ab_{i+1} - b_i - c) + \right. \\ & + \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \sum_{r_{k-1} < i \leq r_{k-2}} \alpha^i (ab_{i+1} - b_i - c) + \dots \\ & \left. \dots + \frac{b_{r_2}}{b_{r_1}} \cdot \frac{b_{r_4}}{b_{r_3}} \dots \frac{b_{r_k}}{b_{r_{k-1}}} \sum_{r_1 < i \leq m-1} \alpha^i (ab_{i+1} - b_i - c) \right\}. \quad (5.12.11) \end{aligned}$$

Резюмируем: формулы X_k определяются шаг за шагом, начиная с X_{m-1} . Для каждого X мы проверяем, какому из соотношений (5.12.8) или (5.12.10) он удовлетворяет. Если выполняется (5.12.8), то формула для следующего X определяется в зависимости от знака (5.12.9). Если выполняется (5.12.10), то формула для следующего X определяется в зависимости от знака (5.12.11).

Теперь ясен алгоритм построения решения. В силу описанной индукции все X_i удовлетворяют системе уравнений типа (5.12.8) и (5.12.10). По получении очередного X_i для построения следующих предыдущие уравнения преобразуются с учетом только что полученного X_i . В конечном счете получается система линейных уравнений относительно всех X_i с треугольной матрицей коэффициентов, так что явные значения X_i могут быть последовательно вычислены.

5.13. Задачи.

1. (а) Имеются два изделия, которые должны в процессе производства пройти обработку на четырех станках I, II, III и IV. Время обработки каждого изделия на каждом из этих станков задается следующей таблицей:

	I	II	III	IV
A	2	4	3	1
B	$\frac{1}{4}$	2	1	4

Станки I, II, III и IV можно использовать соответственно в течение 45, 100, 300 и 50 часов. Продажная цена изделия A — 6 долларов за единицу, а изделия B — 4 доллара. В каком соотношении следует производить изделия A и B, чтобы получить максимальную прибыль?

Решить задачу в предположении, что изделие A требуется в количестве не менее 22 штук.

2. Нефтеперерабатывающий завод располагает двумя сортами нефти A и B , причем при переработке получаются бензин и мазут. Три возможных производственных процесса характеризуются следующей схемой:

(1) 1 единица сорта A + 2 единицы сорта B $\rightarrow$ 2 единицы мазута + 3 единицы бензина;

(2) 2 единицы сорта A + 1 единица сорта B $\rightarrow$ 5 единиц мазута + 1 единица бензина;

(3) 2 единицы сорта A + 2 единицы сорта B $\rightarrow$ 2 единицы мазута + 1 единица бензина.

Допустим, что цена мазута 1 доллар за единицу, а цена бензина 10 долларов за единицу. Найти наиболее выгодный производственный план, если имеется 10 единиц нефти сорта A и 15 единиц нефти сорта B .

3. Некто хочет вложить 1000 долларов в три акционерных предприятия, не более чем по 400 долларов в каждое. Акции предприятия A продаются по 50 долларов и владелец их получает дивиденд в размере 2 долларов в год; акции предприятия B стоят по 200 долларов при дивиденде 5 долларов в год; акции предприятия C продаются по 20 долларов и владелец их не получает дивидендов, но имеется надежда, осуществляющаяся с вероятностью $1/2$, что цена акции через год возрастет до 25 долларов. Если этого не произойдет, то цена акции останется прежней. Какой капитал следует вложить в каждое из предприятий, чтобы максимизировать сумму дивидендов плюс ожидаемый выигрыш в течение года?

Примечание. Допускается приобретение долей акций.

4. Решить следующую задачу линейного программирования:

$$\min (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n)$$

при ограничениях

$$x_i \geq 0, \quad x_1 + x_2 + \dots + x_i \geq i \quad (i = 1, \dots, n).$$

5. Построить пример задачи, не имеющей ни одного допустимого вектора, удовлетворяющего ограничениям (5.1.1).

6. Построить пример задачи, для которой множество допустимых векторов непусто, но задача I не имеет решения.

7. Имеется n нефтеперерабатывающих заводов, потребляющих в день D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) единиц сырья, и m месторождений, производящих ежедневно Q_j ($j = 1, 2, \dots, m$) единиц. Стоимость доставки единицы нефти с j -го месторождения на i -й нефтеперерабатывающий завод равна p_{ij} .

Будем считать, что

$$\sum_{i=1}^n D_i \geq \sum_{j=1}^m Q_j.$$

Поставить задачу линейного программирования, описывающую ежедневный процесс очистки нефти и предусматривающую максимизацию дохода при естественных ограничениях.

8. Доказать, что если все компоненты вектора $\mathbf{b}$ неотрицательны и существует допустимый вектор $\mathbf{y}$ для задачи II, то задачи I и II имеют решения.

9. Доказать, что задачи I и II имеют решения, если все компоненты вектора $\mathbf{b}$ и все элементы матрицы $\mathbf{A}$ положительны.

10. (Обобщенный слабый принцип Лешателье.) Рассмотрим задачу I: ищется $\max(\mathbf{c}, \mathbf{x})$ при ограничениях $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Пусть $\mathbf{x}_0$ — решение. Через $\delta\mathbf{c}$ обозначим такое приращение вектора $\mathbf{c}$, что функция $(\delta\mathbf{c}, \delta\mathbf{x}_0) \geq 0$ максимизируется вектором $\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_0$ при тех же ограничениях. Доказать, что $\mathbf{x}_0$ удовлетворяет условию $(\delta\mathbf{c}, \delta\mathbf{x}_0) \geq 0$.

11. Самолет может поднять M фунтов груза. Летчику предложено для погрузки n предметов, i -й из которых весит α_i и стоит β_i . Какие из данных предметов должны быть погружены, чтобы стоимость груза была максимальной, а вес не превосходил грузоподъемности самолета? Сформулировать задачу математически и решить ее.

12. Даны два набора чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Требуется расположить a_i так, чтобы минимизировать сумму

$$\sum_{i=1}^n b_i a_{\gamma_i},$$

где числа γ_i образуют перестановку индексов $1, 2, \dots, n$.

13. Фирма должна составить расписание обработки n объектов, причем обработка i -го объекта требует T_i единиц времени. Общим временем ожидания для конкретного объекта назовем период времени до окончания его обработки. Требуется найти порядок обработки n объектов, минимизирующий суммарное время ожидания всех объектов.

14. Требуется обработать n объектов. Пусть T_i — время, требуемое для обработки i -го объекта; обозначим через D_i срок, к которому должна быть закончена обработка i -го объекта. Если объекты обрабатываются в порядке нумерации, то задержка для i -го объекта равна $\delta_i = T_1 + T_2 + \dots + T_i - D_i$. Положим $\Delta = \max \delta_i$. Показать, что если $D_1 \leq D_2 \leq D_3 \leq \dots \leq D_n$, то порядок $1, 2, 3, \dots, n$ минимизирует величину Δ .

15. Доказать, что система линейных уравнений $\mathbf{yA} = \mathbf{a}$ не имеет неотрицательных решений в том и только в том случае, когда неравенства $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) > 0$ совместны.

16. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — две $m \times n$ -матрицы и $b_{ij} \geq 0$. Назовем вещественное число λ допустимым, если существует такой вектор $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, что $\mathbf{Ax} \geq \lambda \mathbf{Bx}$. Через Ω обозначим множество всех допустимых λ , которое будем считать непустым и ограниченным сверху.

Число μ назовем допустимым, если существует такой вектор $y \geq 0$, что $yA \leq \mu yB$. Обозначим через M множество всех допустимых μ и предположим, что M непусто и ограничено снизу.

Доказать, что

$$\lambda_0 = \sup_{\lambda \in \mathcal{L}} \lambda \geq \mu_0 = \inf_{\mu \in M} \mu.$$

17. Доказать, что если $((B + A)x, y) > 0$ для любых $x \geq 0$ и $y \geq 0$, то выполняются все условия задачи 16 и, кроме того, $\lambda_0 = \mu_0$.

18. Пусть $v(b) = \max_x (c, x)$, где вектор x удовлетворяет неравенствам $x \geq 0$, $Ax \leq b$. Доказать, что $v(b)$ является вогнутой функцией b , и показать, что неравенства

$$\left(\frac{\partial v}{\partial b_k} \right)_+ \leq y_k \leq \left(\frac{\partial v}{\partial b_k} \right)_-$$

справедливы для любого набора условных оценок $y_1, y_2, \dots, y_m$, где $+$ и $-$ обозначают соответственно правую и левую производные.

19. Пусть c — n -мерный вектор. Через I обозначим множество индексов i , для которых $c_i > 0$, через J — множество индексов, для которых $c_j = 0$, а через K — множество индексов k , для которых $c_k < 0$.

Каждому $i \in I$ сопоставим вектор $\alpha_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ с единицей на i -м месте; аналогично каждому $j \in J$ сопоставим вектор $\beta_j = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ с единицей только на j -м месте. Каждой паре индексов $i \in I$, $k \in K$ соотнесем вектор

$$v_{ik} = \left(0, \dots, \frac{1}{c_i}, 0, \dots, -\frac{1}{c_k}, 0, \dots, 0 \right),$$

причем число $1/c_i$ стоит на i -м месте, а число $-1/c_k$ — на k -м. На остальных местах стоят нули.

Обозначим через $T(c)$ матрицу, столбцами которой являются векторы α_i , β_j и v_{ik} . Доказать, что система неравенств $(c, x) \geq 0$, $x \geq 0$ выполняется для тех и только тех векторов x , которые представимы в виде $x = T(c)\omega$ при некотором $\omega \geq 0$.

20. Пусть x_0 и y_0 — соответственно решения задач I и II, а $x_0 + \delta x_0$ и $y_0 + \delta y_0$ — решения задач, получаемых из задач I и II заменой c , b и A на $c + \delta c$, $b + \delta b$ и $A + \delta A$. Доказать, что

$$-(\delta c, \delta x_0) + (y_0 + \delta y_0, \delta A \delta x_0) + (\delta y_0, A \delta x_0) \leq 0$$

и

$$-(\delta y_0, \delta b) + (\delta y_0, \delta A (x_0 + \delta x_0)) + (\delta y_0, A \delta x_0) \geq 0.$$

Указание. Воспользоваться теоремой 5.3.1 о седловой точке.

21. Пусть S — замкнутый, выпуклый, ограниченный многогранник в E^n , причем для всех $y \in S$ $y \geq 0$. Доказать, что существует такой вектор v , что $v > 0$ и $(v, y) \leq 0$ для всех $y \in S$.

Задачи 22—26 основаны на следующей конструкции. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ — данные векторы в n -мерном пространстве, все координаты которых равны 0 или 1, причем (а) единицы занимают в векторах A_i несколько последовательных мест и каждый вектор A_i содержит хотя бы одну единицу; (б) если компоненты, равные 1, стоят в векторе A_i на местах $a, a+1, \dots, b$, в векторе A_j на местах $c, c+1, \dots, d$ и если $a < c$, то $b \leq d$.

Пусть заданы положительные постоянные r_i ($i=1, \dots, n$) и произвольные t_i ($i=1, \dots, n$). Рассмотрим следующую задачу.

Задача А. Минимизировать функцию

$$\lambda X + \sum_{i=1}^n z_i$$

при следующих ограничениях, налагаемых на X и z_i :

$$(A_i, z) \geq t_i - X \quad (i=1, \dots, n),$$

$$0 \leq z_i \leq r_i \quad (i=1, \dots, n),$$

$$\lambda \geq 0.$$

22. Показать, что задача о поставщике из п. 5.11 есть частный случай задачи А.

В дальнейшем будем считать, что множество допустимых векторов непусто.

23. Описать метод решения задачи А при фиксированном X .

24. Показать, что если вектор $z(X) = z_1^0(X) + \dots + z_n^0(X)$ является решением задачи А при фиксированном X , то $z(X)$ представляет собой выпуклую невозрастающую кусочно-линейную функцию X .

25. Решить задачу А до конца в случае, когда $A_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ с единственной единичной компонентой на i -м месте.

26. Опираясь на задачи 23 и 24, описать алгоритм решения общей задачи А.

Комментарии и библиография к главе 5

5.1. Формальная теория линейного программирования появилась вскоре после второй мировой войны, хотя отдельные задачи линейного программирования рассматривались еще в прошлом столетии. Например, отдельные результаты из теории линейных неравенств восходят к ранним работам Вейля [1], Фаркаса [1] и Моцкина [1]. Исчерпывающие данные имеются в сборнике [12].

Данцига обычно называют отцом линейного программирования¹⁾, так как именно он с Дж. фон Нейманом разработал основной вычислительный алгоритм для решения задач линейного программирования. Позднее большое

¹⁾ См. примечание к стр. 143. — *Прим. ред.*

число важных результатов как в теории, так и в ее приложениях было получено Чарнсом и Купером. Чарнс, Купер и Хендерсон [1] изложили введение в теорию линейного программирования и симплекс-алгоритм.

В рассчитанном на читателей среднего уровня учебнике по линейному программированию Гасса [1] содержится ряд вычислительных схем, применимых к различным типам задач, а также обширная библиография приложений этой дисциплины.

Лица с небольшой математической подготовкой, интересующиеся в основном экономической теорией, могут обратиться к книге Дорфмана, Самуэльсона и Солоу [1].

Среди других многочисленных работ по практическим применениям линейного программирования можно указать работы Фергюссона и Саржента [1], а также Рейнфельда и Фогеля [1].

Значительное влияние на развитие теории линейного программирования оказало изучение задач анализа производственных процессов, причем особенно следует отметить результаты Купманса и работы экономистов из комиссии Коульса. Читателю можно рекомендовать двухтомник под редакцией Купманса [2], посвященный этим задачам, а также работы Моргенштерна [1] и Дорфмана [1].

Впервые задача линейного программирования (хотя и не названная так) была решена Хичкоком [1]; она является одним из вариантов транспортной задачи. Метод, примененный им, был одним из видов симплекс-метода. Из современных задач линейного программирования раньше всех была рассмотрена задача о диете, впервые сформулированная и изученная Стиглером [1]. Исторический интерес представляют также задачи о планировании действий военно-воздушного флота, которыми занимались Вуд и Данциг.

Наиболее трудоемкие исследования задач линейного программирования связаны с нефтяной промышленностью. Обзор трудностей и достижений линейного программирования в этой области дается Манном [1].

Транспортная задача, иногда именуемая распределительной задачей Хичкока, является наиболее известной задачей линейного программирования. Этой задаче и ее вариантам посвящена обширная литература (см., например, Канторович [1], Купманс и Рейтер [1], Флуд [1] и Форд и Фулкерсон [3]). Задача о рациональном использовании склада, описанная в настоящей главе, содержится в работе Чарнса и Купера [1]. Различные виды задач анализа производственных процессов связаны с именами Леонтьева [1], Самуэльсона [1] и Купманса [1].

Методы теории линейного программирования сделали основным аппаратом исследования операций. Во многих руководствах по исследованию операций излагаются начальные сведения из теории линейного программирования (см. гл. 11—13 из книги Чёрчмана, Аккофа и Арнофа [1], а также Вайда [1]).

5.2. Интерпретация двойственной задачи линейного программирования еще не вполне выяснена. Подробнее об истолкованиях решения двойственной задачи см. у Самуэльсона [3] и Удзава [3] (см. также Купманс [2]).

5.3. Доказательство леммы 5.3.1 является новым. При этом несколько расширяется база, на которой обычно основываются доказательства теоремы существования и теоремы двойственности линейного программирования.

5.4. Теоремы существования и двойственности являются основными теоремами линейного программирования; почти все остальные результаты базируются на этих двух предложениях. Имеется большое число несколько отличающихся друг от друга вариантов этих теорем; наиболее важные из них принадлежат Данцигу [1], а также Гейлу, Куну и Таккеру [2].

5.5. Эквивалентность теории матричных игр задачам линейного программирования впервые была обнаружена Данцигом [1] и Дж. фон Нейманом. Взаимодействие этих двух математических дисциплин способствовало раз-

виту каждой из них. Основное, что объединяет эти предметы, — это одинаковый характер идей и общая методика.

5.6. Матричное обобщение теорем двойственности и существования было впервые предложено в работе Гейла, Куна и Таккера [2]. Они доказали как теорему 5.6.2, так и ее обобщения. Здесь приведено новое доказательство этой теоремы, а также новая по формулировке и доказательству теорема 5.6.1.

5.7. Задача о рациональном использовании склада была поставлена и решена Чарнсом и Купером [1]. Однако они не дали строгого обоснования оптимальности предложенного ими алгоритма. В настоящей работе такое обоснование проведено. Чарнс и Купер предложили многочисленные обобщения задачи.

5.8. Задача об оптимальном назначении, также как и все ее модификации, была рассмотрена Дж. фон Нейманом [3]. В данном пункте изложен более изящный подход к проблеме, предложенный Данцигом.

5.9. Более половины приложений линейного программирования, описанных в сборнике докладов на конференции 1956 года (см. сборник [6]), относятся к транспортным задачам. В публикациях, касающихся линейного программирования, можно найти множество работ, развивающих вглубь и вширь различные варианты модели, описанной в данном пункте. В этом смысле типичны работы Форда и Фулкерсона [1], [2] и Куна [3].

5.10. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе — красивое приложение теоремы двойственности. Этот результат был получен Фордом и Фулкерсоном [1]. Примерно в то же самое время другие авторы указывали, каким образом многие из комбинаторных проблем теории множеств можно трактовать как приложения теоремы двойственности. Например, пусть P — конечное частично упорядоченное множество, состоящее из элементов $b_1, \dots, b_m$. Цепью называется множество, состоящее из одного элемента или нескольких различных элементов $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$, причем $b_{i_1} \geq b_{i_2} \geq \dots \geq b_{i_k}$. Говорят, что множество дизъюнктивных цепей покрывает P , если каждый элемент P принадлежит некоторой цепи из этого множества. Требуется найти минимальное покрытие P (Данциг и Гофман [1]). Относительно других приложений теоремы двойственности см. Фулкерсон [1], Форд и Фулкерсон [3].

5.11. Задача о поставщике была предложена и частично решена Джекобсом [1]. Другой подход к общей задаче, приведший к алгоритму для ее решения, был дан в работе Гаддума, Гофмана и Соколовского [1]. Их методы применимы к задаче более общего типа (см. задачи 22—26).

Прагер [2] заметил, что задача о поставщике может быть сформулирована как транспортная задача, и поэтому к ней применимы многочисленные специальные методы, разработанные для транспортной задачи.

5.12. Задача о биржевой игре впервые рассмотрена Эрроу и Карлином [1].

5.13. Решение задачи 10 было впервые дано Самуэльсоном. Обобщение этого результата, воплощенное в формулировке задачи 20, было сделано Бекманом. Формулировки задач 13 и 14 взяты из работ Смита [1]. Задача 18 принадлежит Самуэльсону [3]. Задача 19 предложена Удзава (не опубликована). Задачи 22—26 основаны на результатах Гаддума, Гофмана и Соколовского [1].

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ТЕОРИИ ИГР

Мы уже видели, что большое количество разнообразных задач сводится если не к теории игр, то к теории линейного программирования. Всякому, кто решает конкретную задачу, важнее всего получить численный ответ. В этой главе мы изучим сравнительно простые, но эффективные методы, позволяющие получать численные ответы в задачах линейного программирования и теории игр. Мы сконцентрируем свое внимание на двух таких методах: симплекс-методе Данцига решения задач линейного программирования и итеративном алгоритме Брауна определения значения игры.

Оба эти метода могут быть запрограммированы для машинного счета и практически сходятся гораздо быстрее, чем это гарантируется теорией. Именно существование этих численных методов объясняет в значительной мере огромный интерес к линейному программированию и теории игр и их практическое значение.

Первые два пункта настоящей главы посвящены описанию и исследованию симплекс-метода; в третьем пункте демонстрируется применение этого метода к решению задачи о смесях. В качестве образца использования других методов для решения частных задач линейного программирования в п. 6.4 мы приведем решение задачи о потоке через сеть. В последнем пункте рассматривается алгоритм Брауна, а также приближенный метод вычисления значения игры при помощи дифференциальных уравнений.

Эта глава является лишь введением в вычислительные методы, применяемые в теории принятия решений. Следует помнить, что использование особенностей конкретной задачи в сочетании с общими методами теории часто приводит к решению скорее, чем шаблонное применение стандартного вычислительного алгоритма. Последнее по необходимости справедливо в отношении задач нелинейного программирования (см. гл. 7), для которых общих вычислительных методов пока не существует. В соответствии с этим в настоящей главе основное внимание будет уделено взаимодействию общей теории и вычислительного процесса.

6.1 Симплекс-метод. Рассмотрим задачу I линейного программирования: найти вектор x , максимизирующий функцию $L(x) = (c, x)$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad x_j \geq 0. \quad (6.1.1)$$

Множество векторов x , удовлетворяющих ограничениям, будем обозначать через S .

Опишем теперь вычислительный процесс получения решения задачи I, который называется симплекс-методом. (Симплекс-алгоритм для двойственной задачи описан в п. 6.2.) Обоснования различных шагов процесса даются по ходу изложения.

По существу этот метод представляет собой систематический способ последовательного определения надлежащих крайних точек множества допустимых векторов S . Поскольку функция, подлежащая максимизации, линейна, а множество S выпукло, максимум (если он существует) должен достигаться в крайней точке S .

Симплекс-метод начинается с первоначального выбора некоторой крайней точки. Это легко сделать, если ограничения представляют собой линейные неравенства (см. подпункт Д данного пункта). Как только некоторая крайняя точка оказывается известной, можно выяснить, является ли она решением задачи. Если нет, то мы ищем новую крайнюю точку S , которая в большей степени может претендовать на максимизацию формы L . Направление в S , по которому мы двигаемся для определения этой новой крайней точки, является, по существу, направлением градиента функции L . После конечного числа шагов мы либо получим решение, либо убедимся в том, что максимум бесконечен и задача решения не имеет.

Приступим теперь к детальному изложению метода.

А. Введение свободных переменных. Первый шаг симплекс-метода состоит в превращении неравенств (6.1.1) в равенства. Это достигается введением m новых переменных $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$, называемых свободными:

$$x_{n+k} = b_k - \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \quad (k = 1, \dots, m). \quad (6.1.2)$$

Если перейти от матрицы A к матрице

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & \overbrace{1 \dots 0}^m \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 \dots 1 \end{array} \right\|,$$

а от вектора $\mathbf{x}$ к вектору $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$, то система ограничений $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ в соответствии с (6.1.2) переписывается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \text{ и } \tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}. \quad (6.1.3)$$

Если мы теперь вместо вектора $\mathbf{c}$ рассмотрим новый вектор $\tilde{\mathbf{c}} = (c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_{n+m})$, где $c_{n+1} = \dots = c_{n+m} = 0$, то наша задача линейного программирования приобретет следующий вид: среди всех векторов $\tilde{\mathbf{x}}$, удовлетворяющих условиям $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ и $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$, найти такой вектор $\tilde{\mathbf{x}}_0$, что

$$(\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{x}}_0) = \max_{\tilde{\mathbf{x}}} (\tilde{\mathbf{c}}, \tilde{\mathbf{x}}).$$

Вычислительный процесс применяется только к последней из этих двух эквивалентных задач. В дальнейшем мы поэтому будем опускать тильды в (6.1.3) и считать, что наши первоначальные ограничения уже имеют вид (6.1.3). Переходя к новым обозначениям, мы получим окончательную формулировку задачи: максимизировать функцию $(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda})$ при условиях $\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, где $\mathbf{A}$ есть $m \times n$ -матрица. Обозначим через $\mathbf{p}_j$ j -й столбец матрицы $\mathbf{A}$, а через $\mathbf{p}_0$ — вектор $\mathbf{b}$. Каждый из векторов $\mathbf{p}_j$ имеет m компонент.

Чтобы избежать некоторых несущественных технических трудностей, связанных со спецификой симплекс-метода, сделаем пока следующее предположение.

Предположение 6.1.1. Вектор $\mathbf{p}_0$ не может быть представлен в виде положительной линейной комбинации менее чем r векторов $\mathbf{p}_j$, где r — ранг матрицы $\mathbf{A}$.

В большинстве случаев ранг матрицы $\mathbf{A}$ совпадает с числом ее строк. Это всегда так, если первоначальная система ограничений состоит только из неравенств, и матрица $\mathbf{A}$ есть результат расширения первоначальной матрицы ограничений с помощью свободных переменных. Тогда совокупность столбцов, отвечающих свободным переменным, образует невырожденную подматрицу. Будем теперь предполагать, что матрица $\mathbf{A}$ имеет ранг m , равный числу ее строк. Предоставим читателю рассмотреть модификацию процесса для случая, когда ранг матрицы $\mathbf{A}$ меньше m .

Известно, что предположение 6.1.1 не умаляет общности рассуждений. После того как мы изложим метод нахождения решения при этом предположении, мы покажем, как поступить в общем случае.

(Если имеет место вырождение, то следующая крайняя точка может быть найдена уже не единственным образом, и появляется определенная степень произвола. Это скорее неудобство, чем

существенное затруднение: в случае вырождения процесс просто несколько усложняется, и проведение его требует большей тщательности.)

Б. Характеристика крайних точек. Обозначим через Λ множество допустимых векторов λ , т. е. векторов, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n = p_0, \quad \lambda_i \geq 0. \quad (6.1.4)$$

► **Лемма 6.1.1.** Если λ — крайняя точка множества Λ , то вектор λ имеет не более чем t ненулевых компонент.

Доказательство. Предположим, что вопреки утверждению леммы для некоторой крайней точки $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1} > 0$. Рассмотрим матрицу $A = \|p_1 \dots p_{m+1}\|$ и систему однородных линейных уравнений $Az = 0$. Так как число неизвестных явно превосходит ранг матрицы A , существует нетривиальное решение $z^0 = (z_1^0, \dots, z_{m+1}^0)$ этой системы. Дополним z^0 до вектора $\tilde{z}^0 = (z_1^0, \dots, z_{m+1}^0, 0, \dots, 0)$, добавив $n - m - 1$ нулевых координат. Выберем ϵ настолько малым, чтобы все компоненты векторов

$$\lambda' = \lambda + \epsilon \tilde{z}^0 \text{ и } \lambda^2 = \lambda - \epsilon \tilde{z}^0$$

были неотрицательными. Поскольку $A\lambda^1 = b$ и $A\lambda^2 = b$, должно быть $\lambda^1, \lambda^2 \in \Lambda$. Но $\lambda^1 \neq \lambda^2$ и

$$\lambda = \frac{1}{2} (\lambda^1 + \lambda^2).$$

Это противоречит предположению о том, что точка λ — крайняя. Лемма доказана.

Предположение 6.1.1 в этой лемме не использовалось, но будет использовано в следующей.

► **Лемма 6.1.2.** Если $\lambda \in \Lambda$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ и $\lambda_{m+1} = \dots = \lambda_n = 0$, то λ есть крайняя точка множества Λ .

Доказательство. Предположим, что существуют такие точки $\lambda^1, \lambda^2 \in \Lambda$, что

$$\lambda = \frac{1}{2} (\lambda^1 + \lambda^2).$$

Поскольку последние $n - m$ компонент вектора λ равны нулю, последние $n - m$ компонент векторов λ^1 и λ^2 — также нули.

Следовательно, $A\tilde{\lambda}^1 = p_0$ и $A\tilde{\lambda}^2 = p_0$, где $\tilde{\lambda}^i = (\lambda_1^i, \lambda_2^i, \dots, \lambda_m^i)$. Тогда $A(\tilde{\lambda}^1 - \tilde{\lambda}^2) = 0$. Если $\tilde{\lambda}^1 - \tilde{\lambda}^2 \neq 0$, то можно выбрать настолько малое ϵ , что

$$\mu = \tilde{\lambda}^1 + \epsilon(\tilde{\lambda}^1 - \tilde{\lambda}^2) \geq 0 \text{ и } \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \dots + \mu_n p_n = p_0.$$

Если какая-нибудь из компонент вектора $\tilde{\lambda}^1 - \tilde{\lambda}^2$ отрицательна, то мы можем увеличить ϵ настолько, чтобы по крайней мере одна компонента вектора μ обратилась в 0, а остальные его компоненты остались неотрицательными. Таким образом, будет получено представление вектора p_0 линейной комбинацией менее чем m векторов p_i , что противоречит предположению 6.1.1. Если вектор $\tilde{\lambda}^1 - \tilde{\lambda}^2$ обладает положительной компонентой, то мы выберем ϵ отрицательным и проведем аналогичное рассуждение. Следовательно, $\lambda^1 = \lambda^2$ и поэтому λ является крайней точкой.

В. Переход от старой крайней точки к новой. Предположим, что вектор λ^0 имеет компоненты $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0 > 0, \lambda_{m+1}^0 = \dots = \lambda_n^0 = 0$ и удовлетворяет условиям (6.1.4). (Вопрос об отыскании такой точки будет рассмотрен ниже.) Тогда, согласно лемме (6.1.2), λ^0 — крайняя точка. Отсюда следует, что векторы $p_1, \dots, p_m$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис m -мерного пространства. В противном случае существует такой ненулевой вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, что

$$\sum_{i=1}^m \mu_i p_i = 0,$$

и тогда

$$\lambda^0 = \frac{(\lambda^0 + \epsilon \mu) + (\lambda^0 - \epsilon \mu)}{2}.$$

При ϵ достаточно малом $\lambda^0 + \epsilon \mu$ суть различные ненулевые допустимые векторы, а это противоречит выводу, что λ^0 — крайняя точка. Следовательно, для каждого вектора p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) существует такой набор чисел x_{ji} ($j = 1, 2, \dots, m$), что

$$p_i = \sum_{j=1}^m p_j x_{ji}.$$

Назовем матрицу $X = \|x_{ji}\|$ ($j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$) „таблицей“, связанной с крайней точкой λ^0 . Соответствующие базисные векторы $p_1, p_2, \dots, p_m$, участвующие в разложении p_0 с коэффициентами λ_j^0 , будем называть базисными векторами крайней точки λ^0 .

Мы можем, очевидно, переписать (6.1.4) в виде

$$\lambda_1^0 p_1 + \dots + \lambda_m^0 p_m + \theta \left(p_k - \sum_{j=1}^m p_j x_{jk} \right) = p_0,$$

где k — произвольный индекс между $m+1$ и n . Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\sum_{j=1}^m (\lambda_j^0 - \theta x_{jk}) p_j + \theta p_k = p_0. \quad (6.1.5)$$

Параметр θ можно увеличивать до тех пор, пока коэффициенты при $\mathbf{p}_k$ и $\mathbf{p}_j$ ($j=1, \dots, m$) в (6.1.5) остаются неотрицательными; при этом мы движемся по множеству Λ так, что в разложении вектора $\mathbf{p}_0$ увеличивается коэффициент при $\mathbf{p}_k$. Пусть λ^1 — крайняя точка, порожденная разложением (6.1.5) вектора $\mathbf{p}_0$.

Рассмотрим для некоторого фиксированного k функцию

$$\begin{aligned} (\mathbf{c}, \lambda^1) &= \sum_{j=1}^m (\lambda_j^0 - \theta x_{jk}) c_j + \theta c_k = (\mathbf{c}, \lambda^0) + \theta \left(c_k - \sum_{j=1}^m x_{jk} c_j \right) = \\ &= (\mathbf{c}, \lambda^0) - \theta (z_k - c_k), \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

где z_k неявно определяется из последнего уравнения. Разберем теперь отдельно три случая.

Случай 1. Существует номер k_0 ($m+1 \leq k_0 \leq n$), для которого $z_{k_0} - c_{k_0} < 0$, где

$$z_k = \sum_{j=1}^m x_{jk} c_j,$$

и $x_{jk_0} \leq 0$ для $j=1, \dots, m$. В этом случае $\lambda_j^0 - \theta x_{jk_0} \geq 0$ и, следовательно, λ^1 принадлежит Λ при любом $\theta > 0$. Мы видим, что если θ (а вместе с ними и λ_{k_0}) стремится к $+\infty$, то функция $(\mathbf{c}, \lambda^1)$ неограниченно возрастает и задача не имеет решения.

Случай 2. Существует номер k_0 ($m+1 \leq k_0 \leq n$), для которого $z_{k_0} - c_{k_0} < 0$ и $x_{jk_0} > 0$ при некотором j . Пусть

$$\theta = \min_j \frac{\lambda_j^0}{x_{jk_0}},$$

где минимум берется по тем j , для которых $x_{jk_0} > 0$. Ясно, что $\theta > 0$ и $\lambda_j^0 - \theta x_{jk_0} \geq 0$ для всех $j=1, \dots, m$, причем хотя бы для одного j имеет место равенство. Однако два таких члена не могут одновременно обращаться в нуль; если бы это произошло, то вектор $\mathbf{p}_0$ был бы разложен в положительную линейную комбинацию менее чем m векторов $\mathbf{p}_j$ вопреки предположению 6.1.1. Если обращаются в нуль одновременно две компоненты, то говорят, что имеет место вырождение. При определенном выше значении θ вектор λ^1 будет иметь компоненты $\lambda_j = \lambda_j^0 - \theta x_{jk_0}$ для $j=1, \dots, m$, $\lambda_{k_0} = \theta$ и нули на остальных местах. Вектор λ^1 имеет m ненулевых компонент и поэтому в силу леммы 6.1.2 соответствует крайней точке множества Λ . Кроме того, $(\mathbf{c}, \lambda^1) > (\mathbf{c}, \lambda^0)$, так что крайняя точка λ^1 придает целевой функции большее значение, чем λ^0 .

Случай 3. Если $z_k - c_k \geq 0$ для всех k , то λ^0 — оптимальный вектор. Чтобы доказать это, установим, что из

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i = p_0$$

следует $(\lambda, c) \leq (\lambda^0, c)$. Заметим, что $z_k = c_k$ для $1 \leq k \leq m$. В условиях случая 3 отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m x_{ji} c_j = \sum_{j=1}^m c_j \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{ji}.$$

Доказательство будет завершено, если мы покажем, что

$$\lambda_j^0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{ji}.$$

Действительно,

$$p_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m x_{ij} p_j = \sum_{j=1}^m p_j \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{ji} = \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 p_j.$$

Из предположения 6.1.1 вытекает равенство коэффициентов в разложениях вектора p_0 по векторам p_j , что и завершает доказательство.

Г. Формализация. Пусть имеется крайняя точка λ^0 и базис $p_1, \dots, p_m$. Вычислим компоненты x_{ik} , исходя из уравнений

$$p_k = \sum_{j=1}^m p_j x_{jk} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

и составим таблицу

	p_1	p_2	$\dots$	p_k	$\dots$	p_n	p_0	
p_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1k}	$\dots$	x_{1n}	λ_1^0	c_1
p_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2k}	$\dots$	x_{2n}	λ_2^0	c_2
$\vdots$								
p_m	x_{m1}	x_{m2}	$\dots$	x_{mk}	$\dots$	x_{mn}	λ_m^0	c_m
$z:$	z_1	z_2	$\dots$	$z_k = \sum_{j=1}^m x_{jk} c_j$	$\dots$	z_n		
$z - c:$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\dots$	$z_k - c_k$	$\dots$	$z_n - c_n$		

Случай 1. Если $z_i - c_i \geq 0$ для всех i , то вектор $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ является решением задачи максимизации.

Случай 2. Если для некоторого k_0 выполняются неравенства $z_{k_0} - c_{k_0} < 0$ и $x_{ik_0} \leq 0$ (последнее для всех i), то $\max(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \infty$, где максимум берется по всем допустимым $\boldsymbol{\lambda}$.

Случай 3. Если неравенства $z_{k_0} - c_{k_0} < 0$ и $x_{ik_0} > 0$ выполняются для некоторого k_0 и некоторого i , то мы можем получить новую крайнюю точку $\boldsymbol{\lambda}^1$, для которой $(\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}^1) > (\mathbf{c}, \boldsymbol{\lambda}^0)$. Практически лучше всего выбирать такой индекс, для которого величина $z_{k_0} - c_{k_0}$ имеет наибольшее по абсолютной величине значение. Это ведет к уменьшению числа итераций симплекс-метода.

Вектор $\boldsymbol{\lambda}^1$ имеет компоненты $\lambda_i^1 = \lambda_i^0 - \theta x_{ik_0}$ для $i = 1, \dots, m$

$$\lambda_{k_0} = \theta = \min_{x_{ik_0} > 0} \frac{\lambda_i^0}{x_{ik_0}},$$

а остальные компоненты — нули. Новой крайней точке соответствует новый базис и новая таблица.

Обозначим через l_0 индекс, для которого $\lambda_{l_0}^0 - \theta x_{l_0 k_0} = 0$. Тогда базисными векторами, связанными с $\boldsymbol{\lambda}^1$, будут $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{l_0-1}, \mathbf{p}_{l_0+1}, \dots, \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_{k_0}$.

Таблица $\mathbf{Y} = \|y_{ij}\|$ для $\boldsymbol{\lambda}^1$ уже может быть построена. С этой целью предположим для простоты, что $l_0 = 1$. Тогда новый базис состоит из векторов $\mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_m, \mathbf{p}_{k_0}$. Имеем

$$\mathbf{p}_i = \sum_{j=2}^m y_{ji} \mathbf{p}_j + y_{k_0 i} \mathbf{p}_{k_0}. \quad (6.1.7)$$

Теперь y_{ij} можно выразить через старые x_{ij} . В самом деле, поскольку в силу предположения 6.1.1 x_{1k_0} не может равняться нулю, мы получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= - \sum_{j=2}^m \frac{x_{jk_0}}{x_{1k_0}} \mathbf{p}_j + \frac{1}{x_{1k_0}} \mathbf{p}_{k_0}, \\ \mathbf{p}_i &= - x_{1i} \sum_{j=2}^m \frac{x_{jk_0}}{x_{1k_0}} \mathbf{p}_j + \frac{x_{1i}}{x_{1k_0}} \mathbf{p}_{k_0} + \sum_{j=2}^m x_{ji} \mathbf{p}_j \quad (i \geq 2). \end{aligned}$$

Сравнивая с (6.1.7), мы имеем

$$y_{ij} = \begin{cases} x_{ji} - \frac{x_{1i} x_{jk_0}}{x_{1k_0}} & (j \neq k_0), \\ \frac{x_{1i}}{x_{1k_0}} & (j = k_0). \end{cases} \quad (6.1.8)$$

В общем случае, когда вектор $\mathbf{p}_{k_0}$ заменяется на $\mathbf{p}_{r_0}$, индекс 1 в (6.1.8) нужно всюду заменить на r_0 . После того как таблица $\mathbf{Y}$ для новой крайней точки λ^1 составлена, мы оказываемся подготовленными к повторению процесса и отысканию следующей крайней точки, в которой функция $(\mathbf{c}, \lambda)$ приобретает еще большее значение. Мы будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не обнаружим, что решения не существует или пока не окажется, что очередной вектор λ^1 оптимален. Решение будет достигнуто через конечное число шагов, поскольку число различных крайних точек конечно.

Д. Построение исходной крайней точки. Ограничения задачи I линейного программирования имеют вид $\mathbf{A}\lambda \leq \mathbf{b}$, $\lambda \geq 0$. Расширенная матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ с добавленными коэффициентами при свободных переменных записывается так:

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & \overbrace{1 \dots 0}^m \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 \dots 1 \end{array} \right\| = \|\mathbf{A}, \mathbf{I}\|.$$

Если $\mathbf{b}$ — неотрицательный вектор, то последние m столбцов матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ образуют базис, отвечающий крайней точке $(0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m)$. Если некоторые из координат отрицательны, то это не так, ибо тогда в линейной комбинации векторов $\mathbf{p}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+2}, \dots, \mathbf{p}_{n+m}$, представляющей $\mathbf{p}_0$, встретятся отрицательные коэффициенты (очевидно, коэффициенты эти суть числа $b_1, b_2, \dots, b_m$). В этом случае для получения исходной крайней точки мы вводим так называемые "искусственные переменные". Допустим, что отрицательны первые r координат $b_1, b_2, \dots, b_r$, а остальные координаты неотрицательны. Рассмотрим расширенную матрицу $\mathbf{A}^* = \|\mathbf{A}, \mathbf{I}_m, \mathbf{P}_r\|$, где

$$\mathbf{P}_r = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -1 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|,$$

т. е. $\mathbf{P}_r$ есть такая $m \times r$ -матрица, у которой $p_{li} = -1$ ($1 \leq l \leq r$), а остальные $p_{ij} = 0$. Выберем коэффициенты $c_{n+m+1} = c_{n+m+2} =$

$= \dots = c_{n+m+r} = -M$, где M — настолько большое положительное число, что у вектора λ , максимизирующего (λ, c) (если только он существует), последние r компонент равны нулю.

Последние m столбцов расширенной матрицы A^* образуют базис. Таким образом, мы получаем исходную крайнюю точку. Этот стандартный прием позволяет сделать вектор b неотрицательным и применить обычный вычислительный алгоритм, смысл которого состоит в умножении соответствующих уравнений на -1 , что не влияет на выбор исходного базиса. Метод добавления искусственных переменных применим всегда, когда иным путем крайнюю точку указать затруднительно. Его недостаток — увеличение числа итераций при применении симплекс-метода.

Е. Исключение предположения о невырожденности. Иногда бывает, что вектор p_0 можно представить линейной комбинацией менее чем m векторов p_i . Тогда равенство

$$\theta = \min_{\substack{j \\ x_{jk_0} > 0}} \frac{\lambda_j^0}{x_{jk_0}}$$

может достигаться на двух или более индексах. В этом случае изменения базиса могут привести к циклическому повторению нескольких крайних точек. Говоря более конкретно, если на некотором шаге встретились равные значения для θ , то нельзя быть уверенным в том, что последующие итерации обязательно приведут к крайнему вектору, увеличивающему целевую функцию.

Это затруднение можно обойти следующей модификацией первоначальной задачи. Оставим векторы p_i неизменными, но заменим p_0 на

$$p_0(\epsilon) = p_0 + \sum_{j=1}^n \epsilon^j p_j,$$

где ϵ — неопределенный, произвольно малый положительный параметр. Мы опишем сейчас метод, для которого выбор ϵ не существен, и его отличие от общего симплекс-метода состоит в том, что при его применении требуется некоторая дополнительная тщательность. Рассмотрим базис с множеством индексов I и таблицей X (очевидно, что первоначальная и измененная задачи имеют один и тот же базис). Если

$$\sum_{i \in I} \lambda_i p_i = p_0,$$

то

$$\sum_{i \in I} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^n \epsilon^j x_{ij} \right) p_i = p_0(\epsilon).$$

Следовательно,

$$\lambda_r(\epsilon) = \lambda_r + \epsilon^r + \sum_{j \in I} \epsilon^j x_{rj}.$$

Степень ϵ , участвующая в представлении некоторого $\lambda_r(\epsilon)$, не участвует в представлении других. Допустимый вектор $\lambda_r(\epsilon)$ придает целевой функции значение

$$(c, \lambda(\epsilon)) = f[\lambda(\epsilon)] = \sum_{i \in I} c_i \lambda_i + \sum_{j=1}^n \epsilon^j z_j,$$

причем смысл z_j тот же, что и раньше. Повторяя выкладку (6.1.5) для измененной задачи, мы получаем

$$p_0(\epsilon) = \sum_{i \in I} \left(\lambda_i + \sum_{j=1}^n \epsilon^j x_{ij} - \theta x_{ik} \right) p_i + \theta p_k.$$

откуда выводим, что новому допустимому вектору $\lambda^1(\epsilon)$ отвечает значение целевой функции

$$f[\lambda^1(\epsilon)] = f[\lambda(\epsilon)] + \theta(c_k - z_k).$$

Теперь, как и в подпункте Е, нам предстоит рассмотреть три взаимно исключающие друг друга возможности.

(а) Если $z_k - c_k \geq 0$ для всех k , то λ — максимальный вектор.

(б) Если $z_k - c_k < 0$ и $x_{ik} \leq 0$ для некоторого k и для всех $i \in I$, то, независимо от ϵ , $f(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \infty$, и задача не имеет решения.

(в) Если для некоторого k_0 имеет место $z_{k_0} - c_{k_0} < 0$ и $x_{ik_0} > 0$ для некоторого $i \in I$, то положим

$$\theta(\epsilon) = \min_i \frac{\left(\lambda_i + \sum_{j=1}^n \epsilon^j x_{ij} \right)}{x_{ik_0}},$$

причем минимум берется по тем i , для которых $x_{ik_0} > 0$. Практически, как уже указывалось, разумно выбирать тот индекс k_0 , которому отвечает наименьшее (алгебраически) значение $z_{k_0} - c_{k_0}$. Если

$$\min_{\substack{i \\ x_{ik_0} > 0}} \frac{\lambda_i}{x_{ik_0}}$$

достигается на единственном индексе i_0 , то это же верно и для $\theta(\epsilon)$ при достаточно малом ϵ . Если $\min_i (\lambda_i / x_{ik_0})$ достигается на двух или более индексах (множество всех таких индексов обозначим через J), то мы выбираем тот индекс из J , для которого отношение x_{i1} / x_{ik_0}

минимально (алгебраически). Если последний минимум достигается хотя бы на двух индексах из J , то мы переходим к сравнению отношений x_{i2}/x_{ik} , x_{i3}/x_{ik} , ... и т. д.; определяем минимумы таких отношений по последовательно уменьшающимся множествам индексов и делаем это до тех пор, пока минимум не будет достигаться на единственном индексе i_0 . Этот процесс должен закончиться, так как все $\lambda(\epsilon)$ представляют собой различные полиномы от ϵ . Наконец, вектор с индексом i_0 заменяется вектором с индексом k_0 , после чего процесс может быть повторен.

Вычислять $\lambda^1(\epsilon)$ нет необходимости, так как для следующего шага алгоритма не требуется ничего, кроме компонент λ_i нового базиса первоначальной задачи. Читатель может заметить, что предположение 6.1.1 о невырожденности выполняется для любой модифицированной задачи при достаточно малом положительном ϵ . Следовательно, модифицированный процесс непременно приводит к единственному решению модифицированной задачи. Положив $\epsilon = 0$, мы получаем решение исходной задачи.

6.2*. Вспомогательные варианты симплекс-метода. В этом пункте мы остановимся на некоторых выводах из симплекс-метода и его видоизменениях.

А. Решение двойственной задачи. Покажем сначала, что если известно решение двойственной задачи II, то решение задачи I может быть получено немедленно. Это поможет уяснить суть двойственного симплекс-алгоритма, который будет изложен ниже, в подпункте Б.

Симплекс-методом решается задача отыскания вектора λ , максимизирующего функцию (c, λ) при ограничениях $A\lambda = b$ и $\lambda \geq 0$. Двойственная задача заключается в отыскании вектора y , минимизирующего функцию (y, b) при ограничениях $yA \geq c$. Эта формулировка остается справедливой, если A есть расширенная матрица, полученная добавлением свободных переменных и введением соответствующих им нулевых коэффициентов c . В этом случае условия $yA \geq c$ уже содержат необходимые ограничения вида $y_i \geq 0$.

В результате применения симплекс-алгоритма мы приходим к базису B , содержащему подматрицу A со столбцами, представляющими собой базисные векторы, так что

$$B\lambda^0 = b, \quad \lambda^0 = B^{-1}b,$$

где λ^0 есть решение задачи I и вектор p_0 обозначен через b . Обозначим через c_B вектор, компонентами которого служат компоненты вектора c , соответствующие базису B . Положим $y^0 = c_B B^{-1}$. Записав A в виде $\|B, P\|$, где P есть множество векторов-столбцов матрицы A , не входящих в базис B , мы имеем

$$y^0 A = y^0 \|B, P\| = (c_B, c_B B^{-1} P). \quad (6.2.1)$$

Равенство (6.2.1) означает, что $y^0 A$ есть вектор, первые m компонент которого суть компоненты c_B , а последние $n - m$ — компоненты вектора $c_B B^{-1}P$. Заметим также, что таблица, связанная с базисом B , имеет вид $\|I, B^{-1}P\|$, если векторы B расположены в ее начале. Следовательно, вектор $(c_B, c_B B^{-1}P)$ тождествен вектору z (см. стр. 197) при базисе B ; и поскольку B — оптимальный базис, $z \geq c$. Таким образом, y^0 — допустимый вектор двойственной задачи. Далее,

$$(y^0, b) = (c_B B^{-1}, b) = (c_B, B^{-1}b) = (c, \lambda^0). \quad (6.2.2)$$

Из следствия 5.4.1 вытекает, что вектор y^0 является для двойственной задачи оптимальным.

Б. Двойственный симплекс-алгоритм. В дальнейшем мы будем называть симплекс-метод п. 6.1 прямым симплекс-методом в отличие от двойственного симплекс-метода, описываемого ниже. Двойственный симплекс-алгоритм представляет собой другой алгоритм для решения задачи I. Он называется двойственным алгоритмом потому, что основа его применимости естественным образом связана с решением двойственной задачи. В конце пункта мы кратко обсудим достоинства и недостатки обоих алгоритмов.

Вектор λ^0 является решением задачи I, если для соответствующей таблицы X и соответствующего базиса B выполнено неравенство $z_j - c_j \geq 0$ для всех j , где

$$z_k = \sum_{j \in B} c_j x_{jk},$$

причем суммирование ведется по индексам, соответствующим базисным векторам. Основной смысл изменяющих базис преобразований состоит в исключении шаг за шагом отрицательных компонент $z_j - c_j$, причем на каждом шаге λ остается допустимым вектором.

При вычислениях двойственным симплекс-методом вектор $z - c$ всегда неотрицателен, но допускаются представления λ вектора p_0 с компонентами произвольного знака. Иначе говоря, на каждом шаге решения мы имеем дело с вектором, допустимым для двойственной задачи, и процесс продолжается до тех пор, пока не будет получен вектор, допустимый для исходной задачи. Новый базис получается из предыдущего заменой вектора, соответствующего отрицательной компоненте, новым вектором. Решение получается после конечного числа таких шагов.

Поскольку мы здесь интересуемся лишь основными чертами двойственного алгоритма и не касаемся частных случаев, мы примем следующее допущение о невырожденности.

Предположение 6.2.1. Ни для одного допустимого вектора двойственной задачи y в неравенствах $yA \geq c$ равенство не может достигаться более чем в m строках.

Формально процесс описывается следующим образом. Допустим, что мы располагаем базисом из векторов-столбцов $q_1, q_2, \dots, q_m$, матрицу которого обозначим через Q , так что $Qu = b$. Компоненты вектора u не обязательно неотрицательны. Пусть X — таблица, связанная с Q , а через c_q обозначен вектор, имеющий своими компонентами компоненты вектора c , отвечающие столбцам матрицы Q . Предположим, кроме того, что неравенство $z_j - c_j \geq 0$ выполняется для всех j , где

$$z_j = \sum_{i \in Q} c_i x_{ij}.$$

В разделе А данного пункта мы показали, что последнее эквивалентно утверждению, что $y = c_q Q^{-1}$ есть допустимый вектор для двойственной задачи. Согласно допущению 6.2.1, равенства в неравенствах $yA \geq c$ достигаются как раз для тех компонент, которые соответствуют базисным векторам. Для остальных компонент имеют место строгие неравенства.

Если все компоненты $u_i \geq 0$, то, как мы видели при разборе прямого симплекс-алгоритма, u — оптимальный вектор.

Пусть теперь r_0 — тот индекс, для которого u_i — наибольшая по абсолютной величине отрицательная координата. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $x_{r_0 j} \geq 0$ для всех j , то не существует допустимых векторов, удовлетворяющих ограничениям задачи I.

Доказательство. Аналогично (6.1.5) мы имеем

$$p_0 = \sum_{i \in Q} (u_i - \theta x_{ik}) q_i + \theta q_k, \quad (6.2.3)$$

где k — произвольный индекс, а θ — некоторое вещественное число. Предположим, что существует представление

$$p_0 = \sum_{j=1}^m \lambda_j q_{k_j},$$

причем $\lambda_j \geq 0$. Полагая последовательно в (6.2.3) $\theta = \lambda_j$, $k = k_j$ и суммируя по j , мы получаем

$$mp_0 = \sum_{i \in Q} [mu_i - \sum_j \lambda_j x_{ik_j}] q_i + p_0,$$

или

$$p_0 = \sum_{i \in Q} \left[\frac{m}{m-1} u_i - \frac{\sum_j \lambda_j x_{ik_j}}{m-1} \right] q_i. \quad (6.2.4)$$

Поскольку векторы $\mathbf{q}_l$ образуют базис, коэффициенты в (6.2.4) должны равняться u_l . В частности,

$$u_{r_0} = \frac{m}{m-1} u_{r_0} - \frac{\sum_j \lambda_j x_{r_0 k_j}}{m-1}$$

или

$$0 = \frac{1}{m-1} u_{r_0} - \frac{\sum_j \lambda_j x_{r_0 k_j}}{m-1}.$$

Последнее равенство противоречит системе неравенств $u_{r_0} < 0$, $\lambda_j \geq 0$ и $x_{r_0 k} \geq 0$ (для всех k). Поэтому мы не можем прийти к допустимому вектору прямой задачи. Так как двойственная задача имеет допустимые векторы ($\mathbf{c}_Q \mathbf{Q}^{-1}$), это означает, что двойственная целевая функция стремится к $-\infty$.

Случай 2. Пусть $u_{r_0} < 0$ и $x_{r_0 j} < 0$ для некоторого j (индекс j отвечает вектору, заведомо не входящему в базис).

Пусть k_0 — тот индекс, для которого достигается

$$\min_{\substack{j \\ x_{r_0 j} < 0}} \left(\frac{z_j - c_j}{-x_{r_0 j}} \right) = \alpha.$$

Из предположения о невырожденности легко следует, что такой индекс единствен. Выберем теперь параметр θ в (6.2.3) таким, чтобы коэффициент при $\mathbf{q}_{r_0}$ обратился в нуль, а именно

$$\theta = \frac{u_{r_0}}{x_{r_0 k_0}}.$$

Так как и u_{r_0} и $x_{r_0 k_0}$ отрицательны, то θ положительно. Новый базис получается из старого заменой $\mathbf{q}_{r_0}$ на $\mathbf{q}_{k_0}$. Коэффициентами в новом представлении $\mathbf{p}_0$ будут

$$\tilde{u}_l = u_l - \theta x_{l k_0} \quad \text{и} \quad \tilde{u}_{k_0} = \theta. \quad (6.2.5)$$

Используя преобразование базиса (6.1.8) и учитывая определение числа α , нетрудно показать, что для нового базиса $\tilde{\mathbf{Q}}$ вектор $\tilde{\mathbf{z}} - \tilde{\mathbf{c}}$ неотрицателен и, следовательно, $\mathbf{c}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}$ есть допустимый вектор двойственной задачи. Из сравнения с (6.2.2) мы получаем

$$(\mathbf{c}_{\tilde{\mathbf{Q}}} \tilde{\mathbf{Q}}^{-1}, \mathbf{b}) = \sum_{l \in \tilde{\mathbf{Q}}} \tilde{u}_l c_l = \sum_{l \in \mathbf{Q}} u_l c_l - \theta z_{k_0} + \theta c_{k_0}$$

и

$$(\mathbf{c}_Q \mathbf{Q}^{-1}, \mathbf{b}) = \sum_l u_l c_l.$$

Поэтому

$$(c_Q Q^{-1}, b) - (c_{\tilde{Q}} \tilde{Q}^{-1}, b) = \theta (z_{k_0} - c_{k_0}) > 0,$$

так как $\theta > 0$ и $z_{k_0} - c_{k_0} > 0$. Из предположения 6.2.1 вытекает, что вектор $c_{\tilde{Q}} \tilde{Q}^{-1}$ является лучшим приближением к решению двойственной задачи, чем $c_Q Q^{-1}$. Оба эти вектора являются допустимыми крайними точками, так что процесс за конечное число шагов должен привести к неотрицательному вектору u .

Преимущество двойственного симплекс-метода состоит в том, что для решения некоторых типов задач он требует значительно меньшего числа итераций, чем обычный симплекс-метод. Рассмотрим, например, задачу отыскания

$$\min (c, y) \quad (6.2.6)$$

при ограничениях

$$y \geq 0, \quad yA \geq b. \quad (6.2.7)$$

Эта задача может быть преобразована к задаче максимизации заменой A на $-A$, b на $-b$ и c на $-c$. После этого мы можем сформулировать нашу задачу следующим образом: найти

$$\max (c, y)$$

при ограничениях

$$y \geq 0, \quad yA \leq b.$$

Если в (6.2.6) и (6.2.7) векторы c и b были положительными, то после перехода к задаче максимизации они стали отрицательными. В этом случае, для того чтобы начать решение прямым симплекс-алгоритмом, нужно, по-видимому, кроме свободных переменных, ввести еще искусственные переменные, что ведет к значительному увеличению числа итераций. При подобных обстоятельствах двойственный симплекс-метод должен привести к решению быстрее.

В самом деле, допустим, что таблица T , связанная с векторами свободных переменных, имеет вид

$$T = \|A, I\|.$$

Поскольку коэффициенты c_i , соответствующие свободным переменным, по определению, равны нулю, для рассматриваемого базиса мы получаем разности

$$z_i - c_i = -c_i,$$

которые неотрицательны, если $c_i \leq 0$. Следовательно, двойственный метод немедленно может начинаться с (исходного) базиса, имеющего таблицу T . При этом не нужно вводить никаких искусственных переменных.

Классическая задача о диете (см. 7.5.1) принадлежит как раз к типу задач (6.2.6) и (6.2.7). Она легче решается двойственным алгоритмом, чем основным.

Многие видоизменения симплекс-метода делаются с целью использовать частные свойства матриц ограничений. Например, при решении задачи, полученной из задачи, уже решенной симплекс-методом, добавлением еще одного ограничения не обязательно повторять полностью весь процесс. В другом частном случае, когда, кроме обычных ограничений, налагаемых на переменные, имеются еще ограничения сверху, можно обойтись без удвоения числа переменных. Описания нескольких таких случаев имеются в учебниках линейного программирования (см. библиографию к настоящей главе).

6.3. Пример применения симплекс-метода. Фабрикант может использовать любую комбинацию четырех различных производственных процессов. Первый и второй процессы имеют конечным продуктом изделие *A*, а третий и четвертый — изделие *B*. Затраты по применению каждого из этих процессов характеризуются затратами труда в человеко-неделях, фунтами сырья w и ящиками другого сырья ω . Поскольку затраты на применение каждого из процессов различны, процессы не одинаково выгодны, даже если они производят один и тот же конечный продукт. При составлении плана на неделю фабрикант ограничен имеющимися в наличии запасами двух видов сырья и рабочей силой. Таблица 6.1 описывает эту ситуацию.

Таблица 6.1

	Изделие <i>A</i>		Изделие <i>B</i>		Производительности
	процесс 1	процесс 2	процесс 3	процесс 4	
Человеко-недели	1	1	1	1	15
Фунты сырья w	7	5	3	2	120
Ящики сырья ω	3	5	10	15	100
Стоимость единицы в долларах	6	5,5	9	8	
Интенсивность применения	x_1	x_2	x_3	x_4	

Всякий производственный план (x_1, x_2, x_3, x_4) подчиняется следующим ограничениям, вытекающим из ограниченности средств производства:

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 15, \\
 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 120, \\
 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 &\leq 100.
 \end{aligned}
 \tag{6.3.1}$$

Далее, мы не допускаем „отрицательного производства“, т. е. требуем, чтобы

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0. \quad (6.3.2)$$

Наша задача состоит в нахождении набора значений неизвестных x_i , который удовлетворял бы неравенствам (6.3.1) и (6.3.2) и при этом максимизировал бы прибыль r_0

$$r_0 = 6x_1 + 5,5x_2 + 9x_3 + 8x_4. \quad (6.3.3)$$

Если мы введем в задачу не используемые в действительности материалы и человеко-недели в виде переменных

$$\begin{aligned} x_5 &\text{— свободные (не используемые) человеко-недели,} \\ x_6 &\text{— свободное (не используемое) сырье } \omega, \\ x_7 &\text{— свободное (не используемое) сырье } \omega, \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

которые снова неотрицательны:

$$x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0, \quad (6.3.5)$$

то неравенства (6.3.1) превратятся в равенства

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 15, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 &= 120, \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 + x_7 &= 100, \end{aligned}$$

причем функция прибыли (6.3.3) остается неизменной.

Таблицы 6.2, 6.3 и 6.4 описывают симплекс-итерации; начальный базис (таблица 6.2) состоит из векторов, соответствующих свободным переменным. Отметим, что компонентами вектора служат скалярные произведения столбцов „таблицы“ на столбец слева. Координаты вектора λ помещены в столбце p_0 .

Т а б л и ц а 6.2

с		6	5,5	9	8	0	0	0	
	Базис	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
0	p_5	15	1	1	1	1	1	0	0
0	p_6	120	7	5	3	2	0	1	0
0	p_7	100	3	5	10	15	0	0	1
	z	0	0	0	0	0	0	0	0
	$z - c$	-6	-5,5	-9	-8	0	0	0	0

Наибольшая по абсолютной величине отрицательная компонента вектора $z - c$ равна 9, а наименьшим из отношений λ_i^0/x_{ik_0} будет 100/10. Значит, в следующий базис нужно включить вектор p_3 вместо p_7 (таблица 6.3).

Т а б л и ц а 6.3

с	Базис	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
0	p_5	5	0,7	0,5	0	-0,5	1	0	-0,1
0	p_6	90	6,1	3,5	0	-2,5	0	1	-0,3
9	p_3	10	0,3	0,5	1	1,5	0	0	0,1
	z		2,7	4,5	9	13,5	0	0	0,9
	$z - c$		-3,3	-1	0	5,5	0	0	0,9

Здесь наибольшая по абсолютной величине отрицательная компонента $z - c$ равна 3,3 и наименьшее отношение равно 5/0,7. Следовательно, вектор p_5 заменится вектором p_1 .

Т а б л и ц а 6.4

с	Базис	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
6	p_1	7,143	1	0,714	0	-0,714	1,429	0	-0,143
0	p_6	46,868	0	-0,855	0	1,855	8,717	1	0,572
9	p_3	7,857	0	0,288	1	1,714	-0,429	0	0,143
	z		6	6,886	9	11,142	4,713	0	0,429
	$z - c$		0	1,386	0	3,142	4,713	0	0,429

Поскольку для всех i числа $z_i - c_i$ неотрицательны (табл. 6.4), мы пришли к решению

$$x_1^0 = 7,143, \quad x_3^0 = 7,857, \quad x_6^0 = 46,868.$$

Оптимальный план производства при имеющихся ограничениях требует для получения 7,143 единиц изделия A применения процесса 1, для получения 7,857 единиц изделия B — применения

процесса 3. Общая цена продукции, получаемой по этому плану, есть $(7,143)6 + (7,857)9 = 113,571$.

В плане участвует, кроме рабочей силы и всего имеющегося запаса сырья ω , еще некоторое количество сырья ω , которое фактически не используется. Можно показать, что в условиях данного примера решение единственно.

6.4*. Вычисление потока в сети. В этом пункте мы опишем специальный алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети (см. п. 5.9 и 5.10), в которой ограничения пропускной способности наложены только на дуги.

Рассмотрим сеть, состоящую из узлов p_i ($i = 1, \dots, n$) и дуг $p_i p_j$, связывающих соответствующие пары узлов. Пусть p_1 обозначает источник, а p_n — сток; p_i ($i = 2, \dots, n-1$) — промежуточные узлы. Каждой дуге $p_i p_j$ сопоставлено неотрицательное число c_{ij} , обозначающее ее пропускную способность в направлении от p_i к p_j . (В дальнейшем всюду будем предполагать $c_{ii} = 0$.) Если через x_{ij} обозначить поток от p_i к p_j , а через v — чистый поток из p_1 („значение потока“), то задача может быть сформулирована следующим образом: максимизировать v при условиях

$$\begin{aligned} \sum_j (x_{1j} - x_{j1}) &= v, \\ \sum_j (x_{ij} - x_{ji}) &= 0 \quad (i = 2, \dots, n-1), \\ \sum_j (x_{nj} - x_{jn}) &= -v \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

и

$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij}. \quad (6.4.2)$$

Ограничения (6.4.1) выражают тот факт, что чистый поток из источника (или поступающий в сток) равен v и что поток, поступающий в любой из промежуточных узлов, равен потоку, выходящему из него. Неравенства (6.4.2) означают, что поток на любой дуге не может превышать его пропускную способность. Для дуг, не представленных в сети, можно принять нулевую пропускную способность; с другой стороны, мы можем считать соответствующие переменные x_{ij} запрещенными.

Получившаяся задача представляет собой, разумеется, задачу линейного программирования, и следует ожидать, что ее можно решить симплекс-методом. Действительно, можно показать, что применение симплекс-метода в этой задаче приводит к решению систем уравнений, которые имеют треугольный вид, и поэтому весьма эффективно. Однако мы рассмотрим здесь еще более простой и быстрый алгоритм для решения задач о максимальном потоке в сети.

Подобно симплекс-методу, он приводит к решению как прямой, так и двойственной задачи.

Прежде чем приступить к общему описанию, рассмотрим простой пример.

На рис. 8 изображена сеть с источником p_1 и стоком p_4 ; пропускные способности дуг показаны на диаграмме. Спрашивается, будет ли поток, показанный на рис. 9, а именно

$$x_{13} = x_{32} = x_{24} = 1, \quad x_{12} = x_{23} = x_{34} = 0$$

(со значением $v = 1$), максимальным. (Для каждой дуги первое число обозначает пропускную способность, а второе — фактический

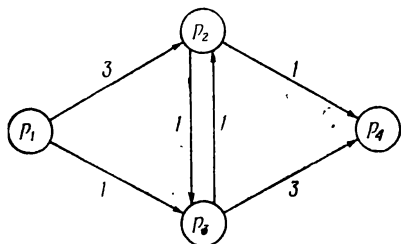


Рис. 8.

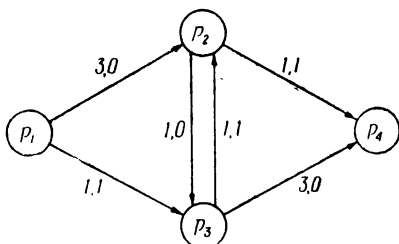


Рис. 9.

поток.) Ответ отрицателен, так как мы можем, например, увеличить на единицу каждый из x_{12} , x_{23} и x_{34} , в результате чего получится поток, изображенный на рис. 10, значение которого $v = 2$.

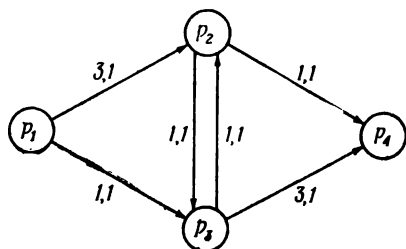


Рис. 10.

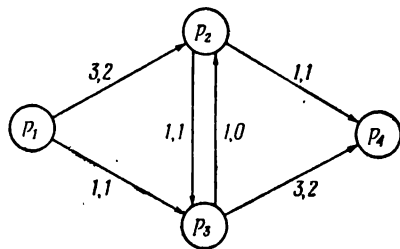


Рис. 11.

Будет ли новый поток максимальным? Снова нет, так как мы можем увеличить x_{12} , уменьшить x_{32} и увеличить x_{34} каждый раз на единицу, получив в результате поток со значением $v = 3$, показанный на рис. 11.

Теперь уже поток максимален, так как разрез, состоящий из дуг p_1p_3 , p_2p_3 и p_2p_4 , также имеет значение $v = 3$.

Заметим, что каждое увеличение потока в примере состоит в изменении последовательности переменных x_{ij} вдоль пути от источника

к стоку путем добавления или вычитания положительной константы на каждом участке потока вдоль маршрута. Алгоритм, который мы сейчас опишем, представляет собой систематизированный и эффективный метод улучшений потока такого рода. Если улучшений не существует, то это будет показывать, что максимальный поток построен.

Для того чтобы обеспечить конечность процесса, предположим, что пропускные способности всех дуг выражены неотрицательными целыми числами. Поскольку задача с рациональными c_{ij} может быть приведена к задаче с целыми c_{ij} приведением дробей к общему знаменателю, ограничение не является существенным с вычислительной точки зрения.

Вычисление можно начать с любого целого потока x (например, с нулевого потока). Пометим последовательно каждый из узлов следующим образом.

Шаг (а): Начинаем с узла p_1 , который рассматриваем, как помеченный и необследованный.

Шаг (б): Берем любой помеченный, неисследованный узел p_i и рассматриваем дуги, соединяющие его со всеми узлами p_j , для которых $x_{ij} < c_{ij}$. Помечаем такие узлы значком p_i^+ . Затем обследуем все ребра от непомеченных узлов p_j , таких, что $x_{ji} > 0$. Помечаем такие узлы значком p_j^- . Узел p_i считаем обследованным.

Шаг (б) повторяется либо до тех пор, пока не будет помечен сток p_n , либо пока не окажется, что дальнейшая пометка невозможна, а p_n не помечен. В последнем случае вычисление закончено, в первом случае можно увеличить поток по пути от p_1 до p_n следующим образом. Если p_n помечен значком p_j^+ , то условно (пробно) прибавляем $\epsilon > 0$ к x_{jn} . Если p_n помечен значком p_i^- , то вычитаем ϵ из x_{nj} . Далее смотрим на пометку p_j . Если это p_i^+ , то прибавляем ϵ к x_{ij} (если p_i^- , то вычитаем ϵ из x_{ji}) и переходим к p_i и его пометке. Продолжаем таким образом, пока не достигнем источника. Так как ограничения (6.4.1) остаются выполненными для любого ϵ при новом значении потока $v + \epsilon$, мы выбираем ϵ возможно большим с учетом (6.4.2). Поскольку ϵ равно наименьшему из нескольких целых чисел, ясно, что ϵ — целое число. Таким образом, мы приходим к новому допустимому вектору потока с новым значением потока, превышающим предыдущее не менее чем на единицу.

После этого алгоритм повторяется, начиная с полученного уже потока, и мы проводим новый процесс пометки. Если в результате p_n помечен, то мы снова можем построить допустимый вектор со значением потока, большим, по крайней мере, на единицу. Очевидно, что процедура должна закончиться через конечное число итераций на потоке, для которого узел p_n не будет помечен.

Нам осталось показать, что если процесс пометки не достиг p_n , то поток x максимален. Обозначим через S множество индексов i , для которых p_i помечены. Имеем $1 \in S$, $n \notin S$. Суммируя теперь уравнения (6.4.1) по $i \in S$, получаем

$$v = \sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} (x_{ij} - x_{ji}).$$

Слагаемые, соответствующие $j \in S$, из суммирования исключаются. Но если $i \in S$, $j \notin S$, то $x_{ij} = c_{ij}$ и $x_{ji} = 0$, ибо в противном случае p_j были бы помечены.

Следовательно,

$$v = \sum_{\substack{i \in S \\ j \notin S}} c_{ij}.$$

Множество дуг, ведущих от S к его дополнению, является разрезом (в противном случае существовал бы путь от p_1 к p_n , все узлы которого принадлежат S , откуда следовало бы, что p_n помечен в противоречие нашему предположению). В силу теоремы 5.10 поток x максимален, а разрез минимален.

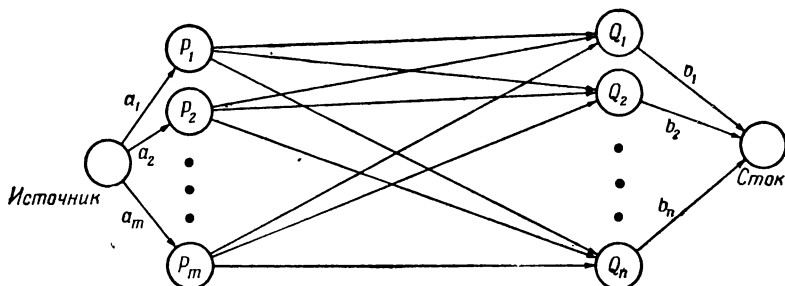


Рис. 12.

Заканчивая пункт, укажем еще задачу, в которой уравнения ограничений весьма похожи на ограничения транспортной задачи и которая также может быть сведена к задаче о потоке в сети. Такой задачей является задача отыскания матрицы $X = \|x_{ij}\|$, максимизирующей форму $\sum_{i,j} x_{ij}$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j \quad (6.4.3)$$

и $x_{ij} = 0$ для фиксированного множества Ω пар (i, j) .

Для того чтобы прийти к задаче о потоке, рассмотрим направленную сеть из $m + n + 2$ узлов, изображенную на рис. 12.

Пропускные способности направленных дуг $P_i Q_j$ равны нулю для пары $i, j \in \Omega$ и положительны для остальных пар. Пропускные способности дуг, покидающих источник и входящих в сток, равны a_i и b_j , как это указано на схеме, x_{ij} интерпретируется, как поток от P_i к Q_j .

6.5. Метод приближенного вычисления значения игры. Вычислительные методы, описанные в предыдущих пунктах, непосредственно связаны с задачами линейного программирования. В этом пункте мы опишем метод, предназначенный для приближенного вычисления значения игры. Этот метод позволяет строить для каждого игрока такую последовательность стратегий, что любая стратегия, предельная для некоторой ее подпоследовательности, будет оптимальной. В частности, если каждый из двух игроков обладает единственной оптимальной стратегией, то эти стратегии могут быть вычислены с любой наперед заданной точностью. Если задача линейного программирования и двойственная ей задача имеют единственные решения, то, рассматривая эквивалентную им игровую задачу, мы можем получить новый итеративный метод решения задачи, и обратно.

Метод, излагаемый в этом пункте, основан на следующем интуитивном рассмотрении. Допустим, что в одну игру играют несколько раз и что в каждой партии каждый из игроков выбирает стратегию с расчетом на то, что его противник будет впредь придерживаться действий, напоминающих предыдущие. Поэтому действия игроков в первой партии обуславливают выбор стратегий для последовательности партий при некотором, однако, произволе, возникающем в результате неоднозначности, возможной в некоторых партиях (в этом случае может быть выбран любой из возможных вариантов, но приведенное ниже доказательство сходимости не проходит). На базе этой последовательности можно вычислить верхнюю и нижнюю границы значения игры, а также приближенные оптимальные стратегии для каждого из игроков.

Приступим к формальному описанию метода.

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — матрица выигрышей. Через a_i обозначим i -ю строку, а через b_j — j -й столбец матрицы A .

Предположим, что в первой партии игрок II выбрал чистую стратегию, соответствующую некоторому столбцу матрицы A , которую обозначим через $c(1)$. Для того чтобы максимизировать свой выигрыш, игрок I должен тогда выбрать чистую стратегию, соответствующую той строке, на которой достигается максимум $c(1)$. Обозначим эту строку через $r(1)$. Таким образом, если $c(1)$ и $r(1)$ суть j -й столбец и i_0 -я строка, то

$$a_{i_0 j_0} = \max_k a_{k j_0}, \text{ или } c_{i_0}(1) = \max_k c_k(1).$$

Во второй партии матча, если игрок I выбрал стратегию, выигрышами которой являются компоненты строки $r(1)$, то игрок II может противопоставить ей чистую стратегию j_1 , для которой

$$a_{i_0 j_1} = \min_j a_{i_0 j} = \min_j r_j(1).$$

Мы, однако, будем для единообразия процесса предполагать, что игроки изменяют свои стратегии, руководствуясь только опытом сыгранных партий. Фактически каждый из игроков выбирает чистую стратегию, являющуюся оптимальной в смысле опыта, приобретенного в процессе сыгранных партий, приписывая равные веса стратегиям противника в каждой из партий.

Пусть, например, игрок II выбрал смешанную стратегию $(1/2, 1/2)$ из столбцов j_0 и j_1 .

Пусть $c(2) = c(1) + b_{j_1}$.

Тогда игрок I снова старается максимизировать свой выигрыш. Он определяет $\max_i \frac{1}{2} [c_i(1) + b_{i j_1}]$, т. е. $\max_i c_i(2)$. Если этот максимум достигается для индекса i_1 , то он выбирает стратегию, являющуюся средним арифметическим стратегий $r(1)$ и a_{i_1} .

Пусть $r(2) = r(1) + a_{i_1}$.

Мы продолжаем эту фиктивную игру в том же стиле: каждый игрок отвечает оптимальным образом на предшествующую игру противника. Игрок II продолжает, отыскивая столбец j_2 , для которого достигается $\min_j r_j(2)$, и берет стратегию $(1/3, 1/3, 1/3)$, состоящую из чистых стратегий j_0, j_1, j_2 .

Возьмем $c(3) = c(2) + b_{j_2}$.

В ответ на эту стратегию игрок I выбирает наибольшую компоненту вектора $1/3 c(3)$. Если максимум достигается для индекса i_2 , он берет стратегию $(1/3, 1/3, 1/3)$, состоящую из стратегии i_0, i_1, i_2 , и так далее¹⁾. Мы получаем, таким образом, последовательность векторов

$c(k) = c(k-1) + b_{j_{k-1}}$, где номер j_{k-1} определяется из условия $r_{j_{k-1}}(k-1) = \min_j r_j(k-1)$,

и $r(k) = r(k-1) + a_{i_{k-1}}$, где номер i_{k-1} определяется из условия $c_{i_{k-1}} = \max_i c_i(k)$.

В следующем пункте мы покажем, что максимум и минимум выигрышей, соответствующих стратегиям $c(n)/n$, $r(n)/n$, сходятся к v , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_i \frac{c_i(n)}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\min_j \frac{r_j(n)}{n} \right] = v.$$

¹⁾ При этом среди стратегий i_0, i_1, i_2 могут встретиться и одинаковые. — *Прим. перев.*

Сначала мы, однако, кратко рассмотрим соответствующую вычислительную схему, исходя непосредственно из смешанных стратегий.

Допустим, что игрок II начинает с некоторой смешанной стратегии y_1 . Игрок I выбирает тогда стратегию x_1 , для которой

$$\max_x (x, Ay_1) = (x_1, Ay_1).$$

Игрок II выбирает затем стратегию y_2 , для которой

$$\min_y (x_1, Ay) = (x_1, Ay_2).$$

Предположим, что игрок II выбирает в следующей партии среднее арифметическое $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$; игрок I выбирает в ответ стратегию x_2 , для которой

$$\max_y \left(x, A \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \right) = \left(x_2, A \left(\frac{y_1 + y_2}{2} \right) \right).$$

Каждый из игроков продолжает играть, используя средние арифметические всех выбираемых стратегий, а его противник старается внести в свою стратегию наилучший ответ. Например, если x_n — лучший выбор для игрока I против стратегии

$$\frac{1}{n} [y_1 + \dots + y_n],$$

то он должен выбрать стратегию

$$\frac{1}{n} [x_1 + \dots + x_n];$$

тогда игрок II должен применять

$$\frac{1}{n+1} [y_1 + \dots + y_{n+1}]$$

и т. д. Можно доказать, что

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_x \left(x, \frac{1}{n} A (y_1 + \dots + y_n) \right) \right] = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\min_y \left(\frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n), Ay \right) \right] = v \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

и что любая предельная точка последовательностей

$$\frac{1}{n} \sum_{l=1}^n x_l \quad \text{и} \quad \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n y_l$$

является оптимальной стратегией игрока I (соответственно II) в рассматриваемой игре. Мы проведем доказательство сходимости в применении к столбцам и строкам, но некоторая модификация доказательства позволяет получить и соотношение (6.5.1).

Для иллюстрации метода рассмотрим следующую игру, заданную матрицей выигрышей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Допустим, что игрок I начинает с i_0 , игрок II выбирает j_0 , игрок I отвечает на это введением стратегии i_1 и т. д.; каждый игрок действует по схеме, описанной выше. Пусть

$$\underline{v}(N) = \frac{1}{N} \min_j r_j(N), \quad \bar{v}(N) = \frac{1}{N} \max_i c_i(N).$$

Числовые данные приведены в табл. 6.5. Значение игры равно 1.

Таблица 6.5

N	i_N	$r_1(N)$	$r_2(N)$	$r_3(N)$	$\underline{v}(N)$	j_N	$c_1(N)$	$c_2(N)$	$c_3(N)$	$\bar{v}(N)$
1	1	2	1	0	0,000	3	0	3	-3	3,000
2	2	4	1	3	0,500	2	1	3	0	1,500
3	2	6	1	6	0,333	2	2	3	6	1,000
4	2	8	1	9	0,250	2	3	3	6	1,500
5	3	7	4	6	0,800	2	4	3	9	1,800
6	3	8	7	3	0,500	3	4	6	6	1,000
7	2	8	7	6	0,857	3	4	9	3	1,286
8	2	10	7	9	0,875	2	5	9	6	1,125
9	2	12	7	12	0,778	2	6	9	9	1,000
10	2	14	7	15	0,700	2	7	9	12	1,200
11	3	13	10	12	0,909	2	8	9	15	1,364
12	3	12	13	9	0,750	3	8	12	12	1,000
13	2	14	13	12	0,923	3	8	15	9	1,154
14	2	16	13	15	0,929	2	9	15	12	1,071
15	2	18	13	18	0,867	2	10	15	15	1,000
16	2	20	13	21	0,812	2	11	15	18	1,125
17	3	19	16	18	0,941	2	12	15	21	1,235
18	3	18	19	15	0,833	3	12	18	18	1,000

6.6*. Доказательство сходимости. Последовательность, состоящая из n - и m -мерных векторов $\mathbf{s}(k)$ и $\mathbf{r}(k)$, называется *векторной системой* для $n \times m$ -матрицы A , если

$$(1) \max_i c_i(0) = \min_j r_j(0);$$

(2) если $\max_i c_i(k)$ достигается на ν -й компоненте, то

$$\mathbf{r}(k+1) = \mathbf{r}(k) + \mathbf{a}_\nu;$$

(3) если $\min_j r_j(k)$ достигается на μ -й компоненте, то

$$\mathbf{c}(k) = \mathbf{c}(k-1) + \mathbf{b}_\mu$$

($\mathbf{a}_\nu$ означает ν -ую строку, а $\mathbf{b}_\mu$ — μ -й столбец матрицы $\mathbf{A}$).

Легко видеть, что векторы $\mathbf{c}(k)$ и $\mathbf{r}(k)$, построенные в п. 6.5, образуют векторную систему, если положить $\mathbf{c}(0) \equiv \mathbf{r}(0) \equiv \mathbf{0}$.

► Теорема 6.6.1. *Какова бы ни была векторная система $\mathbf{c}(k)$, $\mathbf{r}(k)$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\max_i \frac{c_i(n)}{n} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\min_j \frac{r_j(n)}{n} \right] = v.$$

В действительности итеративный процесс сходится гораздо лучше, чем можно ожидать из теоретических соображений.

Имеется предположение, что он сходится со скоростью $1/\sqrt{k}$, где k — номер итерации ¹⁾.

► Лемма 6.6.1. *Какова бы ни была векторная система, для нее*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{\max \mathbf{c}(T) - \min \mathbf{r}(T)}{T} \right] \geq 0.$$

Под $\max \mathbf{c}(T)$ понимается максимальная компонента вектора $\mathbf{c}(T)$.

Доказательство. Частный случай $\mathbf{c}(0) = \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$. В этом случае

$$\max \frac{\mathbf{c}(T)}{T} \geq v \geq \min \frac{\mathbf{r}(T)}{T},$$

откуда и следует утверждение леммы.

Общий случай. Обозначим соответственно через n_i, m_j числа добавлений векторов $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j$ к $\mathbf{r}(0), \mathbf{c}(0)$ при формировании векторов $\mathbf{r}(T), \mathbf{c}(T)$. Тогда

$$\sum n_i = \sum m_j = T,$$

а

$$x_i = \frac{n_i}{T}, \quad y_j = \frac{m_j}{T}$$

¹⁾ По поводу быстроты сходимости метода см. сборник „Матричные игры“, стр. 118—127. — Прим. перев.

суть стратегии в игре. Заметим, что

$$\frac{c_i(T)}{T} = \frac{c_i(0)}{T} + \sum_j a_{ij} \frac{m_j}{T} = \frac{c_i(0)}{T} + (Ay)_i,$$

$$\frac{r_j(T)}{T} = \frac{r_j(0)}{T} + \sum_i a_{ij} \frac{n_i}{T} = \frac{r_j(0)}{T} + (xA)_j,$$

а также

$$\frac{\max c(T) - \min r(T)}{T} = \max_i \frac{c_i(0)}{T} - \min_j \frac{r_j(0)}{T} + \max_i (Ay)_i - \min_j (xA)_j. \quad (6.6.1)$$

Но

$$\lim_T \max_i \frac{c_i(0)}{T} = \lim_T \min_j \frac{r_j(0)}{T} = 0. \quad (6.6.2)$$

Вместе с тем из теоремы о минимаксе и леммы 1.4.1 следует, что

$$v = \min_y \max_x (x, Ay) = \min_y \max_i (Ay)_i \leq \max Ay.$$

Аналогично

$$v \geq \min_j (xA)_j \rightarrow \max Ay - \min xA \geq 0. \quad (6.6.3)$$

Соотношения (6.6.1), (6.6.2) и (6.6.3) доказывают лемму.

Определение. Строку a_ν матрицы A будем называть *существенной в интервале $(M, M+T)$* , если существует такой номер $R (M \leq R \leq M+T)$, что

$$\max c(R) = c_\nu(R).$$

Столбец b_μ называется *существенным*, если

$$\min r(R) = r_\mu(R).$$

В этом определении не утверждается, что чистые стратегии a_ν , b_μ фактически использовались в $r(R)$, $c(R)$.

► **Лемма 6.6.2.** Если все столбцы и строки матрицы A существенны в интервале $(M, M+T)$, то

$$\max c(M+T) - \min c(M+T) \leq 2aT \quad (6.6.4a)$$

и

$$\max r(M+T) - \min r(M+T) \leq 2aT, \quad (6.6.4b)$$

где

$$a = \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Доказательство. Докажем сначала первое неравенство. Обозначим через ν номер какой-либо строки, для которой дости-

гается $\min c(M+T)$. Поскольку a_v — существенная строка, найдется такой номер R , что

$$\max c(R) = c_v(R). \quad (6.6.5)$$

Вместе с тем, так как $M \leq R \leq M+T$, мы получим $c(M+T)$, добавив к $c(R)$ не более чем T столбцов и учитывая при этом, что добавление столбца не может увеличить компоненты предыдущего вектора более чем на a . Следовательно,

$$c_j(M+T) \geq c_j(R) - aT, \quad c_j(M+T) \leq c_j(R) + aT.$$

В частности,

$$\min c(M+T) = c_v(M+T) \geq c_v(R) - aT. \quad (6.6.6)$$

Допустим, что $\max c(M+T) = c_{v_0}(M+T)$. Тогда в силу (6.6.5)

$$c_{v_0}(M+T) \leq c_{v_0}(R) + aT \leq c_v(R) + aT. \quad (6.6.7)$$

Из (6.6.6) и (6.6.7) следует, что

$$\max c(M+T) - \min c(M+T) \leq 2aT.$$

► **Лемма 6.6.3.** *Если все столбцы и строки матрицы A существенны в интервале $(M, M+T)$, то*

$$\max c(M+T) - \min r(M+T) \leq 4aT. \quad (6.6.8)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \max c(M+T) - \min r(M+T) &= \\ &= [\max c(M+T) - \min c(M+T)] + [\min c(M+T) - \max r(M+T)] + \\ &\quad + [\max r(M+T) - \min r(M+T)] \leq \\ &\leq 4aT + [\min c(M+T) - \max r(M+T)]. \end{aligned}$$

Нам остается показать, что последний член отрицателен.

Обозначим соответственно через k_i и l_j количества добавлений строки b_i и столбца a_j к $c(0)$, $r(0)$ при формировании векторов $c(M+T)$ и $r(M+T)$.

Как и в лемме 6.6.1,

$$\frac{1}{M+T} \sum k_i = \frac{1}{M+T} \sum l_j = 1.$$

Пусть $B = A^T$ и, таким образом, $b_{ij} = a_{ij}$; обозначим через v^* значение игры с матрицей B . Тогда

$$(M+T)x = (k_1, \dots, k_m), \quad (M+T)y = (l_1, \dots, l_n)$$

суть стратегии соответственно игроков I и II в игре с матрицей **B**. Далее,

$$\frac{c_j(M+T)}{M+T} = \frac{c_j(0)}{M+T} + \sum_j b_{ij} \frac{k_i}{M+T} = \frac{c_j(0)}{M+T} + (\mathbf{x}\mathbf{B})_j$$

и

$$\frac{r_i(M+T)}{M+T} = \frac{r_i(0)}{M+T} + \sum_j b_{ij} \frac{l_j}{M+T} = \frac{r_i(0)}{M+T} + (\mathbf{B}\mathbf{y})_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\min \mathbf{c}(M+T) - \max \mathbf{r}(M+T)}{M+T} &= \\ &= \frac{\min \mathbf{c}(0) - \max \mathbf{r}(0)}{M+T} + \min \mathbf{x}\mathbf{B} - \max \mathbf{B}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

В то же время, по определению векторной системы, $\min \mathbf{c}(0) = \max \mathbf{r}(0)$. Наконец, рассуждая, как в лемме 6.6.1, мы получаем

$$\min \mathbf{x}\mathbf{B} \leq v^* \leq \max \mathbf{B}\mathbf{y}$$

или

$$\min \mathbf{x}\mathbf{B} - \max \mathbf{B}\mathbf{y} \leq 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\min \mathbf{c}(M+T) - \max \mathbf{r}(M+T)}{M+T} \leq 0.$$

Это завершает доказательство леммы.

► Лемма 6.6.4. *Какова бы ни была векторная система, связанная с матрицей **A**, для любого $\epsilon > 0$ существует такой номер $T^*(\epsilon)$, что для всех $T > T^*$*

$$\frac{\max \mathbf{c}(T) - \min \mathbf{r}(T)}{T} < \epsilon.$$

(Значение $T^*(\epsilon)$ не зависит от выбора векторной системы.)

Доказательство. Будем рассуждать по индукции. Лемма, очевидно, справедлива для 1×1 -матриц, так как из $\mathbf{r}(0) = \mathbf{c}(0)$ следует $\mathbf{r}(n) \equiv \mathbf{c}(n)$ для всех n . Допустим, что лемма справедлива для всех подматриц **A**. Докажем, что тогда она справедлива и для самой матрицы **A**. Поскольку число подматриц конечно, можно считать, что номер $T^*(\epsilon/2)$ один и тот же для всех собственных подматриц матрицы **A** и для всех векторных систем. Далее в доказательстве мы будем обозначать этот номер через T^* .

Вспомогательная лемма. Если ν -я строка не является существенной в интервале $(M, M + T^*)$, то

$$\max c(M + T^*) - \min r(M + T^*) \leq \max c(M) - \min r(M) + \frac{\varepsilon}{2} T^*, \quad (6.6.9)$$

где $T^* = T^*(\varepsilon/2)$. Симметричный результат имеет место для несущественного столбца.

Доказательство. Определим новую векторную систему:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}(k) &= r(M + k) + [\max c(M) - \min r(M)] u, \\ \text{где } u &= (1, 1, \dots, 1), \\ \bar{c}(k) &\text{ — проекция } c(M + k), \text{ полученная} \\ &\text{вычеркиванием } \nu\text{-й строки.} \end{aligned} \right\} (k \leq T^*).$$

Продолжим систему для $k > T^*$, применяя условия (2) и (3) определения векторной системы (стр. 217) и учитывая, что подматрица получена из матрицы A вычеркиванием ν -й строки.

Мы можем доказать, что $\bar{r}(k)$ и $\bar{c}(k)$ образуют векторную систему. Условие (1) выполняется. Действительно,

$$\begin{aligned} \min \bar{r}(0) &= \min r(M) + \max c(M) - \min r(M) = \\ &= \max c(M) = \max \bar{c}(0), \end{aligned}$$

поскольку ν -я строка не является существенной. Условия (2) и (3) удовлетворяются для $k \leq T^*$, поскольку ν -я строка не существенна, а для $k > T^*$ по построению.

Теперь можно доказывать неравенство (6.6.9). Так как стратегии $\bar{r}(k)$ и $\bar{c}(k)$ определены для подматрицы матрицы A , именно для подматрицы, полученной удалением ν -й строки, по индуктивному предположению мы имеем

$$\frac{\max \bar{c}(T^*) - \min \bar{r}(T^*)}{T^*} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (6.6.10)$$

что эквивалентно (6.6.9).

Доказательство леммы. Пусть $T = (\theta + q) T^*$ ($0 \leq \theta < 1$), q и T — целые числа, причем значение q будет уточнено позже. Положим

$$I_s = [(\theta + s - 1) T^*, (\theta + s) T^*] \quad (1 \leq s \leq q).$$

Случай 1. Существует такое s , что все столбцы и строки матрицы A являются в интервале I_s существенными.

Пусть s' — наибольшее из таких s . Если $s' \leq q - 1$, мы можем применить вспомогательную лемму к интервалу

$$(M, M + T^*) \text{ при } M = (\theta + q - 1) T^* \text{ и } M + T^* = T;$$

тогда

$$\begin{aligned} \max c(T) - r(T) &\leq \\ &\leq \max c[(\theta + q - 1) T^*] - \min r[(\theta + q - 1) T^*] + \frac{\varepsilon}{2} T^*. \end{aligned} \quad (6.6.11)$$

Если $s' \leq q - 2$, то мы можем применить вспомогательную лемму к правой части неравенства (6.6.11). Тогда

$$\begin{aligned} \max c(T) - \min r(T) &\leq \\ &\leq \max c[(\theta + q - 2) T^*] - \min r[(\theta + q - 2) T^*] + 2 \frac{\varepsilon}{2} T^*. \end{aligned}$$

Будем продолжать итерации, пока не дойдем до $I_{s'}$. Здесь процесс закончится, так как все строки и столбцы будут существенными. Следовательно,

$$\begin{aligned} \max c(T) - \min r(T) &\leq \\ &\leq \max c[(\theta + s') T^*] - \min r[(\theta + s') T^*] + (q - s') \frac{\varepsilon}{2} T^* \leq \\ &\leq \max c[(\theta + s') T^*] - \min r[(\theta + s') T^*] + q \frac{\varepsilon}{2} T^*. \end{aligned} \quad (6.6.12)$$

Но для интервала $I_s = [(\theta + s' - 1) T^*, (\theta + s') T^*]$ длины T^* все столбцы и строки являются существенными, так что можно применить лемму 6.6.3. Мы имеем

$$\max c[(\theta + s') T^*] - \min r[(\theta + s') T^*] \leq 4aT^*. \quad (6.6.13)$$

Применяя этот результат к (6.6.12), мы получаем

$$\max c(T) - \min r(T) \leq 4aT^* + q \frac{\varepsilon}{2} T^*.$$

Случай 2. Не существует такого s , что все строки и столбцы матрицы A существенны в I_s . Тогда вспомогательная лемма применима к (6.6.11), и процесс итерации можно провести вплоть до $s = 1$. Мы получаем

$$\begin{aligned} \max c(T) - \min r(T) &\leq \max c(\theta T^*) - \min r(\theta T^*) + q \frac{\varepsilon}{2} T^* \leq \\ &\leq 2\theta aT^* + q \frac{\varepsilon}{2} T^* + M, \end{aligned}$$

где

$$M = \max |c(0)| + \max |r(0)|.$$

Последнее неравенство справедливо, так как вектор $\mathbf{c}(\theta T^*)$ получается добавлением θT^* столбцов к $\mathbf{c}(0)$, а мы знаем, что $|a_{ij}| \leq a$. Следовательно,

$$|\max \mathbf{c}(\theta T^*)| \leq a\theta T^* + \max |\mathbf{c}(0)|.$$

Аналогично

$$|\min \mathbf{r}(\theta T^*)| \leq a\theta T^* + \max |\mathbf{r}(0)|.$$

Наконец, поскольку $\theta < 1$, при $T^* > M/2a$ мы получаем

$$\max \mathbf{c}(T) - \min \mathbf{r}(T) \leq 4aT^* + q \frac{\epsilon}{2} T^*. \quad (6.6.14)$$

Таким образом, неравенство (6.6.14) выполняется в обоих случаях. Мы имеем

$$\frac{\max \mathbf{c}(T) - \min \mathbf{r}(T)}{T} \leq \frac{4a + q(\epsilon/2)}{q} \leq \frac{4a}{q} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Если мы теперь выберем q настолько большим, чтобы было $4a/q < \epsilon/2$, то для всех $T > qT^*$ будет

$$\frac{\max \mathbf{c}(T) - \min \mathbf{r}(T)}{T} < \epsilon.$$

Доказательство теоремы 6.6.1. В силу леммы 6.6.4

$$\overline{\lim} \left[\frac{\max \mathbf{c}(T) - \min \mathbf{r}(T)}{T} \right] \leq 0,$$

а в силу леммы 6.6.1

$$\underline{\lim} \left[\frac{\max \mathbf{c}(T) - \min \mathbf{r}(T)}{T} \right] \geq 0.$$

Поэтому

$$\lim \left[\frac{\max \mathbf{c}(T) - \min \mathbf{r}(T)}{T} \right] = 0. \quad (6.6.15)$$

Но

$$\overline{\lim} \left[\min \frac{\mathbf{r}(T)}{T} \right] \leq v \leq \underline{\lim} \left[\max \frac{\mathbf{c}(T)}{T} \right],$$

откуда видно, что каждый из пределов существует, а, значит,

$$\lim_T \left[\min \frac{\mathbf{r}(T)}{T} \right] = \lim_T \left[\max \frac{\mathbf{c}(T)}{T} \right] = v.$$

6.7*. Метод определения значения игры при помощи дифференциальных уравнений. Метод, описанный в п. 6.5, 6.6, был дискретным как по смыслу, так и по осуществлению. Излагаемый далее метод, наоборот, предполагает непрерывное изменение стратегий, имеющее целью использовать ошибки противника. Стратегии изменяются непрерывно во времени и удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям, определяющим действия каждого из игро-

ков, регулирующих свою игру в соответствии с действиями противника. Решение этой системы дифференциальных уравнений представляет собой однопараметрическое семейство стратегий $y(t)$ каждого из игроков, обладающее тем свойством, что любая предельная точка $y(t)$ при стремлении $t \rightarrow \infty$ оказывается оптимальной стратегией.

В отличие от дискретного метода, этот метод имеет точные оценки скорости сходимости. Однако как это преимущество, так и сам метод имеют скорее теоретическое, чем практическое значение, так как в большинстве случаев решение системы дифференциальных уравнений весьма затруднительно.

Поскольку любая матричная игра может быть симметризована (см. теорему 2.6.1), мы будем рассматривать только симметричные игры.

Пусть Γ — симметричная игра с кососимметричной $n \times n$ -матрицей A . Рассмотрим однопараметрическое семейство стратегий $y(t)$, представляющее собой вещественную функцию t . Составим следующие функции от $y(t)$:

$$\begin{aligned} u_i[y(t)] &= \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j(t), & \varphi(u_i) &= \max(0, u_i), \\ \varphi(y) &= \sum_{i=1}^n \varphi(u_i), & \psi(y) &= \sum_{i=1}^n \varphi^2(u_i). \end{aligned} \quad (6.7.1)$$

Возьмем какую-нибудь стратегию y^0 в игре Γ . Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= \varphi[u_j(t)] - \varphi[y(t)] y_j(t), \\ y_j(0) &= y_j^0. \end{aligned} \right\} (j = 1, \dots, n). \quad (6.7.2)$$

В пользу рассмотрения именно этой системы говорят следующие соображения. Допустим, что $\varphi(u_j) > 0$; тогда, выбирая в качестве стратегии j -ю строку, игрок I получает выигрыш, превосходящий значение игры, при условии, что игрок II выбрал стратегию $\{y_j\}$ (напомним, что $v = 0$). Если теперь игрок II изменит свою стратегию, увеличив y_j до 1, то выигрыш игрока I станет равным a_{ij} , т. е. нулю. Следовательно, игроку II выгодно увеличивать y_j , пока не окажется $\varphi(u_j) > 0$. Это объясняется наличием в правой части дифференциального уравнения члена $\varphi(u_j)$, который заставляет функцию $y_j(t)$ расти при $\varphi(u_j) > 0$. Второй член играет роль нормирующего множителя; он обеспечивает тождество $\sum y_j(t) \equiv 1$, если y^0 — начальная стратегия.

Так как правые части уравнений непрерывны, теория дифференциальных уравнений гарантирует существование хотя бы одного

решения. Мы докажем, что для всякого решения $y_j(t)$ и всякой неограниченно возрастающей последовательности $\{t_i\}$ любая предельная точка последовательности $y(t_i)$ дает оптимальную стратегию игрока II.

► Лемма 6.7.1. Пусть $y_j(t)$ ($j=1, \dots, n$) есть решение системы уравнений (6.7.2). Тогда при всяком фиксированном t вектор $(y_j(t))$ представляет собой стратегию.

Доказательство. Докажем, что $y_i(t) \geq 0$. Предположим обратное, т. е. что существует такое t_1 , что $y_j(t_1) < 0$. Пусть t_0 — наибольшее из всех t , не превосходящих t_1 , для которых $y_j(t_0) \geq 0$. Фактически $y_j(t_0) = 0$. Тогда $y_j(t) < 0$ для $t_0 < t \leq t_1$, но $\varphi(u_j) \geq 0$ и $\varphi(y) \geq 0$. Следовательно, $\varphi(u_j) - \varphi(y) y_j \geq 0$ и, таким образом, в силу (6.7.2) $dy_j/dt \geq 0$. Применяя теорему о среднем значении, мы получаем

$$y_j(t_1) = y_j(t_0) + y'_j(\tau)(t_1 - t_0) \geq y_j(t_0) = 0,$$

а это противоречит предположению, что $y_j(t_1) < 0$.

Докажем теперь, что

$$\sum_{j=1}^n y_j(t) = 1.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(1 - \sum_{j=1}^n y_j(t) \right) &= - \sum_{j=1}^n \frac{dy_j}{dt} = - \sum_{j=1}^n \varphi(u_j) + \varphi(y) \sum_{j=1}^n y_j = \\ &= - \varphi(y) \left(1 - \sum_{j=1}^n y_j(t) \right). \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

Интегрируя уравнение (6.7.3) от 0 до t и учитывая начальные условия, мы получаем

$$1 - \sum_{j=1}^n y_j(t) = - \int_0^t \varphi(y) \left(1 - \sum_{j=1}^n y_j(\tau) \right) d\tau.$$

Это уравнение решается в квадратурах

$$1 - \sum_{j=1}^n y_j(t) = c \exp \left[- \int_0^t \varphi(y) dy \right],$$

причем в силу начальных условий $c = 0$.

► Лемма 6.7.2.

$$[\psi(y)]^{1/2} \leq \varphi(y) \leq n^{1/2} [\psi(y)]^{1/2}.$$

Доказательство. Первое неравенство получается немедленно, так как

$$[\varphi(y)]^2 = \left[\sum \varphi(u_j) \right]^2 \geq \sum [\varphi(u_j)]^2 = \psi(y).$$

Второе получается с помощью неравенства Шварца:

$$\varphi(y) = \sum_{j=1}^n 1 \cdot \varphi(u_j) \leq \left[\sum_{j=1}^n 1 \right]^{1/2} \left[\sum_{j=1}^n [\varphi(u_j)]^2 \right]^{1/2} = n^{1/2} [\psi(y)]^{1/2}.$$

► Теорема 6.7.1.

$$\psi[y(t)] \leq \frac{C_0}{(C_2 + t)^2}; \quad \varphi[y(t)] \leq \frac{C_1}{C_2 + t}.$$

Доказательство. Если для данного t $\varphi(u_i) > 0$, то

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(u_i)}{dt} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{dy_j}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} [\varphi(u_j) - \varphi(y) y_j] = \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \varphi(u_j) - \varphi(y) \varphi(u_i). \end{aligned}$$

Умножив обе части равенства на $\varphi(u_i)$ и просуммировав, мы получаем следующее равенство, справедливое даже при $\varphi(u_i) = 0$:

$$\sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \frac{d\varphi(u_i)}{dt} = \sum_{i,j} a_{ij} \varphi(u_i) \varphi(u_j) - \varphi(y) \sum_{i=1}^n \varphi^2(u_i) = -\varphi(y) \psi(y). \quad (6.7.4)$$

Сумма по i, j равна нулю, так как матрица A кососимметрична, т. е. $a_{ij} = -a_{ji}$. Уравнение (6.7.4) эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi[y(t)]}{dt} = -\varphi[y(t)] \psi[y(t)]. \quad (6.7.5)$$

Поэтому $\psi[y(t)]$ является убывающей функцией t . Из леммы 6.7.2 следует, что она обращается в нуль только тогда, когда обращается в нуль $\varphi[y(t)]$, а также что

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi}{dt} \leq -\psi^{1/2}\psi.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2} \frac{d\psi}{\psi^{3/2}} \leq -dt,$$

откуда

$$-\psi^{-1/2} [y(t)] + \psi^{-1/2} [y(0)] \leq -t.$$

Если $C_2 = \psi^{-1/2} [y(0)]$, то мы имеем $\psi^{-1/2} [y(t)] \geq C_2 + t$ или

$$\psi^{1/2} [y(t)] \leq \frac{1}{C_2 + t}. \quad (6.7.6)$$

Отсюда вытекает, что для каждого i

$$\varphi(u_i) \leq \frac{n^{1/2}}{C_2 + t}.$$

Поскольку $\varphi(u_i) = \max(0, u_i)$, мы видим, что

$$u_i = \sum a_{ij} y_j(t) \leq \frac{n^{1/2}}{C_2 + t}.$$

Следовательно, верхний предел последовательности $\sum a_{ij} y_j(t_m)$ при $\{t_m\} \rightarrow \infty$ ограничен сверху нулем, или, другими словами, значением игры. Поэтому любая предельная точка последовательности $y(t_m)$ дает оптимальную стратегию игрока II, а значит, в силу симметричности игры, и игрока I.

Заметим, что выигрыши

$$\sum a_{ij} y_j(t_m)$$

стремятся к нулю по крайней мере со скоростью $n^{1/2} (C_2 + t)$.

6.8. Задачи

1. Применить симплекс-метод к задаче максимизации функции

$$2\xi_1 + 4\xi_2 + \xi_3 + \xi_4$$

при ограничениях

$$\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_4 \leq 4,$$

$$2\xi_1 + \xi_2 \leq 3,$$

$$\xi_2 + 4\xi_3 + \xi_4 \leq 3.$$

2. Существуют три допустимых процесса производства двух продуктов: кукурузы и свиней. Для процесса A конечным продуктом являются свиньи, но кукуруза используется как промежуточный продукт (для откорма свиней). Процесс B заключается в выращивании кукурузы. Процесс C предусматривает производство и кукурузы и свиней. Кукуруза продается по 20 долларов за единицу (тонну), свиньи также продаются по 20 долларов за единицу (голову). В процессе A требуется 100 человеко-месяцев труда и 10 акров земли на единицу готового продукта. Процесс B требует 25 человеко-месяцев и 50 акров земли на единицу продукции. Наконец, процесс C использует 50 человеко-месяцев и 40 акров земли на каждую

единицу продукции. В наличии имеется 50 человеко-месяцев и 52,5 акра земли. Предполагая, что доход пропорционален выпуску продукции, найти интенсивности применения процессов A , B , C , дающие максимальную общую прибыль.

3. Применить симплекс-метод к решению транспортной задачи при следующих данных:

Пункты производства	Пункты потребления	Стоимость доставки единицы груза							
		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6		
$a_1=3$	$b_1=3$	a_1	5	3	7	3	8	5	
$a_2=4$	$b_2=3$		a_2	5	6	12	5	7	11
$a_3=2$	$b_3=6$			a_3	2	8	3	4	8
$a_4=8$	$b_4=2$		a_4		9	6	10	5	10
	$b_5=1$								
	$b_6=2$								

4. Если система m линейных уравнений с n неизвестными имеет неотрицательное решение, то k компонент этого решения положительны, а остальные $n - k$ равны нулю (здесь $k \leq \min(m, n)$).

5. Найти явное решение задачи о рациональном использовании склада в том частном случае, когда $b_i > c_i$, $b_{i+1} > c_i$ и $c_i \geq 0$ для всех i .

6. Рассмотреть транспортную задачу с объемами производства $c_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$) и объемами потребления $b_j > 0$ ($j = 1, \dots, m$), причем

$$\sum_{i=1}^n c_i = \sum_{j=1}^m b_j.$$

Показать, что ранг матрицы ограничений A равен точно $m + n - 1$.

7. Решить задачу о диете:

найти $\min(c, x)$ при ограничениях $Ax \leq b$, $x \geq 0$,

где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 8 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и

$$c = (2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3).$$

Применить искусственные переменные, а затем двойственный симплекс-метод.

8. Минимизировать функцию

$$z_1 + z_2 + z_3 + \lambda x,$$

где

$$z_1 + z_2 + z_3 + x \geq 10,$$

$$z_1 + z_2 + x \geq 7, \quad 0 \leq z_i \leq 5,$$

$$z_2 + z_3 + x \geq 9, \quad x \geq 0$$

и λ — положительный параметр.

9. Доказать, что вырождение в транспортной задаче при применении симплекс-метода может возникнуть только в том случае, когда какая-либо частичная сумма c_i равна частичной сумме b_j .

10. Свести задачу о поставщике к транспортной задаче.

11. На фабрике имеется 100 единиц продукции, доставка которой к месту потребления обходится в 1 доллар за штуку, причем спрос d точно не известен, а является случайной величиной, равномерно распределенной между 70 и 80. В случае, когда спрос превысит производство, необходимо закупить продукт на местном рынке по 2 доллара за штуку. Поставить задачу и определить транспортную политику, минимизирующую ожидаемые расходы.

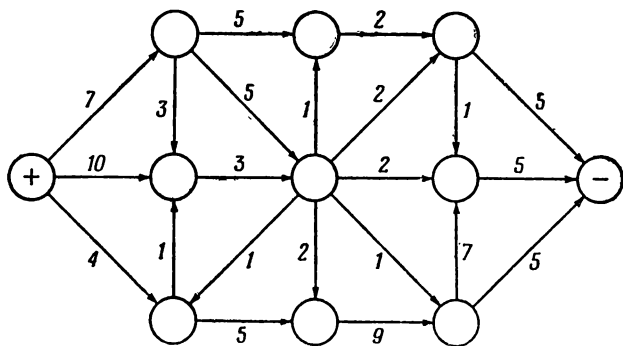


Рис. 13.

12. Применив алгоритм п. 6.4, найти максимальный поток и минимальный разрез для сети, изображенной на рис. 13. Изменить направление дуг, поменяв ролями источник и сток, и определить путем пометок другой минимальный разрез.

13. Рассмотреть задачу об оптимальном назначении в условиях двух возможностей: рабочий i подходит для j -й работы или не подходит. Показать, что такая задача представляет собой задачу о потоке в сети.

14. Показать, что задача о потоке с ограничениями пропускной способности узлов может быть преобразована в задачу с ограничениями, налагаемыми лишь на пропускные способности дуг.

15. Для данной неориентированной сети ограничения пропускной способности ребер ¹⁾ $p_i p_j$ имеют вид $x_{ij} + x_{ji} \leq c_{ij}$. Свести эту задачу к случаю ориентированной сети с ограничениями $x_{ij} \leq c_{ij}$. Что означает утверждение теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе в применении к исходной задаче?

16. Матрица **A** ограничений (6.4.1) понимается как матрица инцидентности узлов и дуг сети. Предполагая, что пропускные способности всех ребер положительны, доказать, что ранг матрицы **A** равен $n - 1$.

17. Выписать двойственную задачу к задаче о максимальном потоке в постановке (6.4.1) и (6.4.2) и показать, что процесс, описанный в п. 6.4, дает целочисленное решение этой двойственной задачи.

18. Пусть $\{S_i, \bar{S}_i\}$, где $i = 1, 2$, представляет два минимальных разреза в раздельной форме, т. е. совокупность дуг от S_i к его дополнению $\bar{S}_i$ является минимальным разрезом. Показать, что разрезы $\{S_1 \cup S_2, \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2\}$ и $\{S_1 \cap S_2, \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2\}$ также минимальны.

19. Обозначим через **P_j** и **Q** $n + 1$ векторов из E^m ($m < n$), удовлетворяющих предположению 6.1.1 о невырожденности. Пусть X есть множество всех векторов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{P}_i = \mathbf{Q}$$

и $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Положим

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) + \beta \sum_{i=1}^n \delta(x_i)$$

для $\mathbf{x} \in X$, где $\beta \geq 0$, а $\delta(x_i)$ равняется 1 или 0, смотря по тому, будет $x_i > 0$ или $x_i = 0$. Доказать, что всякая крайняя точка множества X , минимизирующая $\varphi_1(\mathbf{x})$, минимизирует также и $\varphi(\mathbf{x})$, и наоборот, всякая точка минимума функции $\varphi(\mathbf{x})$ есть точка минимума $\varphi_1(\mathbf{x})$.

20. Пусть из условий задачи 19 исключено предположение о невырожденности. Показать, что если

$$\inf_{\mathbf{x} \in X} \sum_{j=1}^n [\alpha_j x_j + \beta_j \delta(x_j)] = \mu > -\infty \quad (\beta_j \geq 0),$$

то существует такая крайняя точка $\mathbf{x}^*$ из X , что

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j^* + \beta_j \delta(x_j^*) = \mu.$$

¹⁾ В ориентированных сетях (графах) узлы соединяются дугами, а в неориентированных — ребрами. — *Прим. ред.*

21. Минимизировать функцию

$$\sum_{i=1}^N u_i$$

при ограничениях

$$u_i + u_{i+1} \geq \alpha_i \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

$$u_N + u_1 \geq \alpha_N$$

22. Использовать алгоритм п. 6.4 и задачу 16 для доказательства теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе (теоремы 5.10.1).

23. Пусть a_1 и a_2 — две дуги сети с пропускными способностями c_1 и c_2 , и пусть Δ_1 — приращение значения максимального потока, вызванное увеличением на единицу одного лишь c_1 . Аналогично определяется Δ_2 . Обозначим через Δ_{12} приращение значения потока, вызванное увеличением на 1 одновременно c_1 и c_2 . Доказать, что

(а) $\Delta_1 + \Delta_2 \geq \Delta_{12}$, если a_1 и a_2 выходят из источника;

(б) $\Delta_1 + \Delta_2 \leq \Delta_{12}$, если a_1 выходит из источника, а a_2 ведет к стоку.

Комментарии и библиография к главе 6

6.1. Практическое значение теории линейного программирования обусловливается широкой применимостью симплекс-метода, описанного в данном пункте. Заслугу открытия симплекс-метода Данциг приписывает фон Нейману, мимоходом предложившему идею метода в одной из их бесед. Однако именно Данциг подхватил эту идею и разработал метод, считающийся сейчас основой методики линейного программирования.

Элементарное, но исчерпывающее и проиллюстрированное примерами изложение симплекс-алгоритма, а также некоторых его модификаций можно найти в книге Чарнса, Купера и Хендерсона [1]. В монографии Чёрчмана, Аккофа и Арнофа [1] содержится обсуждение метода и также много примеров. Из других работ, посвященных симплекс-алгоритму, заслуживают внимание работы Эйземана [1] и Данцига [2]. Исчерпывающие книги на эту тему написаны Данцигом, а также Чарнсом и Купером; см. также учебник Гасса [1]. Книга Дорфмана, Самуэльсона и Солоу [1] является хорошим введением в круг идей и методов линейного программирования и примыкающих к нему экономических вопросов.

Идея введения свободных переменных впервые была предложена Данцигом; он же ввел прием введения искусственных переменных. Проблема вырождения при применении симплекс-алгоритма была решена Чарнсом [1] и независимо от него Данцигом, Орденсом и Вулфом [1]; изложенный здесь способ принадлежит Чарнсу.

6.2. Двойственный симплекс-алгоритм, как он изложен здесь, предложен Лемке [1]. Вагнер [1] провел исчерпывающее исследование алгоритма и выяснил роль теоремы двойственности как универсального вычислительного инструмента. Имеются методы, представляющие собой комбинации прямого

и двойственного симплекс-алгоритмов. Для ознакомления с этими методами, полезными для ряда задач, мы отсылаем читателя к работам Лемке [1] и Данцига [3]. Специальные обоснования симплекс-алгоритмов, прямого и двойственного, в случаях с вторичными ограничениями, а также параметрическое программирование изучались Гассом [1], Вагнером [1] и Данцигом [3].

6.3. Пример, разобранный в этом параграфе, принадлежит Уолнеру.

6.4. Описанный здесь изящный алгоритм, пригодный для решения задач потока в сетях и различных вариантов транспортной задачи, найден Фордом и Фулкерсоном [1]. Мы весьма близко следовали их изложению. Другие транспортные алгоритмы читатель найдет в работах Фулкерсона [1] и [2] и в работе Куна [5].

6.5. Сходящийся итеративный метод вычисления значения игры был предложен Брауном [2]. Строгое обоснование сходимости было сделано Дж. Робинсон. Некоторые видоизменения алгоритма принадлежат фон Нейману [4] и Брауну [1]. Непрерывные аналоги схемы в применении к бесконечным играм изучались Данскином [1].

6.6. Сходимость метода Брауна устанавливается весьма тонкими рассуждениями. Вопросы скорости сходимости нуждаются в дальнейшем исследовании наряду с вопросами типа следующего: что произойдет со сходимостью, если предыдущим стратегиям приписывать неравные веса?

6.7. Метод дифференциальных уравнений, принадлежащий Брауну и фон Нейману [1], был первоначально предложен с целью пролить свет на дискретный алгоритм, описанный в п. 6.5. Модификации этого метода произведены (не опубликовано) Беллманом.

6.8. Задача 2 взята из работы Аллена [1]. Задачи 14—18 предложены Фордом и Фулкерсоном [1]. Задачи 19 и 20 принадлежит Гиршу и Данцигу [1]. Задача 21 заимствована у Гросса [3]. Идея задачи 23 была указана Шенли.

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Нелинейное программирование является распространением теории линейного программирования на задачи максимизации нелинейных функций, удовлетворяющих общим ограничениям. К сожалению, представляется затруднительным получить общую качественную характеристику решений задач нелинейного программирования. Некоторый успех был достигнут, однако, для случая, когда максимизируемая функция является вогнутой (или выпуклой, если отыскивается минимум), а независимые переменные принимают значения из некоторого выпуклого множества. К счастью, во многих возникающих на практике экономических задачах и в задачах управления рассматриваемые функции естественным образом оказываются выпуклыми или вогнутыми. Эвристически предположению о выпуклости соответствует возрастание дохода на каждую последующую единицу затрат, а предположению о вогнутости соответственное уменьшение дохода. Кроме того, в теоретической экономике считается общепринятым предположение о вогнутости функций полезности, представляющих интересы каждого индивидуума (см. п. 8.5).

С математической точки зрения основной причиной того, что выпуклые или вогнутые функции поддаются анализу, является возможность приближения функций этого типа линейными функциями с некоторыми ограничительными неравенствами; геометрически это означает, что график выпуклой или вогнутой функции обладает опорными гиперплоскостями, т. е. гиперплоскостями, имеющими с графиком одну общую точку и такими, что весь график функции остается по одну сторону от гиперплоскости.

Основная цель этой главы состоит в доказательстве для случая нелинейного программирования аналогов теорем двойственности из линейного программирования и теорем об эквивалентности игровых задач задачам линейного программирования. Это осуществляется в п. 7.1 и 7.8.

В п. 7.2 весьма подробно описана межотраслевая модель производственных процессов. Эта модель представляет интерес ввиду ее возможных интерпретаций, а также благодаря математическим методам, использованным при ее анализе.

Приближенное решение задачи вогнутого программирования можно получить при решении некоторой связанной с этой задачей системы градиентных дифференциальных уравнений. Решения этих уравнений можно рассматривать как проявление механизма замены одних допустимых векторов другими, которым соответствует большая прибыль. Эти идеи обсуждены в п. 7.3.

В п. 7.5—7.7 излагается важная теория сопряженных выпуклых функций, обязанная своим появлением Фенхелю. Эта изящная и интересная математическая теория применяется в заключительных пунктах настоящей главы для доказательства теоремы двойственности в нелинейном программировании и для изучения структуры выпуклых множеств.

7.1. Вогнутое программирование. В нелинейном программировании рассматривается следующая задача.

Максимизировать функцию n вещественных переменных $g(x)$ при условиях, что $f_j(x) \geq 0$ ($j = 1, \dots, m$) и $x \in X$, где X — выпуклое подмножество пространства E^n .

Во многих приложениях множество X отождествляется с неотрицательным ортантом пространства E^n . Сформулированная задача называется *задачей вогнутого программирования*, если функции $g(x)$ и $f_j(x)$ являются вогнутыми функциями x .

В дальнейшем всюду, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что функции $g(x)$ и $f_j(x)$ в области X вогнуты.

Кун и Таккер были первыми, кто формально рассмотрел различные математические аспекты задач вогнутого программирования. Они выделили класс „собственных“ решений, являющихся существенными решениями, которые можно однозначно определить с помощью некоторых дифференциальных условий; доказательства этих условий, существенно связанные с дифференциальными методами, применимы только для этого класса собственных решений. Приводимые ниже методы свободны от подобного рода ограничений. Однако наши результаты скорее дополняют результаты Куна и Таккера, чем обобщают их, и поэтому в этой главе мы рассмотрим также и дифференциальный подход.

При соответствующих предположениях проблема отыскания максимальной точки x^0 в описанной выше задаче вогнутого программирования может быть преобразована в эквивалентную игровую задачу, т. е. в задачу о седловой точке.

Вначале мы докажем (теорема 7.1.1), что вектор x^0 максимизирует функцию $g(x)$ при ограничениях $\{f_j(x)\} = F(x) \geq 0$ (как уже указывалось, это вектор-функция) и $x \in X$ тогда и только тогда, когда существует такой вектор u^0 с неотрицательными компонентами, что для функции

$$\varphi(x, u) = g(x) + (u, F(x)) \quad (7.1.1)$$

выполняются неравенства

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \leq \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leq \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \quad (7.1.2)$$

для всех $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{x} \in X$. Пару векторов $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0\}$ будем называть при этом *седловой точкой ядра* $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Допустимый вектор $\mathbf{x}^0$, т. е. вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий условиям $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, называется оптимальным, если вектор $\mathbf{x}^0$ максимизирует функцию $g(\mathbf{x})$ среди всех допустимых векторов.

Экономическую интерпретацию, предложенную Куном и Таккером для задачи максимизации, удобнее описывать, связывая ее с игрой, функция выигрыша которой есть $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Обычно ограничения имеют вид $f_j(\mathbf{x}) = \xi_j - k_j(\mathbf{x})$, где ξ — некоторый фиксированный вектор, а k_j — выпуклые функции своего аргумента в области $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Вектор $\mathbf{x}$ характеризует интенсивность использования различных операций. Будем понимать под ξ вектор имеющихся в распоряжении количеств производственных ресурсов, а под $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ — вектор фактически используемых количеств этих ресурсов, так что вектор $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ есть количество неиспользованных производственных ресурсов. Функция $g(\mathbf{x})$ измеряет выпуск окончательного продукта. Вектор множителей Лагранжа $\mathbf{u}$, участвующий в определении функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, можно считать вектором цен единицы производственных ресурсов, выраженного в ценах единицы рассматриваемого продукта. Ядро $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ можно интерпретировать как ценностное выражение результата производства. В этом выражении объединены выпускаемый продукт и неиспользованные производственные ресурсы. Существование седловой точки означает, что между ценами имеющихся ресурсов и величиной выпуска имеет место равновесие, причем использование производственных ресурсов контролируется лицом, управляющим производственным процессом, в то время как цены определяются или назначаются некоторым независимым контрагентом (см. гл. 8).

Первую основную теорему можно сформулировать следующим образом.

► Теорема 7.1.1. Пусть $g(\mathbf{x})$ и $\{f_j(\mathbf{x})\} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ — вогнутые функции, определенные на выпуклом множестве $X \subset E^n$, обладающем тем свойством, что если $\mathbf{u}$ — неотрицательный вектор, не равный тождественно нулю, то существует такой вектор $\mathbf{x} \in X$, что $(\mathbf{u}, \mathbf{F}(\mathbf{x})) > 0$. Если $\mathbf{x}^0$ является точкой, в которой функция $g(\mathbf{x})$ достигает своего максимума при $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, т. е. если вектор $\mathbf{x}^0$ оптимален, то можно найти такой вектор $\mathbf{u}^0 \geq \mathbf{0}$, что для функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = g(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}, \mathbf{F}(\mathbf{x}))$ будут справедливы неравенства

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \leq \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leq \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \quad (7.1.2)$$

для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)) = 0$. Обратно, если пара $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0\}$ удовлетворяет соотношению (7.1.2), то вектор $\mathbf{x}^0$

максимизирует функцию $g(\mathbf{x})$ среди всех векторов $\mathbf{x}$, удовлетворяющих условиям $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{x} \in X$.

Замечание 7.1.1. Условия теоремы выполнены, если существует такой вектор $\mathbf{x} \in X$, что все компоненты вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ строго положительны. (В связи с этим см. задачу 12.) В общем случае, однако, произвольный вектор $\mathbf{x} \in X$, удовлетворяющий условию для данного $\mathbf{u}$, не обязан удовлетворять ограничению $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$.

Доказательство. Покажем сначала, что если $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0\}$ является седловой точкой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, то вектор $\mathbf{x}^0$ максимизирует функцию $g(\mathbf{x})$ при ограничениях $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$.

Подставив (7.1.1) в (7.1.2), мы получим

$$g(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x})) \leq g(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)) \leq g(\mathbf{x}^0) + (\mathbf{u}, \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)) \quad (7.1.3)$$

для всех $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.

Так как правое неравенство справедливо для любого $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^0) \geq \mathbf{0}, \quad (\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)) = 0. \quad (7.1.4)$$

Далее из левого неравенства (7.1.3) мы получаем

$$g(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x})) \leq g(\mathbf{x}^0) \quad (\mathbf{x} \in X). \quad (7.1.5)$$

Следовательно, для любого $\mathbf{x} \in X$, удовлетворяющего условию $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$, мы имеем

$$g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) + (\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x})) \leq g(\mathbf{x}^0),$$

что и доказывает оптимальность вектора $\mathbf{x}^0$.

Теперь мы докажем, что в условиях теоремы из оптимальности вектора $\mathbf{x}^0$ вытекает существование такого вектора $\mathbf{u}^0$, что пара $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0\}$ является седловой точкой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Рассмотрим два подмножества A и B $(m+1)$ -мерного пространства, определенные следующим образом:

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{c} y_0 \\ \mathbf{y} \end{array} \right) \mid \left(\begin{array}{c} y_0 \\ \mathbf{y} \end{array} \right) \leq \left(\begin{array}{c} g(\mathbf{x}) \\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) \end{array} \right) \text{ для некоторого } \mathbf{x} \in X \right\},$$

$$B = \left\{ \left(\begin{array}{c} y_0 \\ \mathbf{y} \end{array} \right) \mid \left(\begin{array}{c} y_0 \\ \mathbf{y} \end{array} \right) > \left(\begin{array}{c} g(\mathbf{x}^0) \\ \mathbf{0} \end{array} \right) \right\},$$

где, конечно, y_0 — скалярная величина, а $\mathbf{y}$ — m -мерный вектор.

Поскольку $g(\mathbf{x})$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — вогнутые функции, множество A называется выпуклым. Понятно также, что B — выпуклое множество, лежащее внутри ортанта с вершиной в точке

$$\left(\begin{array}{c} g(\mathbf{x}^0) \\ \mathbf{0} \end{array} \right).$$

В силу оптимальности вектора x^0 множества A и B не имеют общих векторов. Следовательно, по теореме об отделимости выпуклых множеств (теорема Б.1.2) существует такой вектор

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0,$$

что

$$v_0 y_0 + (v, y) \leq v_0 z_0 + (v, z) \quad \text{для всех} \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix} \in A, \begin{pmatrix} z_0 \\ z \end{pmatrix} \in B. \quad (7.1.6)$$

По определению множества B , из (7.1.6) вытекает, что

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v \end{pmatrix} > 0. \quad (7.1.7)$$

Ввиду того что

$$\begin{pmatrix} g(x^0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

является граничной точкой множества B , мы имеем в силу определения множества A

$$v_0 g(x) + (v, F(x)) \leq v_0 g(x^0) \quad (x \in X). \quad (7.1.8)$$

Отсюда следует, что $v_0 > 0$, поскольку в противном случае из (7.1.7) и (7.1.8) мы получили бы, что

$$v > 0, \quad \text{а} \quad (v, F(x)) \leq 0 \quad (x \in X),$$

а это противоречит условию теоремы.

Положим $v/v_0 = u^0$; тогда

$$u^0 \geq 0 \quad (7.1.9)$$

и

$$g(x) + (u^0, F(x)) \leq g(x^0) \quad (x \in X). \quad (7.1.10)$$

Полагая в (7.1.10) $x = x^0$, мы получаем

$$(u^0, F(x^0)) \leq 0.$$

С другой стороны, мы имеем

$$F(x^0) \geq 0 \quad (7.1.11)$$

и, следовательно,

$$(u^0, F(x^0)) = 0. \quad (7.1.12)$$

Из равенств (7.1.9) — (7.1.12) следует, что $\{x^0, u^0\}$ — седловая точка функции $\varphi(x, u)$.

Условия теоремы 7.1.1, слабые сами по себе, можно еще несколько ослабить, хотя они будут казаться при этом несколько неестественными. Однако некоторое условие невырожденности все же

должно быть отражено в формулировке теоремы, так как в противном случае она окажется неверной. Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned} g(x) &= x, \\ F(x) &= -x^2. \end{aligned}$$

Ясно, что $x=0$ будет оптимальным решением задачи, но функция $\varphi(x, u) = x - ux^2$ седловой точки не имеет.

В случае, когда ограничения задаются линейными неравенствами, т. е. когда неравенство $F(x) \geq 0$ имеет вид $Ax \leq b$, где A — некоторая матрица, а b — вектор, теорему 7.1.1 можно доказать без каких бы то ни было особых предположений относительно множества ограничений.

► Теорема 7.1.2. Пусть $g(x)$ — вогнутая функция, определенная для всех x . Если x^0 — точка, в которой функция $g(x)$ достигает своего максимума по всем x , удовлетворяющим ограничениям

$$x \geq 0, \quad Ax \leq b,$$

то существует такой вектор u^0 ($u^0 \geq 0$), что пара $\{x^0, u^0\}$ является седловой точкой функции

$$\varphi(x, u) = g(x) + (u, b - Ax),$$

и обратно.

Доказательство состоит в перефразировке вывода теоремы 5.3.1 с использованием при этом естественного распространения леммы 5.3.1 на этот случай. Детали мы опускаем.

Если предположить, что функции g и f_j достаточно гладки, так что производная $\partial\varphi/\partial x$ для любого неотрицательного x существует, то условия существования седловой точки можно записать в виде дифференциальных неравенств.

► Теорема 7.1.3. Пусть множество X является положительным ортантом. Для того чтобы пара векторов $\{x^0, u^0\}$ для любой непрерывно дифференцируемой функции φ удовлетворяла соотношению (7.1.2), необходимо выполнение условий

$$\varphi_x^0 = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \right]_{\{x^0, u^0\}} \leq 0, \quad (\varphi_x^0, x^0) = 0 \quad (x^0 \geq 0) \quad (7.1.13)$$

и

$$\varphi_u^0 = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_j} \right]_{\{x^0, u^0\}} \geq 0, \quad (\varphi_u^0, u^0) = 0 \quad (u^0 \geq 0). \quad (7.1.14)$$

Если функция $\varphi(x, u)$ вогнута по x и выпукла по u , то условия (7.1.13) и (7.1.14) являются для установления (7.1.2) необходимыми и достаточными.

Доказательство. Необходимость. Условия (7.1.13) и (7.1.14) показывают, что функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0)$ имеет локальный максимум в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, а функция $\varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u})$ — локальный минимум в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$. Следовательно, из (7.1.2) следуют соотношения (7.1.13) и (7.1.14).

Достаточность. Поскольку $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — вогнутая функция по $\mathbf{x}$, мы имеем

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) - \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leq (\varphi_{\mathbf{x}}^0, (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))$$

(свойство VII, приложение Б.4). Кроме того,

$$(\varphi_{\mathbf{x}}^0, (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)) = (\varphi_{\mathbf{x}}^0, \mathbf{x}) - (\varphi_{\mathbf{x}}^0, \mathbf{x}^0) \leq 0.$$

Поэтому

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0) \leq \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \quad (\mathbf{x} \geq 0).$$

С другой стороны, используя выпуклость функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ по $\mathbf{u}$ и условие (7.1.14), мы получаем

$$\varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \geq (\varphi_{\mathbf{u}}^0, \mathbf{u} - \mathbf{u}^0) = (\varphi_{\mathbf{u}}^0, \mathbf{u}) \geq 0 \quad (\mathbf{u} \geq 0).$$

7.2. Примеры вогнутого программирования. В этом пункте будут описаны две модели (выбор портфеля ценных бумаг и межотраслевая модель производственных процессов), которые естественным образом приводят к задачам вогнутого программирования.

Более общие задачи нелинейного программирования возникают в связи с анализом некоторых проблем производства и управления запасами.

В общем случае не существует стандартных методов, пригодных для решения задач нелинейного программирования, т. е. нет ничего соответствующего стандартному симплекс-методу в линейном программировании. Тем не менее скромный перечень типов задач нелинейного программирования, допускающих хотя бы по идее общий подход, может быть приведен. Например, как мы видели в п. 7.1, задача вогнутого программирования может быть сведена к эквивалентной задаче Лагранжа о седловой точке. Кроме того, известен следующий, пожалуй, очевидный факт: решение задачи выпуклого программирования (максимизация выпуклой функции, когда изменение переменных ограничено выпуклым множеством) должно быть некоторой крайней точкой множества X . Дальнейшие частные качественные результаты можно получать для отдельных классов задач (см. гл. 8). Следует заметить, что, поскольку не существует единого алгоритма для решения задач нелинейного программирования — и, как становится ясно, этот недостаток присущ самой проблеме, — анализ частных примеров вдвойне важен.

А. *Выбор портфеля*¹⁾ ценных бумаг. Процесс выбора портфеля ценных бумаг состоит из двух этапов. На первом этапе оцениваются возможности имеющихся ценных бумаг в будущем. Второй этап начинается тогда, когда возникает доверие к этим возможностям, и заканчивается выбором портфеля. Мы рассмотрим здесь второй этап процесса. В частности, мы попытаемся определить те правила, которыми должен руководствоваться вкладчик, чтобы максимизировать ожидаемый доход.

Пусть R_i — суммарная²⁾ прибыль на единицу ценности вида i . Величину R_i можно определить как бесконечную сумму вида

$$R_i = \sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it},$$

где r_{it} — ожидаемый дивидент в момент t на один доллар, вложенный в бумаги i , а d_{it} — доля дохода бумаг с номером i в момент t в пересчете на настоящий момент времени.

Предположим, что иных ценностей, кроме уже рассмотренных нами ($i = 1, \dots, N$), нет. Пусть $\{x_i\}$ описывает некоторую политику инвестиций, т. е. политику распределения капитала, причем x_i обозначает долю, вложенную в бумаги i ; таким образом,

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

Предположим далее, что $x_i \geq 0$. Отсюда следует, что продаваться могут лишь ценности, имеющиеся в наличии. Полный относительный доход, полученный в результате такой политики, равен

$$\sum_{i=1}^N R_i x_i = P(x). \quad (7.2.1)$$

Если мы предположим, что R_i — случайные величины, распределенные нормально с известными средними μ_i и с матрицей вторых моментов $\|\sigma_{ij}\|$, то среднее $P(x)$ будет равно

$$\sum_{i=1}^N \mu_i x_i,$$

а его дисперсия —

$$\sum_{i,j} x_i x_j \sigma_{ij}.$$

Рассмотрим целевую функцию

$$g(x) = a \sum_{i=1}^N \mu_i x_i - b \sum_{i,j} x_i x_j \sigma_{ij}, \quad (7.2.2)$$

¹⁾ Здесь слово „портфель“ используется в том же смысле, что и в выражениях „издательский портфель“, „редакционный портфель“. — *Прим. перев.*

²⁾ В оригинале „discounted“ т. е. с учетом надлежащего коэффициента скидки для каждого момента времени. — *Прим. перев.*

где a и b — положительные параметры, относительная величина которых описывает важность составляющих элементов функции $g(\mathbf{x})$. Первый из них представляет собой математическое ожидание относительного дохода, получаемого в результате полигики $\mathbf{x}$. Понятно, что этот доход должен быть как можно больше. Параметр b измеряет изменчивость дохода, и его можно рассматривать как риск, связанный с данным выбором портфеля ценных бумаг.

Итак, проблема состоит в максимизации $g(\mathbf{x})$ при ограничениях

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

Мы получили, очевидно, некоторую задачу вогнутого программирования, к которой применимы результаты п. 7.1. Можно использовать также и алгоритм квадратичного программирования (см. задачу 13 и примечания к этой главе).

Б. Межотраслевая модель нелинейного программирования. Предположим, что для каждого из n рассматриваемых продуктов существуют процессы производства, импорта и экспорта. Пусть

X_j — количество производимого продукта j ;

M_j — количество импортируемого продукта j ;

E_j — количество экспортируемого продукта j .

Параметрами в этой модели являются следующие величины:

a_{ij} — коэффициент затрат продукта i , используемого в производстве j (т. е. количество продукта i , идущее на производство единицы продукта j);

w_j — затраты труда, используемого в производстве единицы продукта j ;

c_j — затраты капитала, используемого в производстве единицы продукта j ;

g_j — цена единицы продукта j при импорте;

h_j — цена единицы продукта j при экспорте;

Y_j — конечный спрос на продукт j (мы предполагаем, что этот спрос строго положителен);

L — имеющийся в распоряжении труд;

D — максимальный допустимый дефицит в торговле.

(Естественно, что все параметры модели предполагаются неотрицательными.)

Задачу программирования можно поставить так: минимизировать требуемые капиталовложения

$$c = \sum_j c_j X_j \quad (7.2.3)$$

при следующих ограничениях.

Неотрицательность:

$$X_j \geq 0, \quad M_j \geq 0, \quad E_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.2.4)$$

Производство:

$$X_j + M_j - E_j - \sum_{r=1}^n a_{jr} X_r \geq Y_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.2.5)$$

Это показывает, что если из общего количества $X_j + M_j$ единиц произведенного и ввезенного продукта E_j единиц экспортируется и

$$\sum_{r=1}^n a_{jr} X_r$$

единиц используется на нужды собственного производства, то следует оставить количество продукта, достаточное для удовлетворения конечного спроса Y_j на него.

Баланс внешней торговли:

$$D + \sum_{j=1}^n h_j E_j - \sum_{j=1}^n g_j M_j \geq 0. \quad (7.2.6)$$

Так как прибыль от экспорта составляет

$$\sum_{j=1}^n h_j E_j,$$

а цена ввезенных продуктов

$$\sum_{j=1}^n g_j M_j,$$

то соотношение (7.2.6) выражает допустимый дефицит торговли.

Предложение труда:

$$L - \sum_j w_j X_j \geq 0. \quad (7.2.7)$$

Два дальнейших естественных ограничения таковы:

$$a_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad \sum_i a_{ij} < 1 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (7.2.8)$$

и

$$h_j = \gamma_j + \rho_j E_j, \quad \gamma_j > 0, \quad \rho_j < 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.2.9)$$

Первое ограничение означает лишь то, что стоимость выпуска для каждого продукта превосходит затраты на его производство; это необходимо для эффективности производственных планов. Второе условие в экономике общепринято: чем больше количество имеющихся экспортных товаров, тем меньше доход на единицу

товара. Линейная форма (7.2.9) соответствует частному случаю такой зависимости. Взглянув на (7.2.9), читатель легко заметит, что вся нелинейность этой модели заключена в (7.2.6).

*) *Формальное описание метода.* Минимизируемая функция (7.2.3) является выпуклой по X_j ($j=1, \dots, n$), и множество $\{X, M, E\}$, удовлетворяющее ограничениям (7.2.4) — (7.2.7), также выпукло. Предположим теперь, что существует допустимая тройка $\{X^0, M^0, E^0\}$, удовлетворяющая в (7.2.5), (7.2.6) и (7.2.7) строгим неравенствам. В силу теоремы 7.1.1 вектор

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{M} \\ \bar{E} \end{pmatrix}$$

будет оптимальным для данной задачи тогда и только тогда, когда существует такой вектор

$$\bar{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \bar{P} \\ \bar{P}_w \\ \bar{P}_f \end{pmatrix},$$

что $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}\}$ является седловой точкой функции Лагранжа $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = & - \sum_j c_j X_j + \sum_j P_j \left(X_j - \sum_r a_{jr} X_r + M_j - E_j - Y_j \right) + \\ & + P_w \left(L - \sum_j w_j X_j \right) + P_f \left(D - \sum_j g_j M_j + \sum_j h_j E_j \right). \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

Это значит, что

$$\varphi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}}) \leq \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \varphi(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{p}) \quad (7.2.11)$$

для всех

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ M \\ E \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} P \\ P_w \\ P_f \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Заметим, что в силу (7.2.5) и того, что $Y_j > 0$ для любого допустимого вектора $\begin{pmatrix} X \\ M \\ E \end{pmatrix}$, мы имеем

$$X_j + M_j > 0 \quad (j=1, \dots, n). \quad (7.2.12)$$

*) Оставшаяся часть пункта значительно сложнее и без нарушения связности изложения может быть при первом чтении опущена.

Подставляя (7.2.9) в (7.2.10) и приводя подобные члены, мы получаем

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = & P_w L + P_f D - \sum_j P_j Y_j + \\ & + \sum_j \left(-c_j + P_j - \sum_i P_i a_{ij} - P_w w_j \right) X_j + \\ & + \sum_j (P_j - P_f g_j) M_j + \sum_j [(-P_j + P_f \gamma_j) E_j + P_f \rho_j E_j^2].\end{aligned}\quad (7.2.13)$$

Задача о седловой точке решается следующим образом. Мы покажем, что компоненты вектора $\bar{\mathbf{p}}$ определяются однозначно и могут быть выписаны в явном виде. Если же вектор $\bar{\mathbf{p}}$ известен, то не представит труда найти и вектор $\bar{\mathbf{x}}$, максимизирующий функцию $\varphi(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{p}})$. Это завершает решение задачи.

Для того чтобы вектор

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} P \\ P_w \\ P_f \end{pmatrix}$$

был $\mathbf{p}$ -компонентой седловой точки, необходимо, во-первых, чтобы

$$\max_{\mathbf{x} \geq 0} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$$

был конечным и, во-вторых, чтобы существовал такой вектор

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ M \\ E \end{pmatrix},$$

максимизирующий $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, для которого выполнено (7.2.12).

Для ограниченности (7.2.13) коэффициенты при X_j и M_j должны быть неположительны. Поэтому оба условия удовлетворяются тогда и только тогда, когда

$$P_j - P_f g_j \leq 0, \quad (7.2.14)$$

$$P_j - \sum_i P_i a_{ij} - P_w w_j - c_j \leq 0 \quad (7.2.15)$$

и для каждого $j = 1, \dots, n$ равенство достигается либо в одном из соотношений (7.2.14) и (7.2.15), либо в обоих этих соотношениях сразу (поскольку $X_j + M_j > 0$).

Условия (7.2.14) и (7.2.15) мы можем заменить на следующее:

$$P_j = \min \left\{ P_f g_j, \sum_i P_i a_{ij} + P_w w_j + c_j \right\} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (7.2.16)$$

Уравнение (7.2.16) имеет при заданных P_f и P_w не более одного решения P_j . Чтобы доказать это, предположим, что при заданных P_f и P_w уравнению (7.2.16) удовлетворяют и P_j и $\tilde{P}_j$ ($j=1, \dots, n$). Рассмотрим случай, когда

$$P_j = P_f g_j \leq \sum_i P_i a_{ij} + P_w w_j + c_j,$$

$$\tilde{P}_j = \sum_i \tilde{P}_i a_{ij} + P_w w_j + c_j \leq P_f g_j.$$

Тогда

$$|P_j - \tilde{P}_j| \leq \left| \sum_i (P_i - \tilde{P}_i) a_{ij} \right| \leq \left(\max_i |P_i - \tilde{P}_i| \right) c \quad (j=1, \dots, n),$$

где $c = \max_j \sum_i a_{ij}$ и в силу условия (7.2.8) меньше 1. То же самое неравенство выполнено при всех других обстоятельствах, и мы получаем $P_j = \tilde{P}_j$ ($j=1, \dots, n$).

Опишем теперь итеративный процесс нахождения решения уравнения (7.2.16) при заданных P_f и P_w .

Компоненты вектора $(P_1, \dots, P_n)$, удовлетворяющего соотношению (7.2.16), будут определяться в порядке $\dots, P_n^{(\nu)}, \dots, P_1^{(\nu)}, P_n^{(\nu+1)}, \dots, P_1^{(\nu+1)}, \dots$ из рекуррентных соотношений

$$P_j^{(\nu+1)} = \min \left\{ P_f g_j, \sum_{i>j} P_i^{(\nu+1)} a_{ij} + \sum_{i \leq j} P_i^{(\nu)} a_{ij} + P_w w_j + c_j \right\} \\ (j=1, \dots, n; \nu=0, 1, 2, \dots) \quad (7.2.17)$$

при любых неотрицательных начальных значениях $P_1^{(0)}, \dots, P_n^{(0)}$.

► Лемма 7.2.1. Для любых неотрицательных (P_w, P_f) и любых неотрицательных начальных величин $(P_1^{(0)}, \dots, P_n^{(0)})$ последовательность векторов $(P_1^{(\nu)}, \dots, P_n^{(\nu)})$ ($\nu=1, 2, \dots$), определенных соотношением (7.2.17), сходится к вектору $(P_1, \dots, P_n)$, удовлетворяющему уравнению (7.2.16).

Доказательство. Заметим сначала, что

$$|P_j^{(\nu+1)} - P_j^{(\nu)}| \leq K c^\nu, \quad (7.2.18)$$

где K — положительная постоянная и $c = \max_j \sum_i a_{ij}$. Справедливость неравенства (7.2.18) будем доказывать по индукции. Предположим, что

$$|P_j^{(k+1)} - P_j^{(k)}| \leq K c^k \quad (k=0, 1, \dots, \nu-1; j=1, \dots, n; \\ k=\nu; j>i).$$

Тогда в силу (7.2.17) мы имеем

$$\begin{aligned}
 |P_j^{(y+1)} - P_j^{(y)}| &\leq \left| \left(\sum_{i>j} P_i^{(y+1)} a_{ij} + \sum_{i \leq j} P_i^{(y)} a_{ij} + P_w w_j + c_j \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\sum_{i>j} P_i^{(y)} a_{ij} + \sum_{i \leq j} P_i^{(y-1)} a_{ij} + P_w w_j + c_j \right) \right| = \\
 &= \left| \sum_{i>j} (P_i^{(y+1)} - P_i^{(y)}) a_{ij} + \sum_{i \leq j} (P_i^{(y)} - P_i^{(y-1)}) a_{ij} \right| \leq \\
 &\leq \sum_{i>j} |P_i^{(y+1)} - P_i^{(y)}| a_{ij} + \sum_{i \leq j} |P_i^{(y)} - P_i^{(y-1)}| a_{ij} \leq \\
 &\leq Kc^y \sum_{i>j} a_{ij} + Kc^{y-1} \sum_{i \leq j} a_{ij} \leq \\
 &\leq Kc^{y-1} \sum_i a_{ij} \leq Kc^y,
 \end{aligned}$$

так как $c < 1$.

Сходимость последовательности $P_j^{(y)}$ к пределу P_j , который должен, очевидно, удовлетворять соотношению (7.2.16), теперь ясна, и доказательство леммы завершено.

Для случая треугольной матрицы, т. е. когда

$$a_{ij} = 0 \text{ при } i \leq j,$$

рекуррентные формулы (7.2.17) заменяются на явное выражение

$$P_j = \min \left\{ P_j g_j, \sum_{i>j} P_i a_{ij} + P_w w_j + c_j \right\}, \quad (7.2.19)$$

применяемую последовательно для $j = n, \dots, 1$.

Теперь можно определить вектор

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{M} \\ \hat{E} \end{pmatrix},$$

который максимизирует $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ при условии $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ и фиксированном $\mathbf{p}$. Пусть

$$S = \{j \mid P_j < \sum_{i>j} P_i a_{ij} + P_w w_j + c_j\},$$

$$T = \{j \mid P_j < P_j g_j\}.$$

Из формулы (7.2.19) следует, что множества S и T не пересекаются. Тогда

$$\hat{E}_j = \max \left\{ 0, \frac{P_f \chi_j - P_j}{-2P_f \rho_j} \right\} \quad (j = 1, \dots, n), \quad (7.2.20)$$

поскольку член в выражении (7.2.13), содержащий E_j , квадратичен и достигает минимума, когда E_j принимает значение $\hat{E}_j$, определенное

соотношением (7.2.20). Аналогично, ввиду линейности членов в (7.2.13), содержащих X_j и M_j , будем иметь $\hat{X}_j = 0$ для $j \in S$ и $\hat{M}_j = 0$ для $j \in T$.

Мы можем определить $\hat{X}_j$ и $\hat{M}_j$ как решения следующих ниже уравнений, максимизирующих функцию $\varphi(x, p)$; именно

$$\hat{X}_j - \sum_{k \notin S} a_{jk} \hat{X}_k = Y_j + \hat{E}_j \text{ для } j \notin S \quad (7.2.21)$$

и

$$\hat{M}_j = Y_j + \hat{E}_j + \sum_{k \notin S} a_{jk} \hat{X}_k \text{ для } j \notin T. \quad (7.2.22)$$

Используя условие (7.2.8), легко доказать, что уравнения (7.2.21) имеют единственное строго положительное решение. Величины $\hat{X}_j$ и $\hat{M}_j$ как функции P_f и P_w , вычисленные с помощью (7.2.21) и (7.2.22), удовлетворяют ограничениям (7.2.5).

Положим

$$L(P_w, P_f) = \sum_j w_j \hat{X}_j$$

и

$$D(P_w, P_f) = \sum_j g_j \hat{M}_j - \sum_j \hat{h}_j \hat{E}_j,$$

где

$$\hat{h}_j = \gamma_j + \rho_j \hat{E}_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

С помощью теоремы 7.1.1 может быть доказана

► **Лемма 7.2.2.** *Пара (P_w, P_f) тогда и только тогда определяет оптимальный вектор $(P_1, \dots, P_n, P_w, P_f)$, когда*

$$L(P_w, P_f) \leq L \text{ и } D(P_w, P_f) \leq D, \quad (7.2.23)$$

причем равенство достигается только в том случае, если

$$P_w > 0 \text{ и } P_f > 0.$$

Поскольку $L(P_w, P_f)$ и $D(P_w, P_f)$ приближенно являются линейными функциями переменных P_w и P_f , оптимальная пара $\{P_w, P_f\}$ может быть аппроксимирована путем линейной интерполяции.

Если нельзя выбрать P_w и P_f так, чтобы удовлетворялись условия (7.2.23), то равенства (7.2.21) и (7.2.22) нужно заменить на

следующие:

$$\hat{X}_j + \hat{M}_j - \sum_R a_{jk} \hat{X}_k = Y_j + \hat{E}_j \quad \text{для } j \in R = (1, \dots, n) \setminus S \setminus T,$$

$$\hat{X}_j - \sum_{k \notin S} a_{jk} \hat{X}_k = Y_j + \hat{E}_j \quad \text{для } j \in T$$

и

$$\hat{M}_j = Y_j + \hat{E}_j + \sum_{k \in S} a_{ij} \hat{X}_k \quad \text{для } j \in S \setminus T.$$

Теперь наша задача сведена к стандартной задаче линейного программирования. Заметим, что в большинстве случаев решения уравнений (7.2.21) и (7.2.22) все же существуют.

Описанная модель представляет для нас интерес по двум причинам. Одна из них состоит в пригодности этой модели для нахождения оптимальных планов в задаче о производстве, экспорте и импорте продукции. Вторая и наиболее важная причина состоит в том, что эта модель является аппаратом исследования сходных задач нелинейного программирования.

7.3*. Градиентный метод Эрроу — Гурвица. Как показывают теоремы 7.1.1 и 7.1.2, задачи вогнутого программирования можно решать, находя седловые точки функции Лагранжа $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, причем функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ является вогнутой по $\mathbf{x}$ и линейной по $\mathbf{u}$. В этом пункте мы опишем итеративный метод нахождения седловой точки функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ с помощью классической системы градиентных уравнений, измененных на границе так, чтобы получить решение в положительном ортанте.

Пусть функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ строго вогнута по $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ и линейна по $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$. Для первой части рассуждений достаточно даже предположить, что $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ выпукла по $\mathbf{u}$.

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \begin{cases} 0, & \text{если } x_i = 0 \text{ и } \varphi_{x_i} < 0 \\ \varphi_{x_i}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, n), \\ \dot{u}_k &= \begin{cases} 0, & \text{если } u_k = 0 \text{ и } \varphi_{u_k} > 0 \\ -\varphi_{u_k}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (k = 1, \dots, m), \end{aligned} \quad (7.3.1)$$

где через φ_{x_i} обозначены частные производные функции φ по x_i , а через φ_{u_k} — частные производные по u_k . (Всякий раз, когда мы пишем φ_{x_i} или φ_{u_k} без указания на точки, в которых эти производные вычисляются, читатель без труда восполнит недостающую информацию.)

Далее мы будем предполагать, что система (7.3.1) имеет решение $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}$, которое единственным образом определяется по любым начальным данным $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0\} \geq \mathbf{0}$ и непрерывно по отношению к $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0\}$.

► Теорема 7.3.1. Пусть функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ строго вогнута по $\mathbf{x}$, выпукла по $\mathbf{u}$ и имеет седловую точку. Тогда решение $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}$ с произвольными неотрицательными начальными данными $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0\}$ сходится к седловой точке функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $\mathbf{x}$ -компонента $\bar{\mathbf{x}}$ седловой точки функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ определяется однозначно. Предположим противное: $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}\}$ и $\{\bar{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}\}$ — две такие седловые точки функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, что $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\bar{\mathbf{x}}}$. Тогда в силу строгой вогнутости функции φ по $\mathbf{x}$ и по определению седловой точки мы имеем

$$\varphi(\bar{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\mathbf{u}}) < \varphi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \leq \varphi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{u}}})$$

и

$$\varphi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}) < \varphi(\bar{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}) \leq \varphi(\bar{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\mathbf{u}}),$$

откуда

$$\varphi(\bar{\bar{\mathbf{x}}}, \bar{\mathbf{u}}) < \varphi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}),$$

что невозможно.

Рассмотрим теперь решение $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\}$ с начальными данными $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0\}$ и положим

$$V(t) = \frac{1}{2} \{ |\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}|^2 + |\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}|^2 \},$$

где $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}\}$ — седловая точка функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. [Выражение $|\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}|$ означает длину вектора $\bar{\mathbf{x}}(t) - \bar{\mathbf{x}}$ в евклидовом пространстве; аналогично определяется $|\mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}|$.]

Мы докажем, что

$$\dot{V}(t) \leq 0 \quad \text{для любого } t$$

и

$$\dot{V}(t) < 0 \quad \text{для такого } t, \text{ что } \mathbf{x}(t) \neq \bar{\mathbf{x}}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}) + (\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}) = \\ &= (\varphi_{\mathbf{x}(t)}, \mathbf{x}_{1(t)} - \bar{\mathbf{x}}_{1(t)}) - (\varphi_{\mathbf{u}(t)}, \mathbf{u}_{1(t)} - \bar{\mathbf{u}}_{1(t)}), \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

где

$$\mathbf{x}_I(t) = \delta_{x(t)} \cdot \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{u}_I(t) = \delta_{u(t)} \cdot \mathbf{u}(t),$$

$$\bar{\mathbf{x}}_I(t) = \delta_{x(t)} \bar{\mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{u}}_I(t) = \delta_{u(t)} \bar{\mathbf{u}},$$

$$\delta_{x(t)} = \begin{pmatrix} \delta_{x_1(t)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{x_n(t)} \end{pmatrix},$$

$$\delta_{u(t)} = \begin{pmatrix} \delta_{u_1(t)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{u_m(t)} \end{pmatrix},$$

$$\delta_{x_i(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i(t) = 0 \text{ и } \varphi_{x_i(t)} < 0, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\delta_{u_k(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } u_k(t) = 0 \text{ и } \varphi_{u_k(t)} > 0, \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ввиду того что функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ строго вогнута по $\mathbf{x}$ и выпукла по $\mathbf{u}$, мы имеем

$$\varphi[\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(t)] - \varphi[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \leq (\varphi_{x(t)}, \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(t)) \quad \text{для } \bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}(t) \quad (7.3.3)$$

и

$$\varphi[\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}] - \varphi[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \geq (\varphi_{u(t)}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}(t)). \quad (7.3.4)$$

(см. приложение Б.4). Далее, поскольку $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}\}$ является седловой точкой функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$,

$$\varphi[\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}] \leq \varphi(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \leq \varphi[\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(t)].$$

Следовательно,

$$0 \leq \varphi[\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(t)] - \varphi[\mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}] < (\varphi_{x(t)}, \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(t)) - \\ - (\varphi_{u(t)}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}(t)). \quad (7.3.5)$$

Положим

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{I(t)} + \mathbf{x}_{II(t)}, \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{I(t)} + \mathbf{u}_{II(t)}.$$

Из (7.3.2) и (7.3.5), учитывая, что

$$(\varphi_{x(t)}, \mathbf{x}_{II(t)}(t)) = 0, \quad (\varphi_{u(t)}, \mathbf{u}_{II(t)}(t)) = 0,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (\varphi_{x(t)}, x(t) - \bar{x}) - (\varphi_{x(t)}, x_{II(t)} - \bar{x}_{II(t)}) - \\ &\quad - (\varphi_{u(t)}, u(t) - \bar{u}) + (\varphi_{u(t)}, u_{II(t)} - \bar{u}_{II(t)}) < \\ &< (\varphi_{x(t)}, \bar{x}_{II(t)}) - (\varphi_{u(t)}, \bar{u}_{II(t)}) \leq 0, \end{aligned}$$

если $x(t) \neq \bar{x}$. (7.3.6)

Последнее неравенство справедливо, так как, по определению, $\bar{x}_{II(t)}$ имеет ненулевые компоненты только тогда, когда $\varphi_{x(t)} \leq 0$, а $\bar{u}_{II(t)}$ имеет ненулевые компоненты только тогда, когда $\varphi_{u(t)} \geq 0$. Аналогично $\dot{V}(t) \leq 0$ для любого t .

Покажем, что x -компонента $x(t)$ сходится к однозначно определяемой x -компоненте $\bar{x}$ седловой точки.

Поскольку $\dot{V}(t) \leq 0$ для любого t , а $V(t) \geq 0$, существует

$$V^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t).$$

Поэтому множество $\{x(t) | t \geq 0\}$ ограничено. Пусть x^* — предельная точка множества $\{x(t) | t \geq 0\}$. Тогда существует такая последовательность $\{t_v\}$, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} x(t_v) = x^*$$

и

$$\lim_{v \rightarrow \infty} u(t_v) = u^*$$

для некоторого u^* . По предположению о единственности решение с начальными данными $\{x(t_v), u(t_v)\}$ запишется как $\{x(t + t_v), u(t + t_v)\}$. Поскольку решение непрерывно зависит от начальных данных, мы получаем, что

$$\{x^*(t), u^*(t)\} = \lim_{v \rightarrow \infty} \{x(t + t_v), u(t + t_v)\},$$

где $\{x^*(t), u^*(t)\}$ представляет решение с начальными данными $\{x^*, u^*\}$. Но

$$\begin{aligned} V^* &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \{ |x(t + t_v) - \bar{x}|^2 + |u(t + t_v) - \bar{u}|^2 \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ |x^*(t) - \bar{x}|^2 + |u^*(t) - \bar{u}|^2 \}. \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

Это противоречит соотношению (7.3.6), если x^* отлично от $\bar{x}$. Следовательно, каждая предельная точка множества $\{x(t)\}$ совпадает с $\bar{x}$, и мы заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}.$$

Докажем, наконец, что u -компонента решения $u(t)$ сходится к u -компоненте $\tilde{u}$ седловой точки $\{\bar{x}, \tilde{u}\}$, хотя $\tilde{u}$ и не обязано совпадать с $\bar{u}$. Поскольку $V(t) \rightarrow V^*$ и $x(t) \rightarrow \bar{x}$, мы получаем, что $u(t)$ сходится; обозначим предел $u(t)$ через $\tilde{u}$. Поскольку частная производная $\varphi_u(\bar{x}, u)$ не зависит от u (φ — линейная функция по u), должно выполняться соотношение

$$\varphi_u(\bar{x}, \tilde{u}) = \varphi_u(\bar{x}, \bar{u}) \geq 0, \quad (7.3.8)$$

причем неравенство справа выполняется, потому что $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ — седловая точка (теорема 7.1.3). Но $\dot{V}(t)$ стремится к нулю; поэтому из равенства (7.3.2) мы получаем, что разность

$$(\varphi_{x(t)}, x_{I(t)} - \bar{x}_{I(t)}) - (\varphi_{u(t)}, u_{I(t)} - \bar{u}_{I(t)})$$

стремится к нулю. Однако, поскольку $x_{I(t)} \rightarrow \bar{x}_{I(t)}$, мы имеем

$$(\varphi_u(\bar{x}, \tilde{u}), \tilde{u}_I - \bar{u}_I) = 0,$$

или

$$(\varphi_u(\bar{x}, \tilde{u}), \tilde{u}_I) = (\varphi_u(\bar{x}, \bar{u}), \bar{u}_I),$$

если учесть, что $\varphi_u(\bar{x}, u)$ не зависит от u . Индексы при $\tilde{u}_I$ включают члены, в которых $\tilde{u}_j > 0$ по определению функции I . Однако по теореме 7.1.3 $\varphi_u(\bar{x}, \bar{u}) \geq 0$, $\bar{u} \geq 0$ и $(\varphi_u(\bar{x}, \bar{u}), \bar{u}) = 0$. Следовательно, из (7.3.8) и из определения $\tilde{u}_I$ мы имеем

$$0 \leq (\varphi_u(\bar{x}, \tilde{u}), \tilde{u}) \leq (\varphi_u(\bar{x}, \bar{u}), \bar{u}) = 0,$$

что дает нам

$$(\varphi_u(\bar{x}, \tilde{u}), \tilde{u}) = 0. \quad (7.3.9)$$

Сравнивая (7.3.8) и (7.3.9) с утверждением теоремы 7.1.3, мы заключаем, что $\{\bar{x}, \tilde{u}\}$ является седловой точкой, что и требовалось.

7.4. Векторная задача максимизации. Задача нелинейного программирования из п. 7.1 может быть распространена на проблемы максимизации векторной функции $G(x)$ на E^r при ограничениях $F(x) \geq 0$, $x \in X$, где X — замкнутое и выпуклое множество. Предполагается, что компоненты функций $G(x)$ и $F(x)$ являются вогнутыми функциями переменной x . Будем говорить, что вектор x^0 , удовлетворяющий ограничениям (т. е. допустимый вектор), является эффективной точкой, если не существует другого допустимого вектора x , для которого $G(x) \geq G(x^0)$. Векторная задача максимизации заключается в нахождении всех эффективных точек.

Как и прежде, будем предполагать, что ограничения $F(x) \geq 0$ и $x \in X$ удовлетворяют условиям теоремы 7.1.1. Эффективная точка x^0 ,

Удовлетворяющая ограничениям, характеризуется при помощи построения обычной задачи максимизации с теми же самыми ограничениями, для которой $\mathbf{x}^0$ является точкой максимума. В этом отношении следующая далее лемма является основополагающей.

► Лемма 7.4.1. Если $\mathbf{x}^0$ является эффективной точкой, то существует такой вектор $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_r)$ с компонентами $v_i \geq 0$, удовлетворяющими равенству

$$\sum_{i=1}^r v_i = 1,$$

что максимум функции $g(\mathbf{x}) = (\mathbf{v}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))$ на множестве всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих ограничениям $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in X$, достигается для $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$.

Доказательство. Множество ограничений, которое, очевидно, выпукло, обозначим через S . Положим

$$H = \{y = \mathbf{G}(\mathbf{x}) - \mathbf{G}(\mathbf{x}^0) \in E^r \mid \mathbf{x} \in S\},$$

а через K обозначим выпуклую оболочку множества H . Поскольку $\mathbf{x}^0$ — эффективная точка, множество H не может совпадать с внутренностью положительного ортанта пространства E^r . Из вогнутости функции $\mathbf{G}$ и эффективности точки $\mathbf{x}^0$ мы немедленно получаем, что и множество K не содержит внутренних точек положительного ортанта. Пусть вектор

$$\xi = (\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_r^0, c) \quad (\xi \neq 0)$$

определяет гиперплоскость, которая отделяет положительный ортант от множества K . Используя здесь аргументацию леммы Б.1.3, мы получаем, что $\xi_i^0 \geq 0$ и $c = 0$. Положим

$$v_i^0 = \frac{\xi_i^0}{\sum_j \xi_j^0}.$$

Теперь легко убедиться в том, что вектор $\mathbf{v}^0$ удовлетворяет заключению леммы.

Замечание 7.4.1. Предположим на мгновение, что функция $\mathbf{G}$ имеет непрерывные частные производные. Если множество H не касается в нуле ни одной координатной оси, то отделяющая гиперплоскость ξ может быть выбрана так, что она касается первого ортанта только в нуле. Мы видим, что в этом случае $v_i^0 > 0$ для всех i . Укажем теперь некоторые условия, которые обеспечивают наличие этого свойства.

► Следствие 7.4.1. Если точка x^0 является эффективной внутренней точкой множества ограничений S , обладающей тем свойством, что неравенства $G_{x^0} dx \geq 0$ не выполняются ни для какого вектор-дифференциала dx , то соответствующий вектор v в лемме 7.4.1 можно выбрать так, что все его компоненты будут положительны.

То же заключение справедливо, если вектор x^0 является эффективным и принадлежит границе множества ограничений, при условии, что неравенства $G_{x^0} dx \geq 0$ не выполняются ни для какого вектор-дифференциала, удовлетворяющего условиям $F_{x^0} dx \geq 0$, $I_1 dx \geq 0$, где неравенства $F(x^0) \geq 0$ и $Ix^0 \geq 0$ (здесь I — единичная матрица) разделены на два множества условий:

$$F_1(x^0) = 0, \quad I_1 x^0 = 0 \quad \text{и} \quad F_2(x^0) > 0, \quad I_2 x^0 > 0.$$

Теперь можно сформулировать задачу о седловой точке, эквивалентную проблеме нахождения эффективной точки.

► Теорема 7.4.1. Пусть G является вогнутой вектор-функцией, определенной для $x \in X$, а функция F та же самая, что и в теореме 7.1.1. Для того чтобы точка x^0 была эффективной, необходимо, чтобы существовали такие два неотрицательных вектора $v^0 (v^0 \neq 0)$ и u^0 , каждый из которых имеет столько же компонент, сколько соответственно функции G и F , чтобы пара $\{x^0, u^0\}$ была седловой точкой функции

$$\chi(x, u, v^0) = (v^0, G(x)) + (u, F(x)),$$

т. е.

$$\chi(x, u^0, v^0) \leq \chi(x^0, u^0, v^0) \leq \chi(x^0, u, v^0) \quad (7.4.1)$$

для всех неотрицательных u и $x \in X$. Если все компоненты вектора v^0 строго положительны, то это условие является и достаточным.

Доказательство. Необходимость. По лемме 7.4.1 существует такой неотрицательный вектор v^0 , что максимум функции $g(x) = (v^0, G(x))$ на множестве S достигается в точке x^0 . Применив теперь теорему 7.1.1, мы получим утверждение теоремы 7.4.1.

Достаточность. Обратив это рассуждение и воспользовавшись опять той же теоремой 7.1.1, мы получаем, что максимум $(v^0, G(x))$ на множестве S достигается в точке x^0 . Поскольку вектор v^0 является строго положительным, точка x^0 эффективна.

Экономическая интерпретация задачи о седловой точке, определяемой неравенствами (7.4.1), аналогична той, которая была приведена для неравенств (7.1.2). Поскольку выход интересующей нас

продукции характеризуется теперь уже не одним числом, а вектором, понятие максимума заменяется понятием эффективной точки.

7.5*. Сопряженные¹⁾ функции. Дальнейшее распространение результатов линейного программирования на нелинейные задачи максимизации и минимизации с вогнутыми и выпуклыми функциями может быть осуществлено с помощью теории сопряженных функций, основы которой были заложены Фенхелем.

Помимо большого значения этой теории для нелинейного программирования, она изящна и интересна сама по себе и применяется в теории неравенств и теории выпуклых множеств. Обе эти теории охватывают многие основные методы теории конечных игр и программирования. В следующих пунктах мы рассмотрим основные свойства сопряженных функций. Их применение к задачам нелинейного программирования и теории выпуклых множеств описано соответственно в п. 7.8 и 7.9.

Пусть f — выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве C в пространстве E^n . Напомним, что f непрерывна в относительно внутренних точках множества C , а если точка x^* принадлежит границе множества C и значение $f(x^*)$ определено, то

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x) \leq f(x^*)$$

(см. приложение Б. 4).

В дальнейших рассуждениях всякий раз, когда предел

$$\lim_{x \rightarrow x^*} f(x)$$

конечен, множество C будет переопределено так, чтобы в него оказались включенными все точки x^* . Аналогично определение функции f в таких точках дополняется соотношением

$$f(x^*) = \lim_{x \rightarrow x^*} f(x).$$

Эту модифицированную функцию и расширенное множество мы будем обозначать соответственно через f^0 и C^0 .

► **Определение 7.5.1.** Выпуклую функцию, определенную на выпуклом множестве S , будем называть *замкнутой*, если для любой точки x^0 , в которой предел

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$$

конечен, значение $f(x^0)$ определено и равно

$$\lim_{x \rightarrow x^0} f(x).$$

¹⁾ В применении к функциям термин „сопряженный“ представляется более предпочтительным, чем термин „двойственный“ или „полярный“. — *Прим. ред.*

Процесс нахождения f^0 и C^0 по f и C будем называть „замыканием функции“, а пару $[f^0, C^0]$ будем называть „замыканием“ $[f, C]$. Замыкание пары $[f^0, C^0]$ есть сама пара $[f^0, C^0]$.

► Лемма 7.5.1. Если выпуклая функция определена на выпуклом множестве C в пространстве E^n , то ее замыкание f^0 является выпуклой функцией с областью определения C^0 .

Доказательство. Пусть $x^* = tx_1 + (1-t)x_2$, где $0 \leq t \leq 1$ и $x_1, x_2 \in C^0$. Мы можем выделить такие последовательности внутренних точек $x_1^n \rightarrow x_1$ и $x_2^n \rightarrow x_2$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^0(x_1^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_1^n) = f^0(x_1)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_2^n) = f^0(x_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} f^0(x^*) &= \lim_{x \rightarrow x^*} f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f[tx_1^n + (1-t)x_2^n] \leq \\ &\leq tf^0(x_1) + (1-t)f^0(x_2). \end{aligned}$$

Впредь мы будем предполагать, что исходная выпуклая функция f , определенная на множестве C , является замкнутой.

Построим множество

$$[f, C] = \{[z, x] \in E^{n+1} \mid x \in C \text{ и } z \geq f(x)\}. \quad (7.5.1)$$

Нижняя граница этого множества является графиком функции f . Поскольку эта функция предполагается замкнутой и выпуклой, мы сразу же получим, что $[f, C]$ есть замкнутое выпуклое множество в пространстве E^{n+1} .

Выпуклое множество S точек пространства E^n можно охарактеризовать заданием множества всех его опорных гиперплоскостей (см. приложение Б.1). Поэтому естественно при изучении множества S рассматривать множество всех его опорных гиперплоскостей (каждая из которых определяется некоторым нормальным к ней ортом и вещественным числом) как двойственное (сопряженное) множество S^* в пространстве E^n . Начав с множества S^* и построив сопряженное ему множество, мы придем снова к множеству S . Применим этот принцип двойственности к множеству $[f, C]$. Сопряженное множество $[f, C]^*$ определим как множество всех невертикальных гиперплоскостей пространства E^{n+1} , обладающих тем свойством, что множество $[f, C]$ лежит выше ее. Говоря более точно, плоскость в E^{n+1} определяется вектором ξ из пространства E^n и таким вещественным числом c , что $-c$ является пересечением плоскости

с вертикальной осью пространства E^{n+1} . Точка $\{c, \xi\}$ пространства E^{n+1} принадлежит множеству $[f, C]^*$ тогда и только тогда, когда

$$z \geq (x, \xi) - c \text{ для любой точки } \{z, x\} \text{ из } [f, C]. \quad (7.5.2)$$

Чтобы проверить, что точка $\{c, \xi\}$ принадлежит множеству $[f, C]^*$, достаточно проверить выполнение неравенств

$$c \geq (x, \xi) - f(x) \text{ для всех } x \text{ из } C. \quad (7.5.3)$$

Очевидно, что если $\{c_1, \xi\}$ принадлежит множеству $[f, C]^*$ и $c_2 > c_1$, то и $\{c_2, \xi\}$ принадлежит множеству $[f, C]^*$. Следовательно, для данного вектора ξ наименьшим допустимым c является

$$\sup_{x \in C} [(x, \xi) - f(x)]. \quad (7.5.4)$$

Пусть

$$\Gamma = \{\xi \text{ из } E^n \mid \sup_{x \in C} [(x, \xi) - f(x)] < \infty\}.$$

Положим для ξ из Γ

$$\varphi(\xi) = \sup_{x \in C} [(x, \xi) - f(x)].$$

Функцию φ будем называть *сопряженной* к функции f . Ее значениями являются наибольшие точки пересечения нормали $\{-1, \xi\}$ с плоскостями, лежащими под графиком функции f .

► **Лемма 7.5.2.** *Множество Γ является выпуклым и непустым, а функция φ — выпуклой замкнутой функцией, определенной на множестве Γ .*

Доказательство. Если C имеет внутренние точки в E^n , то построим опорную гиперплоскость к множеству $[f, C]$ в точке x^0 , являющейся внутренней точкой множества C . Эта гиперплоскость, очевидно, не будет вертикальной. Если множество C не имеет внутренних точек в E^n ¹⁾, то обозначим через x^0 относительно внутреннюю точку множества C , а через $\tilde{C}$ линейное расширение множества C в пространстве E^n . Рассмотрим функцию f , определенную в аффинном²⁾ пространстве $\tilde{C} \supset C$. Гиперплоскость, опорная к множеству $[f, C]$ в точке x^0 , определенная только в пространстве меньшей размерности, является неvertической гиперплоскостью, которую можно погрузить бесконечно многими путями в пространство E^n

¹⁾ В данном случае это означает, что множество C лежит в пространстве меньшей чем n размерности. — *Прим. перев.*

²⁾ Аффинное пространство представляет собой сдвинутое линейное пространство.

с сохранением ее невертикальности. Следовательно, в любом случае множество $[\varphi, \Gamma]$ не пусто. Доказательство того, что функция φ выпукла, не представляет затруднений.

Мы наметим доказательство того, что функция φ является также и замкнутой. Пусть $\xi^n \rightarrow \xi^*$; тогда

$$\varphi(\xi^n) \geq (x, \xi^n) - f(x)$$

и, следовательно, для всех $x \in C$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi^n) \geq \lim_n (x, \xi^n) - f(x) = (x, \xi^*) - f(x).$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\xi^n) \geq \sup_{x \in C} [(x, \xi^*) - f(x)] = \varphi(\xi^*).$$

Поскольку, однако, противоположное неравенство для выпуклых функций выполняется всегда, мы должны здесь иметь равенство.

Замечание 7.5.1. Рассуждения, предшествовавшие последней лемме, показывают, что

$$[f, C]^* = [\varphi, \Gamma]. \quad (7.5.5)$$

Полученное заключение леммы 7.5.2 и равенство (7.5.5) позволяют заключить, что множество, сопряженное к $[f, C]$, является снова множеством того же типа. Граничные точки множества $[\varphi, \Gamma]$ соответствуют точкам графика функции $\varphi(\xi)$ и могут рассматриваться как опорные плоскости к графику функции $f(x)$. Если $\{f(x), x\}$ является точкой соприкосновения множества $[f, C]$ и плоскости $\{\varphi(\xi), \xi\}$, определяемой нормалью с компонентами $\{-1, \xi\}$ и ограничивающей $\varphi(\xi)$ в вертикальном направлении, то $f(x) + \varphi(\xi) = (x, \xi)$. Следующая лемма выражает принцип двойственности, часто проявляющийся при изучении выпуклых множеств.

► **Лемма 7.5.3.** $[[f, C]^*]^* = [f, C]$.

Доказательство. Покажем сначала, что $[f, C] \subset [\varphi, \Gamma]^* = [[f, C]^*]^*$. Пусть точка x принадлежит множеству C ; тогда $\varphi(\xi) \geq (x, \xi) - f(x)$ для любого ξ из множества Γ . Но для всех ξ из Γ мы имеем неравенство

$$z \geq (x, \xi) - \varphi(\xi),$$

каково бы ни было $z \geq f(x)$. Следовательно, точка $\{z, x\}$ принадлежит множеству $[\varphi, \Gamma]^*$.

Для того чтобы установить обратное включение, предположим, что $\{z^0, x^0\}$ является точкой пространства E^{n+1} , но не принадлежит множеству $[f, C]$. Поскольку $[f, C]$ — выпуклое замкнутое множество, существует неперпендикулярная гиперплоскость, отделяющая точку $\{z^0, x^0\}$ от множества $[f, C]$. Обозначим эту гиперплоскость через $\{c, \xi\}$; тогда $f(x) \geq (x, \xi) - c$ для всех $x \in C$ и $z^0 < (x^0, \xi) - c$. Из первого неравенства следует, что $\{c, \xi\}$ принадлежит множеству $[\varphi, \Gamma]$, а из второго, что $\{z^0, x^0\}$ не принадлежит $[\varphi, \Gamma]^*$. Следовательно, $[f, C] \supset [\varphi, \Gamma]^*$, что вместе с первым результатом и доказывает лемму.

Поскольку функция $f(x)$ является сопряженной к функции $\varphi(\xi)$, должно быть

$$f(x) = \sup_{\xi \in \Gamma} [(x, \xi) - \varphi(\xi)]. \quad (7.5.6)$$

Граничные точки. Если точка ξ^0 принадлежит множеству Γ , то $\{\varphi(\xi^0), \xi^0\}$ является граничной точкой множества $[\varphi, \Gamma]$ и определяет опорную гиперплоскость к $[f, C]$. Обозначим множество точек соприкосновения через $C(\xi^0)$. Любая точка $\{f(x^0), x^0\}$ из этого множества определяет опорную гиперплоскость к множеству $[\varphi, \Gamma]$ в точке $\{\varphi(\xi^0), \xi^0\}$. Следовательно, если $\{f(x^0), x^0\}$ принадлежит множеству $C(\xi^0)$, то $\{\varphi(\xi^0), \xi^0\}$ является точкой пересечения множества $[\varphi, \Gamma]$ и гиперплоскости $\{f(x^0), x^0\}$. Если множества общих точек, соответствующие x^0 и ξ^0 , состоят только из внутренних точек и если существуют частные производные функций $f(x)$ и $\varphi(\xi)$ соответственно в точках x^0 и ξ^0 , то ввиду того, что $\varphi(\xi^0) + f(x^0) = (x^0, \xi^0)$, мы имеем

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{x^0} = \xi_i^0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i}\right)_{\xi^0} = x_i^0. \quad (7.5.7)$$

7.6*. Композиция сопряженных функций. Для построения из имеющихся выпуклых множеств нового выпуклого множества обычно применяются три операции:

(1) образование прямой суммы выпуклых множеств, (2) построение выпуклой оболочки множеств и (3) взятие пересечения выпуклых множеств (см. приложение Б). В данном пункте мы изучим применение этих операций к введенным выше сопряженным множествам.

Пусть $[f_1, C_1]$ и $[f_2, C_2]$ — два выпуклых замкнутых множества описанного в (7.5.1) типа. Обозначим сопряженные им множества соответственно через $[\varphi_1, \Gamma_1]$ и $[\varphi_2, \Gamma_2]$. Векторная сумма $S = [\varphi_1, \Gamma_1] + [\varphi_2, \Gamma_2]$ состоит из всех точек вида $\{a_1 + a_2, \xi^1 + \xi^2\}$, где $\{a_1, \xi^1\}$ пробегает $[\varphi_1, \Gamma_1]$, а $\{a_2, \xi^2\}$ пробегает $[\varphi_2, \Gamma_2]$. Замыкание множества S будем обозначать через $\bar{S}$.

► Теорема 7.6.1. Если $C = C_1 \cap C_2$ непусто и $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ для x из C , то $[f, C]^* = \bar{S} = [\varphi, \Gamma]$, где $\Gamma_1 + \Gamma_2 \subset \Gamma \subset \Gamma_1 + \Gamma_2$

$$\varphi(\xi) = \inf_{\substack{\xi^1 \in \Gamma_1, \xi^2 \in \Gamma_2 \\ \xi^1 + \xi^2 = \xi}} \{\varphi_1(\xi^1) + \varphi_2(\xi^2)\} \quad (7.6.1)$$

для ξ из $\Gamma_1 + \Gamma_2$.

Доказательство. Чтобы сделать доказательство более прозрачным, разделим его на три части.

$$(I) \quad [f, C]^* \supset \bar{S}.$$

Сопряженное к $[f, C]$ множество состоит из всех неперпендикулярных гиперплоскостей $\{a, \xi\}$, для которых $a \geq (x, \xi) - f(x)$ при всех x из C . Если $\{a_i, \xi^i\}$ принадлежит $[\varphi_i, \Gamma_i]$, то $a_i \geq (\xi^i, x) - f_i(x)$ ($i = 1, 2$). Складывая, получаем, что

$$a_1 + a_2 \geq (\xi^1 + \xi^2, x) - f(x)$$

для x из C , так что $\{a_1 + a_2, \xi^1 + \xi^2\}$ принадлежит множеству $[f, C]^*$. Следовательно, $[f, C]^* \supset \bar{S}$, а ввиду того, что $[f, C]^*$ замкнуто, $[f, C]^* \supset \bar{S}$.

$$(II) \quad \varphi(\xi) \text{ — выпуклая функция и } \bar{S} = [\varphi, \Gamma].$$

Определим $\varphi(\xi)$ для ξ из $\Gamma_1 + \Gamma_2$ по равенству (7.6.1). Ввиду (I), функция $\varphi(\xi)$ конечна для каждого ξ из $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Используя определение $\varphi(\xi)$, легко проверить, что эта функция выпукла. Кроме того, из построения множества $\bar{S}$ мы усматриваем, что $\bar{S} = [\varphi, \Gamma]$, как и утверждалось.

$$(III) \quad \bar{S} \supset [f, C]^*.$$

Достаточно проверить, что $\bar{S}^* = [\varphi, \Gamma]^* \subset [f, C]$. По определению, множество $\bar{S}^*$ состоит из всех неперпендикулярных опорных гиперплоскостей к множеству $\bar{S}$; следовательно, его элементы можно представить в виде $\{z, x\}$. Точка $\{z, x\}$ тогда и только тогда принадлежит множеству $\bar{S}^*$, когда для всех точек $\{a_1, \xi^1\}$ и $\{a_2, \xi^2\}$ из $[\varphi_1, \Gamma_1]$ и $[\varphi_2, \Gamma_2]$ соответственно выполняется неравенство

$$z \geq (x, \xi^1 + \xi^2) - a_1 - a_2.$$

Поскольку $a_1 \geq \varphi_1(\xi^1)$ и $a_2 \geq \varphi_2(\xi^2)$, это неравенство эквивалентно

$$z \geq (x, \xi^1 + \xi^2) - \varphi_1(\xi^1) - \varphi_2(\xi^2).$$

Поэтому

$$z \geq \sup_{\xi^1 \in \Gamma_1} [(x, \xi^1) - \varphi_1(\xi^1)] + \sup_{\xi^2 \in \Gamma_2} [(x, \xi^2) - \varphi_2(\xi^2)] = f_1(x) + f_2(x).$$

Следовательно, точка $\{z, x\}$ принадлежит $[f, C]$. Это применимо к каждой точке множества $\bar{S}^*$, и тем самым доказательство последнего утверждения завершено.

Обозначим через $[f_\alpha, C_\alpha]$ семейство замкнутых выпуклых множеств из E^{n+1} , определяемых равенством (7.5.1). Пусть $C \subset \bigcap_{\alpha} C_{\alpha}$ есть множество всех тех x , для которых $\sup_{\alpha} f_{\alpha}(x)$ конечен. На множестве C определим $f(x) = \sup_{\alpha} f_{\alpha}(x)$; множество C выпукло, а $f(x)$ является выпуклой замкнутой функцией, определенной на C . Мы хотим охарактеризовать множество $[\varphi, \Gamma] = [f, C]^*$ в терминах точечного множества $[f, C] = \bigcap_{\alpha} [f_{\alpha}, C_{\alpha}]$. Пусть $[\varphi_{\alpha}, \Gamma_{\alpha}] = [f_{\alpha}, C_{\alpha}]^*$, а H — выпуклая оболочка множества $\{\Gamma_{\alpha}\}$.

► Теорема 7.6.2. Если множество C непусто и $f(x) = \sup_{\alpha} f_{\alpha}(x)$ для $x \in C$, то $[f, C]^*$ является замыканием выпуклой оболочки G множества $[\varphi_{\alpha}, \Gamma_{\alpha}]$. Кроме того, $\bar{G} = [\varphi, \Gamma]$, $H \subset G \subset \bar{H}$ и

$$\varphi(\xi) = \inf_{\sum \lambda_i \xi^{\alpha_i} = \xi} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_{\alpha_i}(\xi^{\alpha_i}) \quad (7.6.2)$$

(точная нижняя граница берется по всем представлениям точки в виде положительной линейной комбинации $n+1$ точек, взятых из любых $n+1$ множеств Γ_{α}).

Доказательство. Из того что $[f, C] \subset [f_{\alpha}, C_{\alpha}]$, следует, что $[f, C]^* \supset [f_{\alpha}, C_{\alpha}]^* = [\varphi_{\alpha}, \Gamma_{\alpha}]$. Из замкнутости и выпуклости множества $[f, C]^*$ вытекает, что оно должно содержать все конечные выпуклые комбинации из множества $[\varphi_{\alpha}, \Gamma_{\alpha}]$ и пределы их последовательностей. Поэтому $[f, C]^* \supset \bar{G}$.

Ввиду того что множество $G \subset E^{n+1}$ является выпуклой оболочкой множества $[\varphi_{\alpha}, \Gamma_{\alpha}]$, мы можем определить функцию $\varphi(\xi)$ как наименьшую ординату (т. е. первую компоненту) точки $\{\varphi(\xi), \xi\}$ в $\bar{G}$. Поскольку множество $G \subset E^{n+1}$ является выпуклой оболочкой множества $[\varphi_{\alpha}, \Gamma_{\alpha}]$, каждая точка множества $\bar{G}$ может быть аппроксимирована точками вида

$$\xi = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \xi^{\alpha_i} \quad \text{и} \quad c = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i c_{\alpha_i},$$

где $\{c_{\alpha_i}, \xi^{\alpha_i}\} \in [\varphi_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_i}]$ (см. лемму Б.2.1). Но $\varphi(\xi)$ является наименьшим допустимым значением c для вектора ξ . Следовательно,

$$\varphi(\xi) = \inf_{\sum \lambda_i \xi^{\alpha_i} = \xi} \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \varphi_{\alpha_i}(\xi^{\alpha_i}).$$

Точка $\{\varphi(\xi), \xi\}$ лежит на границе множества $\bar{G}$ и поэтому принадлежит некоторому симплексу размерности не выше n . Поскольку эффективные точки множества $\bar{G}$ должны получаться из эффективных точек множеств $[\varphi_{\alpha_i}, \Gamma_{\alpha_i}]$, вершинам этого симплекса можно поставить в соответствие точки $\{\varphi_{\alpha_i}(\xi^{\alpha_i}), \xi^{\alpha_i}\}$. Следовательно, в представлении $\varphi(\xi)$ достаточно рассматривать выпуклые комбинации не более чем $n+1$ точек. Из определения функции $\varphi(\xi)$ легко получить, что она является замкнутой функцией, определенной на Γ , и что $\bar{G} = [\varphi, \Gamma]$.

Остается доказать, что $[f, C]^* = \bar{G}$. Из уже доказанного следует, что нам достаточно установить включение

$$[f, C]^* \subset \bar{G} = [\varphi, \Gamma],$$

которое эквивалентно $[f, C] \supset [\varphi, \Gamma]^*$. Возьмем точку $\{z^0, x^0\}$ из $[\varphi, \Gamma]^*$. Тогда для любых α и $\xi^{\alpha} \in \Gamma_{\alpha}$ мы имеем

$$z^0 \geq (\xi^{\alpha}, x^0) - \varphi_{\alpha}(\xi^{\alpha}).$$

Следовательно, для любого α точка $\{z^0, x^0\}$ принадлежит множеству $[\varphi_{\alpha}, \Gamma_{\alpha}]^*$, и поэтому

$$\{z^0, x^0\} \in \bigcap_{\alpha} [f_{\alpha}, C_{\alpha}] = [f, C].$$

Другим полезным следствием, вытекающим из определения сопряженных функций, является следующая теорема.

► **Теорема 7.6.3.** Пусть $f(x)$ — замкнутая выпуклая функция в C , а $\varphi(\xi)$ — сопряженная ей функция. Тогда сопряженной к функции $f(x) + k$, которая определена на множестве C , где k — некоторая постоянная, будет функция $\varphi(\xi) - k$, определенная на множестве Γ . Сопряженной к функции $f(x - v)$, определенной на множестве $C + v$, где v — некоторый постоянный вектор, является функция $\varphi(\xi) + (v, \xi)$, определенная на множестве Γ .

Наша следующая теорема окажется полезной как в теории выпуклых игр, так и при изучении выпуклых множеств (см. п. 12.3).

► Теорема 7.6.4. Обозначим через $f_\alpha(x)$ семейство выпуклых функций, определенных на ограниченном множестве $C \subset E^n$ и таких, что $\sup_x f_\alpha(x)$ конечен для всех x . Тогда для любых $a \leq \inf_x \sup_\alpha f_\alpha(x)$ и $\epsilon > 0$ существуют такие функции f_{α_i} и вещественные $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n+1$), что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) \geq a - \epsilon \text{ для всех } x \in C$$

и $\sum \lambda_i = 1$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$ и $z_0 = \inf_x f(x)$.

Горизонтальная плоскость, проведенная на высоте z_0 , является опорной плоскостью для выпуклого множества $[f, C]$ и граничной точкой для множества $[f, C]^*$. Для этой плоскости $\xi = 0$ (нулевой вектор) и $\varphi(0) = -z_0$. Из теоремы 7.6.2 следует, что

$$-z_0 = \varphi(0) = \inf_{\sum \lambda_i \xi^{\alpha_i} = 0} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_{\alpha_i}(\xi^{\alpha_i}),$$

где $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$. Следовательно, по заданному $\epsilon > 0$ мы можем найти такие λ_i и ξ^{α_i} , что

$$-z_0 \geq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_{\alpha_i}(\xi^{\alpha_i}) - \epsilon \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \xi^{\alpha_i} = 0.$$

Но для любого $x \in C$ мы имеем $\varphi_{\alpha_i}(\xi^{\alpha_i}) \geq (x, \xi^{\alpha_i}) - f_{\alpha_i}(x)$. Отсюда следует, что

$$z_0 \leq - \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i (x, \xi^{\alpha_i}) + \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) + \epsilon = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\alpha_i}(x) + \epsilon,$$

и поскольку $a - \epsilon \leq z_0 - \epsilon$, теорема установлена.

Опорные функции. Для любого выпуклого множества $C \subset E^n$ мы можем определить $f(x) \equiv 0$ при всех $x \in C$. Сопряженное множество к $[f, C]$ имеет вид $[\varphi, \Gamma]$, где

$$\varphi(\xi) = \sup_{x \in C} (x, \xi)$$

и область Γ является множеством векторов, для которых

$$\sup_{x \in C} (x, \xi)$$

— конечная величина. Будем называть $\varphi(\xi)$ *опорной функцией* множества C .

► Лемма 7.6.1. *Опорная функция $\varphi(\xi)$ выпуклого множества C является положительно-однородной функцией, а множество $[\varphi, \Gamma]$ — конусом с вершиной в начале координат. Обратно, если функция $\varphi(\xi)$, определенная на замкнутом выпуклом конусе в E^n с вершиной в начале координат, является положительно-однородной, то она является опорной для некоторого множества $C \subseteq E^n$.*

Доказательство. Если $k > 0$, то

$$\varphi(k\xi) = \sup_{x \in C} (x, k\xi) = k \sup_{x \in C} (x, \xi) = k\varphi(\xi).$$

Следовательно, Γ и $[\varphi, \Gamma]$ — конусы с вершиной в начале координат.

Обратно, пусть $\varphi(\xi)$ — положительно однородная функция, определенная на замкнутом выпуклом конусе Γ с вершиной в начале координат. Тогда $[\varphi, \Gamma]$ — конус того же типа, а эффективные точки множества $[\varphi, \Gamma]^*$ должны быть плоскостями, проходящими через начало координат. Следовательно, $[\varphi, \Gamma]^* = [f, C]$, где $f \equiv 0$ на C , а C — конус.

Наконец,

$$[\varphi, \Gamma] = [\varphi, \Gamma]^{**} = [f, C]^*,$$

т. е. φ оказывается опорной функцией множества C .

Представление опорной функции пересечения выпуклых множеств через опорные функции каждого множества можно получить из (7.6.2). Обозначим через C семейство выпуклых множеств в E^n , а через φ — их опорные функции. Если $C = \bigcap_{\alpha} C_{\alpha}$ и φ — опорная функция множества C , то по теореме 7.6.2 и в силу положительной однородности имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \inf_{\sum \lambda_i \xi^{\alpha_i} = \xi} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_{\alpha_i}(\xi^{\alpha_i}) = \inf_{\sum \lambda_i \xi^{\alpha_i} = \xi} \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_{\alpha_i}(\lambda_i \xi^{\alpha_i}) = \\ &= \inf_{\sum \eta^{\alpha_i} = \xi} \sum_{i=1}^{n+1} \varphi_{\alpha_i}(\eta^{\alpha_i}). \end{aligned}$$

7.7*. Сопряженные вогнутые функции. Подобно тому, как была построена теория сопряженных выпуклых функций, можно построить аналогичную теорию для вогнутых функций $g(x)$, определенных на выпуклом множестве D .

Определим выпуклое множество

$$[g, D] = (\{z, x\} \mid x \in D \text{ и } z \leq g(x)).$$

При надлежащем переопределении $g(x)$ и D мы можем сделать множество $[g, D]$ замкнутым (см. п. 7.5). Мы можем определить затем сопряженное множество для множества $[g, D]$, как множество невертикальных плоскостей, оставляющих множество $[g, D]$ с одной стороны. Невертикальная плоскость определяется вектором ξ и числом b , где $-b$ — отрезок, отсекаемый этой плоскостью на оси z . Граничная плоскость в том и только том случае принадлежит множеству $[g, D]^*$, когда $(\xi, x) - b \geq g(x)$ или

$$a \leq (\xi, x) - g(x). \quad (7.7.1)$$

Если b_1 — допустимое число для вектора ξ и $b_2 < b_1$, то b_2 также допустимо в силу (7.7.1). Если через $\psi(\xi)$ мы обозначим наибольшее допустимое b , то

$$\psi(\xi) = \inf_{x \in D} [(\xi, x) - g(x)]. \quad (7.7.2)$$

По каждому ψ образуем область Δ , состоящую из векторов, для которых нижняя грань в (7.7.2) конечна. Легко проверить, что множество Δ — выпукло, функция ψ — вогнута, а множество $[\psi, \Delta]$ является сопряженным к $[g, D]$. Кроме того, $[\psi, \Delta]^* = [g, D]$ и

$$g(x) = \inf_{\xi \in \Delta} [(x, \xi) - \psi(\xi)]. \quad (7.7.3)$$

Нетрудно перенести на наш случай все алгебраические и геометрические характеристики взаимосвязи сопряженных выпуклых функций.

В частности, аналогом теоремы 7.6.4 является

► **Теорема 7.7.1.** Пусть $g_\alpha(x)$ — семейство вогнутых функций, определенных на ограниченном выпуклом подмножестве пространства E^n , обладающее тем свойством, что $\inf_\alpha g_\alpha(x)$ конечен для каждого x . Тогда для любых $a \geq \sup_x \inf_\alpha g_\alpha(x)$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие функции g_{α_i} и вещественные $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n+1$), что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i g_{\alpha_i}(x) \leq a + \varepsilon \quad \text{для всех } x \in C$$

и $\sum \lambda_i = 1$.

7.8*. Теоремы двойственности для нелинейного программирования. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве C , а $g(x)$ — вогнутая функция, определенная на выпуклом множестве D . Пусть $[f, C]^* = [\varphi, \Gamma]$ и $[g, D]^* = [\psi, \Delta]$.

Предположение. Будем считать, что множества $C \cap D$ и $\Gamma \cap \Delta$ имеют точки, являющиеся относительно внутренними соответственно для C , D и Γ , Δ .

Рассмотрим следующие экстремальные задачи.

Задача I. Найти точку x^0 множества $C \cap D$, которая максимизирует $g(x) - f(x)$ на $C \cap D$.

Если $g(x) - f(x) \geq 0$ для множества $C \cap D$, то эта задача с геометрической точки зрения сводится к нахождению максимальной вертикальной хорды выпуклого множества $[f, C] \cap [g, D]$ в пространстве E^{n+1} . Если $f(x) \equiv 0$ в C , то эта задача сводится к задаче вогнутого программирования, а именно к задаче максимизации $g(x)$ для x из C .

Задача II. Найти точку ξ^0 из $\Gamma \cap \Delta$, минимизирующую $\varphi(\xi) - \psi(\xi)$ в $\Gamma \cap \Delta$.

Если $\varphi(\xi) - \psi(\xi) \geq 0$ в $\Gamma \cap \Delta$, то сформулированная задача с геометрической точки зрения состоит в нахождении минимального вертикального сегмента, соединяющего множества $[\varphi, \Gamma]$ и $[\psi, \Delta]$ в пространстве E^{n+1} .

Эти две задачи можно рассматривать как обобщение задач I и II линейного программирования на случай нелинейного программирования. Однако эти задачи не эквивалентны задаче о седловой точке, которая обсуждалась в п. 7.1. В некоторых случаях двойственным задачам можно дать экономическую или производственную интерпретацию.

► Теорема 7.8.1.

$$\sup_{x \in C \cap D} [g(x) - f(x)] = \inf_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} [\varphi(\xi) - \psi(\xi)].$$

Доказательство. Пусть $\xi \in \Gamma \cap \Delta$, тогда

$$\varphi(\xi) \geq (x, \xi) - f(x) \quad (x \in C),$$

$$\psi(\xi) \leq (x, \xi) - g(x) \quad (x \in D),$$

$$\varphi(\xi) - \psi(\xi) \geq g(x) - f(x) \quad (x \in C \cap D).$$

Следовательно,

$$\inf_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} [\varphi(\xi) - \psi(\xi)] \geq \sup_{x \in C \cap D} [g(x) - f(x)]. \quad (7.8.1)$$

Соотношение (7.8.1) показывает, что обе эти величины конечны.

Для того чтобы доказать обратное неравенство, положим

$$\mu = \sup_{x \in C \cap D} [g(x) - f(x)]$$

и $f_1(x) = f(x) + \mu$. Сопряженную с $f_1(x)$ функцию обозначим через $\varphi_1(\xi)$. Выбор μ позволит нам установить, что множества $[f_1, C]$ и $[g, D]$ могут произвольно сближаться, но при этом все же не будут иметь обычных внутренних точек. Поэтому существует разделяющая эти множества гиперплоскость h , являющаяся для обоих этих множеств опорной. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если плоскость h не является вертикальной, то она определяется вектором ξ^0 и пересекает ось z в точке $-\eta$. Следовательно, ξ^0 принадлежит множеству $\Gamma \cap \Delta$, $\eta = \psi(\xi^0)$ и

$$\eta = \varphi_1(\xi^0) = \sup_{x \in C} [(x, \xi^0) - f(x) - \mu] = \varphi(\xi^0) - \mu.$$

Поэтому

$$\sup_{x \in C \cap D} [g(x) - f(x)] = \mu = \varphi(\xi^0) - \psi(\xi^0) \geq \inf_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} [\varphi(\xi) - \psi(\xi)],$$

и в (7.8.1) имеет место равенство.

Случай 2. Если h является вертикальной плоскостью, мы спроектируем $[f, C]$, $[g, D]$ и h вертикально на E^n . Два выпуклых множества проектируются на C и D , а проекцией h является гиперплоскость h_1 пространства E^n , которая должна разделять C и D . Последнее утверждение противоречит предположению о том, что C и D имеют общие относительно внутренние точки. Следовательно, случай 2 невозможен.

► **Следствие 7.8.1.** Из доказательства последней теоремы вытекает фактически, что

$$\inf_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} [\varphi(\xi) - \psi(\xi)] = \varphi(\xi^0) - \psi(\xi^0),$$

где $\xi^0 \in \Gamma \cap \Delta$.

Поэтому мы можем заменить здесь инфимум на минимум. Ввиду того, что условия теоремы симметричны относительно f , g и φ , ψ , мы можем также заменить и супремум на максимум. Тогда

$$\min_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} [\varphi(\xi) - \psi(\xi)] = \max_{x \in C \cap D} [g(x) - f(x)]. \quad (7.8.2)$$

► **Следствие 7.8.2.** Если мы выразим функции $g(x)$ и $\varphi(\xi)$ через f и ψ :

$$g(x) = \inf_{\xi \in \Delta} [(x, \xi) - \psi(\xi)], \quad \varphi(\xi) = \sup_{x \in C} [(x, \xi) - f(x)], \quad (7.8.3)$$

то теорема 7.8.1 сводится к утверждению:

$$\max_{x \in C \cap D} \inf_{\xi \in \Delta} [(x, \xi) - f(x) - \psi(\xi)] = \min_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} \sup_{x \in C} [(x, \xi) - f(x) - \psi(\xi)].$$

Если данные множества и функции обладают еще и тем свойством, что $\Gamma = \Delta$, $C = D$, а инфимум и супремум в соотношении (7.8.3) можно заменить соответственно на минимум и максимум, то

$$\max_{x \in C} \min_{\xi \in \Delta} [(x, \xi) - f(x) - \psi(\xi)] = \min_{\xi \in \Delta} \max_{x \in C} [(x, \xi) - f(x) - \psi(\xi)]. \quad (7.8.4)$$

Это уравнение указывает на существование седловой точки у функции $F(x, \xi) = (x, \xi) - f(x) - \psi(\xi)$. Это значит, что существуют ξ^0 и x^0 , для которых

$$F(x^0, \xi) \geq F(x^0, \xi^0) \geq F(x, \xi^0) \quad \text{для всех } x \in C \text{ и } \xi \in \Delta. \quad (7.8.5)$$

Обратно, всякий раз, когда выполняется (7.8.5), будет справедлива теорема 7.8.1.

Если в (7.8.2) подставить выражения для ψ и f , то подобно тому, как было получено (7.8.4), мы будем иметь

$$\max_{x \in C} \min_{\xi \in \Delta} [\varphi(\xi) + g(x) - (x, \xi)] = \min_{\xi \in \Delta} \max_{x \in C} [\varphi(\xi) + g(x) - (x, \xi)]. \quad (7.8.6)$$

Это равенство указывает на существование седловой точки у функции

$$\varphi(\xi, x) = \varphi(\xi) + g(x) - (x, \xi).$$

Можно получить и несколько более сильную формулировку теоремы 7.8.1, не делая специальных предположений о существовании (относительно) внутренних точек множества $C \cap D$. Все, что требуется, состоит лишь в том, чтобы оба эти множества были непустыми. Доказательство основано на композиции сопряженных функций. Обозначим через $\psi(\xi)$ сопряженную функцию к функции $f(x) + [-g(x)]$, заданной в $C \cap D$. Из теоремы 7.6.1 вытекает, что функция $\psi(\xi)$ определена на множестве, содержащем $\Gamma + (-\Delta)$. Поскольку Γ и Δ имеют общие точки, множество $\Gamma - \Delta$ содержит начало координат. Следовательно, функция $\psi(\xi)$ при $\xi = 0$ определена, и в силу теоремы 7.6.1 мы имеем

$$\psi(0) = \inf_{\substack{\xi^1 \in \Gamma, \xi^2 \in -\Delta \\ \xi^1 + \xi^2 = 0}} [\varphi(\xi^1) - \psi(-\xi^2)] = \inf_{\xi \in \Gamma \cap \Delta} [\varphi(\xi) - \psi(\xi)].$$

С другой стороны, само определение функции, сопряженной к $f(x) - g(x)$, при $\xi = 0$ дает нам

$$\psi(0) = \sup_{x \in C \cap D} [g(x) - f(x)].$$

Эти последние равенства страдают тем недостатком, что не указывают, когда инфимум и супремум могут быть заменены на минимум и максимум (см. следствие 7.8.1).

7.9*. Приложения теории сопряженных функций к выпуклым множествам. Теорема 7.6.4 указывает путь к ряду результатов, касающихся выпуклых множеств, приближения функций, отыскания полиномов по их значениям и т. д.

Эти структурные свойства выпуклых множеств постоянно используются при изучении неравенств, встречающихся при различной постановке задач программирования. Приводимая ниже классическая теорема, в которой сформулировано более сильное свойство конечных пересечений, характеризующее компактность, является основополагающей.

► Теорема 7.9.1 (теорема Хелли). *Если $\{C_\alpha\}$ — такое семейство ограниченных, замкнутых, выпуклых множеств в пространстве E^n , что пересечение любых $n + 1$ множеств непусто, то непусто и $\bigcap_\alpha C_\alpha$.*

Доказательство. Обозначим через $\varphi_\alpha(y)$ расстояние между точкой y и множеством $C_\alpha \subset E^n$. Легко проверить, что все функции φ_α непрерывны и выпуклы. Обозначим через S замкнутую ограниченную сферу, содержащую одно из множеств C_α , скажем, C_{α_0} . Если $\bigcap_\alpha C_\alpha$ пусто, то

$$\inf_{y \in S} \sup_\alpha \varphi_\alpha(y) > 0.$$

Поскольку все функции φ_α непрерывны, мы можем найти такое конечное подмножество $\{C_{\alpha_i}\}$, что

$$\inf_{y \in S} \sup_i \varphi_{\alpha_i}(y) > 0.$$

Так как сфера S компактна, мы можем написать

$$\inf_{y \in S} \sup_i \varphi_{\alpha_i}(y) \geq \delta > 0.$$

Из теоремы 7.6.4 следует, что существует некоторая выпуклая комбинация, слагаемые которой ради удобства обозначений занумеруем от 1 до $n + 1$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_{\alpha_i}(y) \geq \delta > 0 \quad (y \in S). \quad (*)$$

Следовательно, $n+1$ множеств C_{α_i} должны пересекаться вне сферы S .

Обозначим через S' замкнутую ограниченную сферу, содержащую сферу S , множество C_{α_0} и множества C_{α_i} ($i = 1, \dots, n+1$), взятые из неравенства (*). Мы имеем

$$\inf_{y \in S'} \sup_i \varphi_{\alpha_i}(y) > 0.$$

Повторив предыдущее рассуждение применительно к семейству, содержащему $n+2$ элемента C_{α_i} ($i = 0, 1, \dots, n+1$), мы получим, что некоторые $n+1$ из них не пересекаются в S' . Но поскольку они все содержатся в S' , они вообще не пересекаются, что противоречит предположенному.

► Следствие 7.9.1. Если каждые $n+1$ множеств из семейства $\{C_{\alpha}\}$ в качестве своего пересечения имеют непустое множество и если либо

(а) $\{C_{\alpha}\}$ — конечное семейство открытых выпуклых множеств (не обязательно ограниченных), либо

(б) $\{C_{\alpha}\}$ — конечное семейство замкнутых выпуклых множеств (не обязательно ограниченных), либо

(в) $\{C_{\alpha}\}$ — бесконечное семейство замкнутых выпуклых множеств (не обязательно ограниченных, но имеющее конечное подсемейство с ограниченным пересечением), то $\bigcap_{\alpha} C_{\alpha}$ непусто.

В каждом из этих случаев, при соответствующей модификации множеств, получаем эквивалентную задачу, к которой может быть применена теорема 7.9.1.

Для произвольного семейства замкнутых выпуклых множеств теорема Хелли неверна. В пространстве E^1 , например, можно положить $C_k = [k, \infty]$ ($k = 1, 2, \dots$). Любое конечное число этих множеств пересекается, но не существует общей точки для всего семейства.

Теорема Хелли может быть использована в задаче аппроксимации полиномами. Пусть заданы $n+1$ пар вещественных чисел

$$(x_i, y_i) \quad (i = 0, \dots, n; x_i < x_{i+1}),$$

мы хотим найти полином P степени не выше $n-1$, который минимизирует величину $\max_i |y_i - P(x_i)|$. Положим

$$\rho = \min_P \max_i |y_i - P(x_i)|.$$

Используя стандартные рассуждения о компактности, легко доказать, что на некотором полиноме P^* значение ρ действительно достигается.

Детали доказательства мы оставляем читателю. Далее будет дано явное выражение для ρ и P^* .

► Лемма 7.9.1. Если P^* — некоторое решение, то

$$|y_i - P^*(x_i)| = \rho \quad \text{для всех } i.$$

Доказательство. (От противного.) Предположим, что существует такое i , скажем $i=0$, что $|y_0 - P^*(x_0)| < \rho$. Мы покажем, что это предположение позволит нам сконструировать полином, дающий лучшую аппроксимацию, а это противоречит выбору числа ρ .

Для каждого $k \neq 0$ мы можем сконструировать такой полином $Q_k(x)$ степени $n-1$, что $Q_k(x_i) = 0$, если $i \neq 0$ и $i \neq k$. Кроме того, мы всегда можем выбрать полином $Q_k(x)$ так, чтобы $Q_k(x_k) > 0$.

Положим $\epsilon_k = \text{sign}[y_k - P^*(x_k)]$. Выберем числа $a_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) настолько малыми, чтобы

$$|y_0 - P^*(x_0) - a_i \epsilon_i Q_i(x_0)| < \rho.$$

Это возможно, так как мы предположили, что $|y_0 - P^*(x_0)| < \rho$. Но из $a_i > 0$ и $|y_i - P^*(x_i)| \leq \rho$ следует, что

$$|y_i - P^*(x_i) - a_i \epsilon_i Q_i(x_i)| < \rho, \quad (7.9.1)$$

в то время как значения на остальных x_j не изменяются, так как значения полиномов Q_i на них равны нулю. Следовательно,

$$|y_i - P^*(x_i) - \sum a_k \epsilon_k Q_k(x_i)| < \rho \quad \text{для всех } i. \quad (7.9.2)$$

Но неравенство (7.9.2) противоречит определению числа ρ .

► Лемма 7.9.2. Если $P^*(x)$ — решение, то разности $y_i - P^*(x_i)$ попеременно меняют знак.

Доказательство. Если для некоторых x_i и x_{i+1} значения $y_i - P^*(x_i)$ имеют один и тот же знак, скажем, положительные, мы можем так сконструировать полином степени $n-1$, что он будет равен нулю при $x = x_k$ ($k \neq i, k \neq i+1$) и будет принимать положительные значения при $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$. Умножением этого полинома на соответствующий множитель мы сможем уменьшить разности в точках x_i и x_{i+1} , не изменяя их в остальных точках. Это противоречит условию леммы 7.9.1.

Теперь уже из лемм 7.9.1 и 7.9.2 вытекает, что если полином

$$P^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^* x^i$$

является решением, то система уравнений

$$(-1)^k \eta + \sum_{i=0}^{n-1} a_i^* x_k^i = y_k \quad (k=0, \dots, n), \quad (7.9.3)$$

где η равно либо $+\rho$, либо $-\rho$, должна иметь решение.

Искомый полином единствен. Если существует два решения с одним и тем же η , то разность $P_1^* - P_2^*$ должна быть полиномом степени не выше $n-1$ и обращаться в нуль в $n+1$ точках $x_0, x_1, \dots, x_n$. Следовательно, $P_1^* = P_2^*$. С другой стороны, если существуют такие два решения, что $\eta_1 = +\rho$ и $\eta_2 = -\rho$, то разность этих решений должна обращаться в нуль в некоторой точке между x_i и x_{i+1} для каждого i . Следовательно, эта разность обращается в нуль не менее чем в n точках, а это означает, что рассматриваемая разность равна нулю.

Мы можем рассматривать равенства (7.9.3) как систему $n+1$ уравнений относительно $n+1$ неизвестных $a_0^*, \dots, a_n^*$. Значение η определяется единственным образом по формуле

$$\eta = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ y_1 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ -1 & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^n & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}}.$$

Коэффициенты единственного полинома $P^*(x)$, являющегося решением, можно найти, решив систему уравнений (7.9.3).

Приступим теперь непосредственно к рассмотрению проблемы в некотором смысле наилучшей аппроксимации заданной функции полиномом степени $n-1$. Точнее говоря, пусть задана ограниченная на интервале $\alpha \leq x \leq \beta$ функция $f(x)$; обозначим через $P(x)$ произвольный полином степени не выше $n-1$. Мы хотим найти полином $P^*(x)$ степени $n-1$, для которого достигается

$$\min_P \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - P(x)|.$$

Пусть $X = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $\alpha \leq x_i \leq \beta$ и $y_i = f(x_i)$. Обозначим тогда через $\rho(X)$ решение аппроксимационной задачи для точек (x_i, y_i) . Если среди чисел x_i найдутся хотя бы два равных, то будут равны и соответствующие y_i и мы сможем найти полином, проходящий через все эти точки; следовательно, в этом случае $\rho = 0$.

► Теорема 7.9.2. Пусть $\rho_0 = \sup_X \rho(X)$. Тогда

$$\min_P \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - P(x)| = \rho_0.$$

Доказательство. Для любых фиксированных $P(x)$ и X мы имеем

$$\min_P \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - P(x)| \geq \min_P \max_i |f(x_i) - P(x_i)| = \rho(X).$$

Следовательно,

$$\min_P \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - P(x)| \geq \sup_X \rho(X) = \rho_0.$$

Для того чтобы доказать обратное неравенство, введем в рассмотрение множества

$$A_x = \left\{ a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \left| \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right| \leq \rho_0 \right. \right\}, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Каждое A_x является множеством замкнутым и выпуклым, но не обязательно ограниченным. В силу определения ρ_0 любые $n+1$ из этих множеств пересекаются. Если мы возьмем $n+1$ различных x_i , то пересечение соответствующих им множеств будет параллелепипедом и, следовательно, ограниченным. Из следствия 7.9.1 вытекает, что все они пересекаются, и тем самым требуемое установлено.

Предположим, что в теореме 7.9.2 мы добавили предположение о непрерывности функции $f(x)$ для $x \in [\alpha, \beta]$. Тогда не составит труда доказать, что $\rho(x_0, x_1, \dots, x_n)$ оказывается непрерывной функцией при $\alpha \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq \beta$. Таким образом, мы получаем следующее следствие.

► Следствие 7.9.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на $\alpha \leq x \leq \beta$, то существуют такие $n+1$ точек $(x_0^*, x_1^*, \dots, x_n^*)$, описанные выше, что

$$\min_{P_{n-1}} \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |f(x) - P_{n-1}(x)| = \min_{P_{n-1}} \max_{x_\nu^*} |f(x_\nu^*) - P_{n-1}(x_\nu^*)|.$$

Если мы возьмем $f(x) = x^n$ и $(\alpha = 0, \beta = 1)$, то решением задачи будет, как известно, $-x^n + T_{n-1}(x)$, где ¹⁾ $T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta$, если $\cos \theta = x$. В этом случае $x_{\nu-1}^*$ оказываются равными тем иксам, для которых $\theta = \pi/\nu$ ($\nu = 1, \dots, n$) и $x_n = 1$.

¹⁾ Полином $T_{n-1}(x)$ называется полиномом Чебышева и впервые был рассмотрен им в 1857 г. — Прим. перев.

Другое применение теоремы Хелли связано с покрытием единичной сферы в пространстве E^n замкнутыми полусферами. Будем называть семейство таких сфер компактным, если орты, нормальные к гиперплоскостям, ограничивающим полусферы, и направленные внутрь полусфер, образуют компактное множество.

► Теорема 7.9.3 (теорема о покрытии). Пусть поверхность сферы в пространстве E^n покрыта компактным семейством замкнутых полусфер; тогда можно найти m ($m \leq n + 1$) таких полусфер из этого семейства, что они будут покрывать поверхность.

Доказательство. Обозначим через I_α ориентированный, как указано выше, орт, нормальный к полусфере H_α . Точка x , принадлежащая поверхности сферы, покрывается H_α тогда и только тогда, когда $(x, I_\alpha) \geq 0$.

Обозначим через $\{I_l\}$ счетное компактное подмножество множества $\{I_\alpha\}$, а через Γ_m — компактное множество, натянутое внутри единичной сферы на $I_1, I_2, \dots, I_m$. Мы хотим показать, что для достаточно большого m множества Γ_m произвольным образом стягиваются к началу θ . В противном случае для некоторого $\epsilon > 0$ расстояние $d(\theta, \Gamma_l)$ было бы не меньше ϵ для всех l . В силу выбора множества $\{I_l\}$ отсюда вытекало бы, что $d(\theta, \Gamma) \geq \epsilon$, где Γ — выпуклое множество, натянутое на $\{I_\alpha\}$. Поскольку Γ — выпуклое множество, мы можем найти некоторую плоскость, проходящую через начало координат и отстоящую от Γ не менее чем на ϵ ; если x_0 — орт, нормальный к этой плоскости, направленный в противоположную от этой плоскости сторону, то $(I_\alpha, x_0) \leq -\epsilon$ для всех α . Отсюда следует, что точка x_0 не покрывается H_α ни при одном α , а это противоречит нашему предположению.

Из этого противоречия вытекает, что для каждого k существует такое $m(k)$, что $d(\theta, \Gamma_{m(k)}) < 1/k$. Обозначим через $x^k \in \Gamma$ точку, расстояние от которой до начала координат меньше, чем $1/k$. В силу леммы Б.2.1 мы имеем выпуклое представление

$$x^k = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^{(k)} I_i^{(k)}.$$

Поскольку $n + 1$ фиксировано, а $\xi_i^{(k)}, I_i^{(k)}$ взяты из компактных множеств, мы можем перейти к пределу и получить представление

$$\theta = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i I_i,$$

где $\xi_i \geq 0$ и $\sum \xi_i = 1$. Полусферы H_i , соответствующие нормальям I_i из только что полученного представления, должны покрывать всю сферу.

Если снять требование компактности, то теорема перестает быть верной. Например, семейство полусфер в E^2 , описываемых углами π , 1 , $1/2$, $\dots$, $1/m$, $\dots$, покрывает весь круг, но никакое конечное подсемейство не будет покрывать его.

Приводимое ниже следствие показывает, что одна из полусфер может быть выбрана произвольно.

► Следствие 7.9.3. Пусть на поверхности сферы, покрытой компактным семейством замкнутых полусфер, задана некоторая полусфера H . Тогда мы можем найти m ($m \leq n$) таких полусфер из семейства, что они будут покрывать H .

Доказательство. Данное семейство вместе с замкнутым дополнением H_0 полусферы H покрывает сферу. Последняя теорема обеспечивает существование такого подсемейства этого расширенного семейства, которое будет содержать не более $n + 1$ элементов, покрывающих сферу. Если это подсемейство не содержит H_0 , мы рассмотрим выпуклое множество S , натянутое внутри единичной сферы на орты l_i из этого подсемейства. Множество S должно содержать начало θ , поскольку подсемейство покрывает сферу. Пусть l_0 — орт, нормальный к H_0 , а y_0 — точка пересечения радиуса $[\theta, -l_0]$ с границей множества S . Тогда точка y_0 является выпуклой комбинацией n (или менее) нормалей l_i , а θ будет выпуклой комбинацией y_0 и l_0 . (Если y_0 и θ совпадают, то нормаль l_0 в разложении не появится.) Отсюда вытекает, что всегда можно найти подсемейство, включающее $n + 1$ элементов, которое будет содержать нормаль l_0 и покрывать сферу. Замкнутое дополнение множества H_0 должно быть покрыто другими n элементами этого семейства.

Большинство из всех утверждений относительно выпуклых множеств основано, по существу, на том, что любая точка, принадлежащая выпуклой оболочке множества H в пространстве E^n , может быть представлена в виде выпуклой комбинации не более чем $n + 1$ точек множества H .

Следующая фундаментальная теорема о представлении может быть применена к внутренним точкам выпуклых множеств.

► Теорема 7.9.4. Обозначим через S выпуклую оболочку конечного множества точек H в E^n . Если точка $z \in S$ такова, что существует открытая сфера, лежащая в S и содержащая точку z , то существует некоторое подмножество H' множества H , содержащее не более $2n$ точек, такое, что точка z является внутренней точкой выпуклой оболочки H' .

Доказательство ведется индукцией по размерности E^n . Предположим, что утверждение справедливо для выпуклых множеств

в евклидовых пространствах размерности не выше n . Случай E^1 тривиален. Выберем m точек $y_i \in H$ так, чтобы

$$z_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i \quad (\lambda_i > 0; \sum \lambda_i = 1)$$

и $2 \leq m \leq n+1$. Поскольку точка z_0 внутренняя, можно утверждать, что $m \geq 2$; верхняя граница получается из классического представления (лемма Б.2.1). Точки y_i можно выбрать так, что размерность линейного многообразия L , определяемого этими точками, равна $m-1$.

Используя z_0 , выберем некоторое $(n-m+1)$ -мерное линейное многообразие M , независимое от L . Спроектируем C ортогонально на M . Тогда проекция множества C является выпуклой оболочкой проекции множества H в M . В пространстве M точка z_0 также является внутренней точкой $\text{Пр}(C)$. В силу индуктивного предположения существует не более $2(n-m+1)$ точек $\text{Пр}(H)$, выпуклая комбинация которых содержит точку z_0 внутри (в смысле пространства M). С каждым таким многообразием M связано не более $2(n-m+1)$ точек $\text{Пр}(H)$, обладающих упомянутыми выше свойствами. Эти точки можно выбрать так, что они окажутся непрерывными функциями от M ; следовательно, в силу соображений связности мы можем получить единственное множество, содержащее не более $2(n-m+1)$ точек z_0 и обеспечивающее нам требуемое представление точки z_0 для любого многообразия M независимо от z_0 . Выпуклой оболочкой этих точек z_0 , которых вместе с y_i не более чем $2(n-m+1) + m = 2n - m + 2 \leq 2n$ (поскольку $m \geq 2$), является множество C' , причем точка z_0 является для него внутренней. В противном случае должна существовать гиперплоскость Y , проходящая через точку z_0 , причем все множество C' лежит по одну сторону от этой гиперплоскости. Пусть 1 — нормаль к Y , направленная в полупространство, не содержащее C' , а M_0 — некоторое линейное многообразие размерности $2(n-m+1)$, причем $M_0 \cap L = z_0$ и M_0 содержит 1 . Тогда проекции точек z_i в M_0 образуют выпуклое множество, для которого z не является внутренней точкой, что противоречит выбору z_i .

Типичное приложение теоремы 7.9.4 содержится в следующем следствии.

► Следствие 7.9.4. Пусть единичная сфера S в пространстве E^n покрыта конечным семейством открытых полусфер. Существует подсемейство, состоящее по крайней мере из $2n$ открытых полусфер, которое также покрывает S .

Дальнейшие приложения читатель сможет найти среди задач, завершающих эту главу.

Мы заканчиваем этот пункт описанием конструктивного метода получения конечных представлений. Пусть S_m означает единичную сферу m -мерного евклидова пространства. Предположим (1), что задано замкнутое множество $X = \{x_\alpha\}$ точек S_m и (2) что начало координат является внутренней точкой выпуклого множества, порожденного точками x_α . Предположение (2) эквивалентно утверждению (2') о существовании также числа $d > 0$, что для любой точки $y \in S_m$ справедливо $(x_\alpha, y) \geq d$ при некотором α . Требуется указать способ выбора за конечное число шагов конечного подмножества $\{x_i\}$, удовлетворяющего условию (2) или (2').

Метод. Предположим, что имеют место условия (1) и (2), сформулированные выше. Будем поступать по следующим рекуррентным правилам:

(0) начинаем с любой точки $x_1 \in X$;

(1_k) выбрав $x_1, x_2, \dots, x_k$, найдем точку $y_k \in S_m$, которая минимизирует $\max[(y, x_1), (y, x_2), \dots, (y, x_k)]$;

(2_k) выберем x_{k+1} как точку множества X , которая максимизирует (y_k, x) .

Целью действия (1_k) является определение точки на сфере, наиболее удаленной от уже выбранных точек. Если только начало не лежит внутри выпуклого множества, определяемого точками $x_1, x_2, \dots, x_k$, то искомая точка будет определяться единственным образом и будет пропорциональна (единственной) ближайшей от начала точке этого множества.

На шаге (2_k) выбирается точка множества X , ближайшая к y_k . Путь, которым это достигается, должен зависеть от способа описания X . Поскольку X — замкнутое множество, этот выбор всегда возможен.

Процесс прекращается, как только минимум в (1_k) становится положительным. Это достигается при некотором конечном значении k .

Доказательство конечности процесса. Допустим, что описанный процесс не имеет конца, и положим

$$m_k = \min_y \max[(y, x_1), (y, x_2), \dots, (y, x_k)],$$

$$n_k = (y_k, x_{k+1}).$$

Ясно, что

$$-1 = m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k \leq \dots \leq 0$$

и $n_k \geq d$ для всех k . Используя компактность S_m и X , выберем подпоследовательность $k_1, k_2, \dots, k_l, \dots$ для которой обе последовательности y_{k_l} и x_{k_l+1} сходятся. Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} m_{k_l} \geq \lim_{l \rightarrow \infty} (y_{k_l}, x_{k_l+1}) = \lim_{l \rightarrow \infty} n_{k_l} \geq d > 0.$$

Следовательно, для некоторого конечного k_0 число m_{k_0} положительно, что противоречит предположению о неограниченности процесса.

7.10. Задачи.

1. Рассмотреть следующую задачу нелинейного программирования. Максимизировать $g(x)$ при $x \in E^m$, удовлетворяющих только векторному ограничению $F(x) \geq 0$ без каких-либо других ограничений, $g(x)$ — вогнутая функция, а вектор $F(x)$ образован вогнутыми функциями. Предполагая выполненными условия теоремы 7.1.1, показать, что в эквивалентной задаче о седловой точке ядро имеет вид

$$\varphi(x, u) = g(x) + (u, F(x)),$$

где $u \geq 0$, а на x ограничения не наложены.

2. Рассмотреть задачу

$$\max g(x) \text{ при условиях } f(x) \geq 0, x \geq 0,$$

где f и g — вогнутые функции. Доказать, что вектор x^0 оптимален тогда и только тогда, когда вектор x^0 является решением следующей задачи:

$$\max_x (g_{x^0}, x) \text{ при условиях } f(x) \geq 0, x \geq 0$$

(g_{x^0} представляет собой вектор с координатами из частных производных, вычисленных в точке x^0).

3. Рассмотреть следующую задачу. Максимизировать (p, x) при условиях $x \geq 0$, $F(x) \leq v$, где F — выпуклая дифференцируемая, однородная первого порядка вектор-функция, а p — фиксированный постоянный вектор. Доказать, что если применима теорема 7.1.1, то $(p, x^0) = (u^0, v)$ для любой седловой точки $\{x^0, u^0\}$.

4. Доказать, что задача линейного программирования

$$\max (c, x) \text{ при условиях } Ax \leq b, x \geq 0,$$

где A — некоторая матрица, сводится к задаче квадратического программирования

$$\max \left[(c, x) - \frac{1}{2} \varepsilon (x, x) \right] \text{ при условиях } Ax \leq b, x \geq 0,$$

где ε — достаточно малое положительное число.

5. Пусть $f(t)$ — монотонно возрастающая выпуклая функция, для которой $f(0) > 0$. Найти множество иксов, которые минимизируют

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^n x_i = T, \quad x_i \geq 0, \quad n \geq 1.$$

(Использовать при каждом n множители Лагранжа.)

6. Решить предыдущую задачу, заменив выпуклость на вогнутость.

7. Пусть $f(x)$ — непрерывная, строго возрастающая выпуклая функция для неотрицательных вещественных x . Пусть $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$; определим m как наибольший из индексов, для которых

$$\frac{a_m}{m} = \max_{1 \leq j \leq m} \frac{a_j}{j}.$$

Показать, что решение задачи

$$\min_x \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad \text{где} \quad \sum_{j=1}^i x_j \geq a_i \quad \text{и} \quad x_i \geq 0,$$

обладает тем свойством, что $x_1 = x_2 = \dots = x_m = a_m/m$.

8. Определить индуктивно полное решение задачи 7.

9. Рассмотрим следующую задачу. Максимизировать $(a, x) - \frac{1}{2}(x, Ax)$ при условии $Bx \leq b$, где A — положительно определенная, а B — произвольная матрицы. Доказать, что решение этой задачи, если оно существует, можно получить, решив задачу

$$\max \left[(c, y) - \frac{1}{2}(y, Dy) \right] \quad \text{при условии} \quad y \geq 0,$$

где $c = DA^{-1}a - b$ и $D = BA^{-1}B'$.

10. Пусть $h(v) = \max_x \{g(x) \mid f(x) \leq v, x \geq 0\}$, где f — выпуклая, а g — вогнутая функции. Доказать, что $h(v)$ является вогнутой функцией и что для любого вектора цен $(u_1^0, \dots, u_m^0)$ справедливы соотношения

$$\left(\frac{\partial h}{\partial v_k} \right)_+ \leq u_k^0 \leq \left(\frac{\partial h}{\partial v_k} \right)_- \quad (k = 1, \dots, m).$$

(Предполагается, что применима теорема 7.1.1.)

11. Пусть $G(x)$ и $F(x)$ обозначают два семейства вектор-функций, все компоненты которых являются вогнутыми функциями, определенными для всех x из E^n .

Рассмотрим задачу. Найти вектор x^0 , доставляющий

$$\max_x \min_i (G(x))_i,$$

где $F(x) \geq 0$, $x \geq 0$. Мы называем эту задачу *задачей максимизации минимальной компоненты*. Доказать, что не может существовать решения, если не существует неотрицательного вектора $v^0 (\sum v_i^0 = 1)$, удовлетворяющего условию $(v^0, G(x^0)) = \min_i [G(x^0)]_i$, и такого, что точка $\{x^0, u^0\}$, где $u^0 > 0$, является седловой точкой функции

$$\varphi(x, u) = (v^0, G(x)) + (u, F(x)).$$

12. В условиях теоремы 7.1.1 содержалось требование: для каждого $u \geq 0$ существует $x \in X$, удовлетворяющий условию $(u, F(x)) > 0$. Доказать, что это эквивалентно существованию $x^0 \in X$, для которого $F(x^0) > 0$.

13. Рассмотреть задачу

$$\max \left[(c, x) - \frac{1}{2} (x, Ax) \right] \quad \text{при условии} \quad x \geq 0,$$

где A является положительно определенной матрицей. Доказать, что итеративное отношение

$$x_i^{(u+1)} = \max \left\{ 0, \frac{1}{a_{ii}} \left(c_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(u+1)} - \sum_{j \geq i} a_{ij} x_j^{(u)} \right) \right\} \\ (i = 1, \dots, n; \quad u = 0, 1, 2, \dots),$$

где $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq 0$ дает последовательность, сходящуюся к решению.

14. Рассмотреть задачу

$$\max g(x) \quad \text{при условиях} \quad F(x) \geq 0, \quad x \geq 0,$$

где F является вектор-функцией. Пусть $K = \{k \mid f_k(x) = 0 \text{ для всех допустимых } x\}$. Предположим: (1) что функции $f_k(x)$ являются линейными для $k \in K$; (2) что функции df_k/dx являются линейно независимыми для $k \in K$; (3) что для любого i существует такой допустимый вектор x^i , что $x_i^i > 0$. Доказать, что исходная задача сводится к задаче нахождения седловой точки для функции $g(x) + (u, F(x))$ при $x \geq 0, u \geq 0$.

В следующих трех задачах используются обозначения п. 7.5 и 7.6.

15. Когда в условиях теоремы 7.6.1 множество $V = [\varphi_1, \Gamma_1] \cup [\varphi_2, \Gamma_2]$ будет замкнутым? Показать, что множество V будет замкнутым всякий раз, когда множества C_1 и C_2 имеют общие относительно внутренние точки.

16. Показать, что $\sup f_\alpha(x)$ существует для некоторого x тогда и только тогда, когда множества $[f_\alpha, C_\alpha]$ имеют общую точку, или множества $[\varphi_\alpha, \Gamma_\alpha]$ имеют общую невертикальную границу.

17. Доказать, что если производные по направлению $\partial f / \partial x$ и $\partial g / \partial x$ равномерно ограничены, то существует невертикальная гипер-

плоскость, разделяющая $[g, D]$ и $[f + \mu, C]$ из теоремы 7.8.1, даже если C и D не имеют общих относительно внутренних точек.

18. Вывести теорему о минимаксе для матриц (теорема 1.4.1) из теоремы 7.8.1.

19. Используя теорию сопряженных функций, доказать, что

$$\xi x \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|\xi|^q}{q},$$

где ξ и x — вещественные числа и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (p > 1).$$

20. Пусть единичная сфера S в E^n покрыта конечным семейством открытых полусфер. Показать, что по крайней мере $2n$ открытых полусфер этого семейства покрывают сферу S (это следствие 7.9.4).

21. Пусть H_α обозначает конечное семейство открытых полупространств с границей, проходящей через начало координат, которое покрывает все пространство E^n . Доказать, что по крайней мере $2n$ элементов семейства H_α покрывают все пространство E^n .

22. Пусть $\{M_\alpha\}$ есть конечное семейство замкнутых полусфер в E^n с началом координат на границе каждого M_α , причем каждые $2n$ элементов M_α имеют общий луч. Доказать, что все элементы семейства M_α проходят через общий луч.

23. Говорят, что конечное семейство R_α лучей в E^n неприводимо, если для любой гиперплоскости, проходящей через начало координат, найдется хотя бы один луч, лежащий по обе стороны от гиперплоскости. Доказать, что из любого конечного неприводимого семейства R_α лучей в E^n можно выбрать неприводимое подсемейство, состоящее не более чем из $2n$ лучей.

24. Пусть S и S' — конечные множества точек в E^n , обладающие тем свойством, что для любых $n+2$ точек множества $R \in S \cup S'$ существует гиперплоскость, строго отделяющая $S \cap R$ от $S' \cap R$. Доказать, что существует гиперплоскость, строго отделяющая S от S' .

25. Пусть S и S' — конечные множества точек в E^n , обладающие тем свойством, что для любых $2n+2$ точек множества $T \subset S \cup S'$ существует гиперплоскость, строго отделяющая $S \cap T$ от $S' \cap T$. Показать, что существует гиперплоскость, отделяющая S от S' .

Комментарии и библиография к главе 7

7.1. Первой наиболее важной работой по теории нелинейного программирования (НЛП) была фундаментальная работа Куна и Таккера [1]. В соответствии с терминологией, принятой в этой книге, их работу можно отнести к вогнутому программированию.

В теоремах Куна — Таккера, аналогичных теоремам 7.1.1 и 7.1.2, используются дифференциальные свойства функций, в то время как в наших теоремах используются только свойства отделимости непересекающихся выпуклых множеств. Следовательно, предположения, сделанные в теореме 7.1.1, не эквивалентны соответствующим предположениям Куна и Таккера и не сравнимы с ними. Теорема 7.1.3 заимствована непосредственно из их работы.

Другие модификации теорем Куна — Таккера были предложены Эрроу и Гурвицем [1].

Имеются два сборника статей по теории НЛП [15] и линейным неравенствам [12]; редакторами первого являются Эрроу, Гурвиц и Удзава, второго — Кун и Таккер.

7.2. Математическая проблема выбора портфеля ценных бумаг была рассмотрена Марковицем [1]. Мы частично следовали его изложению. Марковица интересовала более общая проблема определения экстремального вектора в задаче о капиталовложениях. Первой компонентой этого вектора является ожидаемая продукция, а второй компонентой является дисперсия ценности.

Естественным примером вогнутого программирования является задача о смеси бензинов с различными октановыми числами.

Теория потребления изобилует примерами НЛП (см. Самуэльсон [2]).

Международная торговля и обмен с точки зрения НЛП изучались Рейтером [1].

Модель производственно-технологического анализа, рассмотренная в этой главе, была сформулирована Ченери [1] (см. также Ченери и Кретчмер [1]). Ченери и Удзава [2] предложили итеративное решение.

Много важных моделей НЛП появилось в результате анализа проблем производства и управления запасами. В этом круге вопросов себестоимость продукции является выпуклой функцией объема продукции. Первые исследования задач этого типа были проведены Хоном и Модильяни [1]. Эти модели подробно были изучены Эрроу, Карлином и Скарфом [1], гл. 4—7.

7.3. Уравнения градиентного метода (7.3.1) были предложены Эрроу и Гурвицем [2], которые доказали сходимость метода в малом к паре седловых точек. Это означает, что если начальная пара допустимых векторов выбрана достаточно близко к седловой точке, то решение градиентных уравнений сходится. Удзава [4] установил сходимость для любых начальных векторов. Мы изложили его доказательство. Градиентный метод в этой главе может быть истолкован как естественное обобщение метода дифференциальных уравнений, предложенного Брауном и фон Нейманом и рассмотренного в п. 6.7.

Что касается вычислительной стороны вопроса ¹⁾, мы обращаем внимание читателя на симплекс-метод для квадратичного программирования, развитый Вулфом [2]. Другие вычислительные методы, которые иногда можно использовать и для квадратичного программирования, были предложены Марковицем [2] и Хаутэккером [2].

7.4. Векторная задача максимизации и соответствующие теоремы обязаны своим первоначальным появлением Куну и Таккеру [1], которые использовали дифференциальные свойства в отличие от методов, используемых здесь.

В связи с векторной задачей максимизации отсылаем читателя к работе Гурвица [1] по программированию в абстрактных пространствах (см. также Кретчмер [1]).

¹⁾ Вычислительным методам нелинейного программирования посвящены книги Зойтендейка [1], Кюнцы и Крелле [1], а также работы Бута [1], Вегнера [1], Келли [1], Кюнцы [1], Лемке [2], Тейла и ван-де-Панне [1], Филипа [1], Хаутэккера [3]. — *Прим. ред.*

7.5. Разобранная в этом пункте интересная теория сопряженных функций была построена Фенхелем. Изложение этой теории содержится в его книге [1]. Фенхель строит теорию сопряженных функций с алгебраической точки зрения, используя понятия полярной взаимности. Наше изложение этих вопросов чисто геометрическое.

7.6. Теорема 7.6.4 принадлежит Боненбласту, Карлину и Шепли [2]. Здесь приведено другое доказательство, в котором используются идеи сопряженных функций.

7.8. Результаты этого пункта ¹⁾ принадлежат Фенхелю [1].

7.9. Теоремы об аппроксимации функций полиномами различных степеней имеют длинную историю. Теорема 7.9.2 принадлежит Радемахеру и Шенбергу [1].

Большинство результатов этого пункта можно найти у Карлина и Шепли [1] ²⁾.

7.10. В связи с задачами 5—8 см. работы Чарнеса и Купера [1], а также Савиджа [1]. Задача 9 предложена Хилдретом [1]. Задача 11 основана на результатах, впервые полученных Куном и Таккером. Результаты задачи 12 были указаны Удзавой. Задача 13 принадлежит Хилдрету [1]. Задача 14 предложена Удзавой (см. сборник [15]).

¹⁾ По поводу двойственности в нелинейном программировании см. работы Вулфа [3], Дорна [1]—[3], Мангасаряна [1], Чарнса, Купера, Кортанека [1]—[3], Эйзенберга [1]. — *Прим. ред.*

²⁾ Некоторые результаты этого пункта содержатся уже в работах П. Л. Чебышева „Теория механизмов, известных под именем параллелограммов“ (1853 г.), „Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций“ (1857—1859 гг.), „О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменной“ (1880—1881 гг.). — *Прим. перев.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИЗУЧЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

За последние два десятилетия в математическом исследовании экономических моделей был достигнут весьма впечатляющий прогресс. Так как в экономических моделях мы обычно встречаемся с недифференцируемыми функциями и с переменными, подчиненными ограничениям в форме неравенств, для изучения которых не могут применяться методы классического анализа, то оказалось необходимым развить новые методы, позволившие найти подход к задачам такого рода. Вообще говоря, здесь нужны те же методы, что и в теории игр, т. е. теория выпуклых множеств, топологические теоремы о неподвижной точке, теория положительных матриц и т. д. В этой и в следующей главах мы исследуем применение этих методов к проблемам математической экономики.

В этой главе мы изучим элементы теории производства, теории потребления и теории равновесия. В гл. 9 будет рассмотрена экономика благосостояния, модели динамической теории сбалансированного роста и некоторые задачи теории устойчивости, связанные с ценами равновесия. Мы не будем давать формального рассмотрения макроэкономических моделей, теории агрегации и вопросов, связанных с монополиями и олигополиями, так как математическая сторона этих проблем разработана недостаточно хорошо (см. задачи 1—6).

Короче говоря, мы не пытались изложить исчерпывающий курс математической экономики. Скорее мы стремились к тому, чтобы дать возможно более полное описание внутренней математической методики экономических моделей и отметить связь этих методов с более широким понятием процессов принятия решений.

В п. 8.1 мы формулируем различные простые линейные модели равновесия и обмена. Мы приходим к решениям этих линейных моделей, привлекая теорию положительных матриц, которая подробно изложена в п. 8.2. Положительные матрицы весьма естественным образом возникают в экономических исследованиях; помимо этого, они появляются также и как часть теории конечных стохастических процессов при исследовании некоторых механических систем. Поэтому

результаты п. 8.2 имеют весьма широкое значение. В этом пункте (который можно читать независимо от остальной части главы) мы описываем также некоторые свойства матриц, собственные числа которых имеют отрицательные вещественные части. Эти свойства (стр. 289—300) будут важны при исследовании теории устойчивости в гл. 9.

Прежде чем исследовать в общем виде конкурентное равновесие, нам кажется естественным остановиться отдельно на двух главных составных частях теории равновесия, а именно: на теории производства и теории потребления. В п. 8.4 мы описываем математические проблемы, связанные с теорией производства; в п. 8.5 изучается задача характеристики эффективных точек в моделях „анализа производственных процессов“, т. е. задача о выборе оптимального производственного процесса из множества нескольких альтернативных процессов.

В п. 8.6 рассматривается теория потребления. Наш подход основан на постулировании некоторого отношения предпочтения, из которого мы выводим функцию спроса. Так как этот подход не зависит от конкретного вида функции полезности для потребителя, мы можем сформулировать соотношения Е. Е. Слуцкого, описывающие изменения функции спроса в зависимости только от изменений цен и изменений уровня бюджетного ограничения для данного отношения предпочтения. Здесь же рассматривается понятие выявленного предпочтения.

В заключительных пунктах этой главы при исследовании общих статических моделей равновесия используются как теория производства, так и теория потребления. Мы рассматриваем несколько различных вариантов равновесия, которые увенчиваются моделью Эрроу — Дебре. Тонкость топологических методов, используемых при исследовании уравнений спроса и предложения, произведет несомненное впечатление на математически подготовленного читателя.

8.1. Открытые и замкнутые линейные модели Леонтьева. Одна из простейших моделей процесса обмена в хозяйстве может быть описана следующим образом. Имеется n технологических процессов (или отраслей), при помощи каждого из которых производится некоторый продукт. Пусть X_i обозначает суммарный выпуск отрасли i , а x_{ij} представляет общее количество продукта отрасли i , потребляемое отраслью j . Если положить

$$Y_i = X_i - \sum_{j=1}^n x_{ij},$$

то Y_i будут выражать разности между суммарным выпуском отрасли i и количеством продукта этой отрасли, потребленным n отраслями. Величину Y_i обычно называют *конечным спросом* для продукта i .

В замкнутой модели Леонтьева $Y_i = 0$ для всех i . Иными словами, никаких избытков нет. Если в качестве одной из отраслей фигурирует труд, то вся рабочая сила используется полностью; если другим типом отрасли является, например, сталелитейная, то вся произведенная сталь потребляется внутри системы. Замкнутая модель, как правило, включает такие отрасли, как услуги, управление, производство сырья.

В открытой модели Леонтьева $Y_i > 0$ по крайней мере для одного i . С экономической точки зрения открытая модель предполагает наличие экзогенного фактора — некоторого количества капитала, труда, сырья и т. п., привносимого в систему извне. Существенной характеристикой открытой модели является существование внешнего спроса или внешнего предложения (либо их обоих).

Положим

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}.$$

Введенные таким образом величины можно интерпретировать как количества продукта отрасли i , необходимые для производства единицы продукта j . Величины a_{ij} называются *производственными коэффициентами*; в этом пункте мы будем считать их постоянными, не зависящими от действительных величин X_i . (Справедливость этого допущения сомнительна, и поэтому его следует рассматривать лишь как первое приближение.) Отсюда следует, что

$$(I - A)X = Y, \quad (8.1.1)$$

где $A = \|a_{ij}\|$, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

На практике матрицу A предполагают известной или, во всяком случае, поддающейся оценке. Это весьма серьезное предположение, вокруг которого экономистами велась ожесточенная полемика.

Наиболее распространенной задачей, связанной с открытыми моделями Леонтьева, является следующая: считая величины Y_i известными, найти X_i , удовлетворяющие соотношению (8.1.1). Разумеется, ответ будет осмысленным только в том случае, когда получающееся решение $X = (I - A)^{-1}Y$ существует и является неотрицательным вектором.

Положим $(I - A)^{-1} = \|A_{ij}\|$. Тогда $X_i = \sum_j A_{ij}Y_j$ ($i = 1, 2, \dots, n$), так что A_{ij} можно интерпретировать как то количество, на которое следует повысить производство отрасли i , для того чтобы произвести одну дополнительную единицу продукта j .

Другая задача, относящаяся к открытым моделям, заключается в следующем. Рассмотрим n стран $1, 2, \dots, n$. Пусть a_{ij} обозначает маргинальную склонность страны j к импорту из страны i (под *маргинальной склонностью к импорту* мы понимаем увеличение

импорта из страны i в страну j , приходящееся на одну дополнительную единицу увеличения дохода страны j). Под a_{ij} будем подразумевать маргинальную склонность страны i к потреблению своих собственных товаров. Пусть X_i — национальный доход страны i , а c_i — ее национальные расходы, которые не зависят от дохода. Тогда

$$X_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j + c_i$$

и, следовательно, $(I - A)X = c$. Для того чтобы векторы X и c имели экономический смысл, они должны быть положительными.

Этот пример можно интерпретировать также как *замкнутую модель торговли между странами*. Предположим, что весь доход страны j складывается из продаж товаров другим странам и внутри страны. Пусть α_{ij} — доля дохода страны j , затрачиваемая на товары страны i , а X_j — годовой доход страны j . Суммарная величина экспорта из страны i равна, очевидно,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_j,$$

а эта величина, по определению замкнутой системы, равна X_i . Таким образом, мы имеем

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_j = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} = 1, \quad \alpha_{ij} \geq 0.$$

Одна из задач, с которыми приходится сталкиваться при изучении уравнений такого типа, заключается в выяснении условий, обеспечивающих наличие положительного решения.

В случае замкнутой модели Леонтьева мы ищем положительное решение X системы уравнений $AX = X$. Нетривиальные решения существуют в том и только в том случае, когда число 1 является собственным числом матрицы A . Но даже если единица и является собственным числом, для существования положительного собственного вектора требуется нечто большее. Теория положительных матриц служит для решения подобных вопросов. Несколько условий разрешимости этих задач выводятся в следующем пункте и применяются в п. 8.3.

Обычные двойственные задачи для экономической модели, включающей труд и цены, формулируются в виде систем уравнений с матрицей, транспонированной к матрице A . Пусть $(n+1)$ -й продукт

представляет собой труд. Если безработицы нет, то

$$X_{n+1} - \sum_{j=1}^n X_{n+1,j} = 0.$$

Определим, как и прежде,

$$a_{n+1,j} = \frac{X_{n+1,j}}{X_j},$$

так что $a_{n+1,j}$ можно интерпретировать, как количество труда, необходимое для производства одной единицы продукта j . Следовательно, $\sum_i a_{n+1,i} A_{ij}$ представляет собой дополнительное количество труда, необходимое для производства одной дополнительной единицы продукта j .

Пусть p_i — цена единицы продукта i . Обычно предполагается, что цена продукта равна затратам на его производство, т. е.

$$p_j = \sum_{i=1}^n p_i a_{ij} + p_{n+1} a_{n+1,j},$$

или

$$p(I - A) = p_{n+1} a_{n+1}.$$

Здесь через a_{n+1} обозначен вектор $(a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,n})$. Это своего рода условие равновесия; можно считать, что оно является результатом настолько полной конкуренции, чтобы получение прибылей было невозможным. Обычно p_{n+1} принимается равным единице, так что p_i представляют собой относительные цены.

8.2. Теория положительных матриц¹⁾. Изучение матриц с положительными элементами весьма важно для целого ряда приложений. Такие матрицы часто возникают естественным образом — иначе говоря, природа самой модели требует положительности коэффициентов — в вероятностных моделях (в частности, при изучении цепей Маркова), в экономических исследованиях, при изучении колебаний механических систем и т. д. В соответствии с этим в настоящем параграфе мы сделаем небольшое отступление и установим несколько общих предложений относительно собственных чисел положительных матриц, которые будут иметь непосредственное отношение к нашему исследованию экономических моделей.

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица. Если все a_{ij} неотрицательны, мы будем писать $A \geq 0$; если $A \geq 0$ и некоторые $a_{ij} > 0$, пишем $A > 0$; если же все $a_{ij} > 0$, мы записываем это в виде $A > 0$.

¹⁾ Результаты этого пункта будут использованы только в п. 8.3 этой главы и в п. 9.3, 9.7 и 9.8 гл. 9.

Это согласуется с обозначениями и терминологией, принятыми нами ранее для векторов.

Будем писать $A \geq B$, если $A - B \geq 0$ и т. д. Положительная матрица, рассматриваемая как отображение, очевидно, сохраняет частичное упорядочение векторов, определяемое отношением $\geq$. В частности, если $x' \geq x$, то $x'A \geq xA$ для $A \geq 0$. Положим

$$\Gamma = \{\lambda \mid xA \geq \lambda x \text{ для некоторого } x \geq 0\}. \quad (8.2.1)$$

Какова бы ни была матрица $A \geq 0$, это множество всегда содержит $\lambda = 0$. Поскольку соотношение $xA \geq \lambda x$ однородно, мы можем, не умаляя общности, предположить, что неотрицательный вектор x , отвечающий значению λ , нормирован так, что $\sum_i x_i = 1$. Такие векторы составляют компактное множество. Положим $\lambda_0 = \sup_{\lambda \in \Gamma} \lambda$. Имеем, очевидно, $\lambda_0 < \infty$. Мы начнем с исследования матриц со строго положительными элементами, а затем перейдем к тем видоизменениям, которые необходимы при рассмотрении положительных матриц общего вида.

► Теорема 8.2.1. Пусть $A > 0$. Тогда а) существует вектор $x^0 > 0$, для которого $x^0 A = \lambda_0 x^0$; б) если $\lambda \neq \lambda_0$ — любое другое собственное число матрицы A , то $|\lambda| < \lambda_0$; в) λ_0 есть собственное число, имеющее алгебраическую и геометрическую кратность, равную 1.

Замечание 8.2.1. Для того чтобы пояснить смысл этой теоремы, выскажем следующие утверждения (доказываемые в п. А.4). Положим

$$N_\lambda^r = \{x \mid x(A - \lambda I)^r = 0\}$$

и для произвольного вектора y

$$M_\lambda^r = \{x \mid x = y(A - \lambda I)^r\}.$$

Тогда при любых A и λ должно быть $N_\lambda^0 \subset N_\lambda^1 \subset \dots \subset N_\lambda^k = N_\lambda^{k+1} = \dots$. Знак $\subset$ понимается здесь в смысле строгого включения (исключающего равенство). Определяемое таким образом целое число k называется индексом λ . Размерность множества N_λ^1 называется геометрической кратностью λ , а размерность N_λ^k — его алгебраической кратностью. Кроме того, для того же k имеем $M_\lambda^0 \supset M_\lambda^1 \supset M_\lambda^2 \supset \dots \supset M_\lambda^k = M_\lambda^{k+1} = M_\lambda^{k+2} = \dots$. Если A — самосопряженная матрица, то для любого собственного числа λ будет $k = 1$ и, следовательно, геометрическая и алгебраическая кратности λ совпадают. Геометрическая кратность всегда не превосходит алгебраической. Когда

алгебраическая и геометрическая кратности совпадают, соответствующие элементарные делители являются простыми.

Доказательство теоремы. а) Из простых соображений компактности следует существование вектора $\mathbf{x}^0 \geq \mathbf{0}$, для которого $\mathbf{x}^0 \mathbf{A} \geq \lambda_0 \mathbf{x}^0$. Но поскольку из $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ следует, что $\mathbf{x} \mathbf{A} > \mathbf{0}$ при $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, строго положительный вектор $\mathbf{y}^0 = \mathbf{x}^0 \mathbf{A}$ должен удовлетворять неравенству $\mathbf{y}^0 \mathbf{A} > \lambda_0 \mathbf{y}^0$, если только не выполнено равенство $\mathbf{x}^0 \mathbf{A} = \lambda_0 \mathbf{x}^0$. Но если $\mathbf{y}^0 \mathbf{A} > \lambda_0 \mathbf{y}^0$, то можно найти $\epsilon > 0$, для которого будет $\mathbf{y}^0 \mathbf{A} \geq (\lambda_0 + \epsilon) \mathbf{y}^0$, что противоречит определению λ_0 . Следовательно, $\mathbf{x}^0 \mathbf{A} = \lambda_0 \mathbf{x}^0$, причем $\mathbf{x}^0 > \mathbf{0}$.

б) Пусть $\lambda \neq \lambda_0$ — собственное число матрицы $\mathbf{A}$, и пусть соответствующий ему ненулевой собственный вектор есть $\mathbf{z}$, т. е. $\mathbf{z} \mathbf{A} = \lambda \mathbf{z}$. Обозначим через $|\mathbf{z}|$ вектор с компонентами $|z_i|$. Тогда из положительности матрицы $\mathbf{A}$ следует, что $|\mathbf{z}| \mathbf{A} \geq |\lambda| |\mathbf{z}|$. По построению λ_0 имеем $|\lambda| \leq \lambda_0$. Убедимся в том, что здесь имеет место строгое неравенство. Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}_\delta = \mathbf{A} - \delta \mathbf{I}$, где δ выбрано настолько малым, чтобы матрица $\mathbf{A}_\delta$ была строго положительной. Наибольшее вещественное положительное собственное число матрицы $\mathbf{A}_\delta$ равно $\lambda_0 - \delta$; оно, как мы видели, ограничивает (по модулю) все другие собственные числа матрицы $\mathbf{A}_\delta$. Если собственное число удовлетворяет равенству $|\lambda| = |\lambda_0|$, где λ отлично от λ_0 , то $|\lambda - \delta| > |\lambda_0 - \delta|$, что противоречит предыдущему заключению. Доказательство утверждения б) завершено.

в) Предположим, что множество всех собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_0 , по крайней мере двумерно. Так как $\mathbf{A}$ — вещественная матрица, существует вещественный собственный вектор $\mathbf{z}$, линейно не зависящий от вектора $\mathbf{x}^0$. Поскольку $\mathbf{x}^0 > \mathbf{0}$, существует такая линейная комбинация $\mathbf{w} = t \mathbf{x}^0 + \mathbf{z}$, что $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$, но не $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ [достаточно взять $t = \min_i \left(-\frac{z_i^0}{x_i^0} \right)$]. Ввиду

того что вектор $\mathbf{w} \mathbf{A}$ строго положителен и не может тождественно равняться нулю, мы получили бессмыслицу. Отсюда мы заключаем, что геометрическая кратность λ_0 равна 1.

Пусть вектор $\mathbf{z} = \mathbf{y} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})$ таков, что $\mathbf{z} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) = \mathbf{0}$. В силу первой части этого рассуждения векторы $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}^0$ кратны. Умножив $\mathbf{y}$ на надлежащую ненулевую постоянную, мы можем предположить, что $\mathbf{z} = a \mathbf{x}^0$, где $a \geq 0$. Пусть $\mathbf{f}^0$ — положительный собственный вектор матрицы $\mathbf{A}^T$, отвечающий собственному числу λ_0 . Существование $\mathbf{f}^0$ можно установить, применив утверждение а) теоремы к строго положительной матрице $\mathbf{A}^T$. Отметим, что

$$(a \mathbf{x}^0, \mathbf{f}^0) = (\mathbf{y} (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}), \mathbf{f}^0) = (\mathbf{y}, (\mathbf{A}^T - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{f}^0) = 0,$$

и в силу неравенства $(\mathbf{x}^0, \mathbf{f}^0) > 0$ мы должны иметь $a = 0$. Следовательно, если $\mathbf{y}(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$, то $\mathbf{y}(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) = \mathbf{0}$ и поэтому $N_{\lambda_0}^2 = N_{\lambda_0}^1$. Это и означает, что алгебраическая кратность λ_0 равна его геометрической кратности.

Для более детального исследования структуры множества собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_0 , введем операцию проектирования векторов на линейное пространство собственных векторов, отвечающих λ_0 . С этой целью рассмотрим собственный вектор $\mathbf{x}^0$, для которого $\mathbf{x}^0 \mathbf{A} = \lambda_0 \mathbf{x}^0$, и собственный вектор $\mathbf{f}^0 > \mathbf{0}$, для которого $\mathbf{A} \mathbf{f}^0 = \lambda_0 \mathbf{f}^0$, и нормируем их так, чтобы $\sum_i x_i^0 f_i^0 = 1$.

Определим $\mathbf{P}$ как матрицу $\|x_j^0 f_i^0\|$. Тогда $\mathbf{P}$ будет обладать следующими свойствами:

- 1) $\mathbf{xP} = (\mathbf{x}, \mathbf{f}^0) \mathbf{x}^0$ и $\mathbf{Pf} = (\mathbf{f}, \mathbf{x}^0) \mathbf{f}^0$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{f}$.
- 2) $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.
- 3) $\mathbf{AP} = \mathbf{PA} = \lambda_0 \mathbf{P}$.

Все эти свойства проверяются непосредственно.

Известно, что $(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})^{-1}$ для произвольной матрицы $\mathbf{B}$ представляет собой аналитическую функцию от λ (т. е. каждый элемент этой матрицы есть аналитическая функция от λ), если только обратная матрица имеет смысл. Каждое собственное число матрицы $\mathbf{B}$ порождает полюс матрицы $(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})^{-1}$ (т. е. полюс для некоторого элемента), порядок которого связан с алгебраической кратностью собственного числа. Именно порядок полюса для собственного числа $\tilde{\lambda}$ равен индексу $\tilde{\lambda}$ (см. замечание 8.2.1 выше и п. А. 7). Кроме того, ряд

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})^{-1} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{k+1}} \mathbf{B}^k$$

сходится при $|\lambda| > r$, где r означает радиус наименьшего круга, содержащего собственные числа матрицы $\mathbf{B}$. [Его называют также *спектральным радиусом*. Для обозначения спектрального радиуса матрицы $\mathbf{A}$ мы будем часто писать $\lambda_0(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$.] Однако матрица $(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})^{-1}$ имеет полюс при некотором λ^* , где $|\lambda^*| = \lambda_0$; следовательно,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\max_{i,j} |b_{ij}^{(n)}|},$$

где $\mathbf{B}^n = \|b_{ij}^{(n)}\|$. Теперь мы можем доказать следующую теорему.

► Теорема 8.2.2. Для $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, λ_0 и $\mathbf{P}$, определенных выше,

$$\frac{1}{\lambda_0^n} \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{P}.$$

Доказательство. Все собственные числа матрицы $B = A - \lambda_0 P$ должны лежать строго внутри круга радиуса λ_0 , так как 1) любое ненулевое собственное число матрицы B является собственным числом матрицы A и 2) λ_0 не является собственным числом матрицы B .

Докажем теперь эти утверждения.

Предположим, что доказываемые утверждения неверны. Тогда $zB = \lambda z$ для некоторого ненулевого z . Отсюда $zBP = \lambda zP$ и

$$zBP = z(AP - \lambda_0 P^2) = \lambda_0 z(P - P) = 0.$$

Поэтому если $\lambda \neq 0$, то $zP = 0$, и равенство $zB = \lambda z$ сводится к $zA = \lambda z$. В частности, если $zB = \lambda_0 z$, то $zP = 0$ и $zA = \lambda_0 z$. Но тогда z будет ненулевым кратным x^0 , и вектор zP не может быть нулевым. Это противоречие показывает, что наши утверждения были справедливы. Спектральный радиус матрицы B должен быть меньше λ_0 , и, следовательно, максимальная компонента матриц B^m удовлетворяет для всех m оценке $|b_{ij}^{(m)}| < K\rho^m$ при соответствующем $\rho < \lambda_0$ (см. замечания, предшествующие этой теореме). Но $B^m = A^m - \lambda_0^m P$; отсюда мы заключаем, что A^m/λ_0^m сходится к P как геометрическая прогрессия со знаменателем ρ/λ_0 .

Вся предыдущая теория остается справедливой, если $A \geq 0$ и $A^m > 0$ для некоторого m . Она справедлива также, если A отображает некоторый выпуклый конус из E^n в его внутренность. Частным случаем такого конуса, связанного с положительной матрицей, является неотрицательный ортант.

Некоторые из приведенных выше результатов справедливы и в том случае, когда $A \geq 0$, т. е. даже если мы не требуем дополнительно строгой положительности некоторой степени матрицы A . Пусть U — квадратная матрица, все компоненты которой равны единице; тогда всякая матрица вида $A + \delta U$ ($\delta > 0$) будет строго положительной, и к ней применимы утверждения теоремы 8.2.1. Традиционный предельный переход по δ устанавливает справедливость утверждений а) и б) следующей теоремы.

► **Теорема 8.2.3.** Пусть $A \geq 0$, и пусть λ_0 определено в соответствии с (8.2.1). Тогда: а) λ_0 есть собственное число, и существует вектор $x^0 \geq 0$, для которого $x^0 A = \lambda_0 x^0$; б) если λ — любое другое собственное число, то $|\lambda| \leq \lambda_0$; в) ряд

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{A^i}{\lambda_0^i}$$

сходится, если только $x^0 > 0$; г) если λ — собственное число матрицы A , для которого $|\lambda| = \lambda_0$, то $\eta = \lambda/\lambda_0$ есть корень из единицы и $\eta^m \lambda_0$ есть собственное число матрицы A при всех $m = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство в). Для удобства изложения мы предположим, что $\lambda_0 = 1$. Отметим сначала, что элементы матриц A^m равномерно ограничены. Действительно, из равенства $x^0 A^m = x^0$ следует, что

$$0 \leq a_{ij}^{(m)} \leq \frac{\max_i x_i^0}{\min_i x_i^0},$$

а это и требовалось доказать.

Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство тех элементов, для которых $zA = z$. Очевидно, $\mathcal{L}$ есть замкнутое линейное пространство, причем для произвольного $z \in \mathcal{L}$

$$z \frac{A + A^2 + \dots + A^m}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} z.$$

Положим далее $\mathcal{K} = \{y | y = z(I - A)\}$; иначе говоря, $\mathcal{K}$ есть область значений оператора $I - A$. Мы утверждаем, что для $y \in \mathcal{K}$ последовательность yS_m , где

$$S_m = \frac{A + A^2 + \dots + A^m}{m},$$

сходится к нулевому вектору. Подробнее: из $y = z(I - A)$ следует, что $yS_m = (zA - zA^{m+1})/m$ стремится к нулю в силу равномерной ограниченности компонент матриц A^{m+1} .

Таким образом, мы установили, что S_m сходится для всех векторов, содержащихся в сумме $\mathcal{L} + \mathcal{K}$. Остается только показать, что $\mathcal{L} + \mathcal{K}$ заполняет целиком n -мерное евклидово пространство. С этой целью заметим, что любой вектор x можно записать в виде

$$x = (x - xS_m) + xS_m = y_m + z_m.$$

Кроме того, при $m \rightarrow \infty$ мы можем найти предельный вектор z_0 для последовательности z_m . Это возможно, так как S_m есть последовательность равномерно ограниченных матриц. Непосредственно проверяется, что $z_0 \in \mathcal{L}$. Кроме того, уже показано, что все $y_m \in \mathcal{K}$ и, следовательно, их предел также лежит в $\mathcal{K}$. Тем самым в) доказано.

г) Не умаляя общности, можно предположить существование такого f^0 , что $Af^0 = f^0$. Сделать это можно по следующей причине. Предположим, для определенности, что f^0 имеет вид $(f_1^0, f_2^0, \dots, f_r^0, 0, \dots, 0)$, где $f_1^0 > 0, \dots, f_r^0 > 0$. (Вектор f^0 существует в силу пункта а), примененного выше к матрице A^T .) Так как $Af^0 = f^0$, то

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 есть положительная $(r \times r)$ -матрица, а A_2 — положительная $(n-r) \times (n-r)$ -матрица. Очевидно, для исследования природы собственных чисел матрицы A достаточно изучить отдельно собственные числа матриц A_1 и A_2 . Продолжая в том же духе, мы в конечном счете придем к задаче, для которой будет справедливо предположение, сделанное относительно f^0 .

Перейдем теперь к доказательству утверждения г). Пусть λ — собственное число матрицы A , модуль которого равен единице, и пусть $xA = \lambda x$ для некоторого ненулевого вектора x , т. е.

$$\sum_{i=1}^n x_i a_{ij} = \lambda x_j.$$

Тогда $\sum_i |x_i| a_{ij} \geq |x_j|$, или $|x| A \geq |x|$. Но

$$(f^0, |x|) \leq (f^0, |x| A) = (A f^0, |x|) = (f^0, |x|),$$

так что если равенство $|x| A = |x|$ выполнено не будет, то неравенство в этой цепочке будет строгим, и мы придем к противоречию. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n |x_i| a_{ij} = \left| \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \right|.$$

Отсюда вытекает существование таких чисел $u_j (|u_j| = 1)$, что

$$x_i a_{ij} = |x_i| a_{ij} u_j \quad (*)$$

для всех i и j . Обозначим через $x \cdot u$ вектор с компонентами $\{x_i u_i\}$. Умножая предыдущее соотношение на u_i и суммируя, мы получаем

$$(x \cdot u) A = (u \cdot |x|) A \cdot u,$$

а из (*) суммированием по i находим

$$|x| \cdot u = (|x| A) \cdot u = x A = \lambda x.$$

Рассмотрим вектор $x \cdot u$. Использование последних двух соотношений дает нам

$$(x \cdot u) A = (u \cdot |x|) A \cdot u = \lambda x A \cdot u = \lambda^2 x \cdot u.$$

Поэтому $x \cdot u$ есть собственный вектор, соответствующий λ^2 . Кроме того,

$$u_i^2 |x_i| a_{ij} u_j = u_i^2 x_i a_{ij}$$

и, следовательно, $(|x| \cdot u^2) A \cdot u = (x \cdot u^2) A$. Но

$$(|x| \cdot u^2) A = \lambda (x \cdot u) A = \lambda^3 u \cdot x,$$

так что $(x \cdot u^2)A = \lambda^3(x \cdot u^2)$. Это показывает, что $x \cdot u^2$ представляет собой собственный вектор для λ^3 . Продолжая таким образом, мы найдем, что если λ есть собственное число с модулем, равным единице, то λ будет корнем из единицы и все числа $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^n$ будут, как и утверждалось, собственными числами. Собственный вектор, отвечающий λ^{r+1} , равен $x \cdot u^r$, где x и u имеют указанный выше смысл. Это завершает доказательство теоремы 8.2.3.

При доказательствах теорем 8.2.1 и 8.2.3 использовалась следующая характеристика спектрального радиуса $\lambda_0(A)$, неявно заключенная в построении Γ по формуле (8.2.1). Она достаточно полезна, чтобы привести ее здесь.

► Следствие 8.2.1. *Наибольшее по величине собственное число $\lambda_0 = \lambda_0(A)$ матрицы A вещественно, неотрицательно и характеризуется как $\lambda_0 = \max_{\lambda \in \Gamma} \lambda$, где*

$$\Gamma = \{\lambda \mid xA \geq \lambda x \text{ для некоторого } x \geq 0\}. \quad (8.2.1)$$

Другое полезное утверждение заключается в следующем.

► Следствие 8.2.2. *Если существует такой вектор $x^0 > 0$, что $x^0 A \leq \mu x^0$, то μ есть оценка сверху для спектрального радиуса матрицы A .*

Доказательство. Легко получить, что

$$|a_{ij}^{(n)}| \leq \mu^n \frac{\max_i x_i^0}{\min_i x_i^0},$$

где $A^n = \|a_{ij}^{(n)}\|$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{ij}^{(n)}|} \leq \mu,$$

что сразу приводит к требуемому результату (см. рассуждения, предшествовавшие теореме 8.2.2).

Из следствия 8.2.1 вытекает

► Следствие 8.2.3. *Если $A \geq B \geq 0$ и $\lambda_0(A), \lambda_0(B)$ определены для A и B согласно (8.2.1), то $\lambda_0(A) \geq \lambda_0(B)$; иначе говоря, спектральный радиус положительной матрицы есть монотонно возрастающая функция ее компонент.*

Последнее следствие можно сопоставить с основной теоремой о минимаксе в теории игр.

► Следствие 8.2.4. Пусть $A \geq 0$ и $\mu_0 = \inf \{\mu \mid Af \leq \mu f, f \geq 0\}$; пусть далее собственный вектор x^0 строго положителен. Тогда

$$\mu_0 = \lambda_0 = \sup_{\substack{x \geq 0 \\ \sum_i x_i = 1}} \inf_{\substack{f \geq 0 \\ \sum_i f_i = 1}} \frac{(f, xA)}{(f, x)} = \inf_{\substack{f \geq 0 \\ \sum_i f_i = 1}} \sup_{\substack{x \geq 0 \\ \sum_i x_i = 1}} \frac{(f, xA)}{(f, x)}.$$

Здесь подразумевается, что если $(f, x) = (f, xA) = 0$, то отношение $(f, xA)/(f, x)$ принимается равным λ_0 .

Доказательство. Так как для матрицы A^T существует положительный собственный вектор f^0 (теорема 8.2.3), отвечающий собственному числу λ_0 , должно быть $\mu_0 \leq \lambda_0$.

Но для f , отвечающих μ_0 , которые, разумеется, существуют, мы получаем

$$\mu_0 (f, x^0) \geq (Af, x^0) = (f, x^0 A) = \lambda_0 (f, x^0).$$

В силу условий, наложенных на x^0 , необходимо $\mu_0 \geq \lambda_0$. Следовательно, $\mu_0 = \lambda_0$. Остальные соотношения получаются обычным образом (см. теорему 1.3.1).

Следующая теорема полезна благодаря своим экономическим приложениям.

► Теорема 8.2.4. Если $\rho > \lambda_0(A)$ и $A \geq 0$, то $(\rho I - A)^{-1}$ преобразует неотрицательные векторы в неотрицательные векторы.

Доказательство. Для $\lambda > \lambda_0(A)$, где $\lambda_0(A)$ — спектральный радиус, путем непосредственного подсчета получаем представление

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}.$$

Так как каждое A^k отображает неотрицательный ортант в себя, то аналогичное справедливо и для всей бесконечной суммы.

Справедлива также и обратная теорема: если $(\rho I - A)^{-1}$ отображает неотрицательный ортант в себя, то ρ есть оценка сверху для спектрального радиуса матрицы A . В самом деле, если $xA \geq \lambda x$ для $x \geq 0$, то $z = x(A - \rho I) + (\rho - \lambda)x$ есть неотрицательный вектор. Следовательно, матрица $(\rho I - A)^{-1}$, примененная к вектору z , даст неотрицательный вектор, или

$$-x + (\rho - \lambda)x(A - \rho I)^{-1} \geq 0.$$

Но $x \geq 0$ и $x(A - \rho I)^{-1} \geq 0$, откуда следует, что $\rho > \lambda$. С другой стороны, λ_0 является таким допустимым значением λ (следствие 8.2.1) и, следовательно, $\rho > \lambda_0(A)$, что и требовалось.

Мы можем выразить условия, при которых $(\rho I - A)^{-1}$ переводит положительные векторы в положительные векторы, в терминах ограничений на главные миноры матрицы $(\rho I - A)$. Именно, если любой главный минор матрицы $\rho I - A$ положителен, то матрица $(\rho I - A)^{-1}$ сохраняет положительность векторов.

Для доказательства этого утверждения достаточно в силу теоремы 8.2.4 показать, что $\rho > \lambda_0(A)$. Это делается следующим образом. Равенство $\rho = \lambda_0(A)$ невозможно, так как, по предположению, $\det(\rho I - A) > 0$. На основании теоремы 8.2.4 достаточно показать, что $\det(tI - A) \neq 0$ для всех $t > \rho$. Очевидно,

$$\det(tI - A) = \det[(t - \rho)I + B(\rho)], \quad (8.2.2)$$

где $B(\rho) = \rho I - A$. Разлагая правую часть (8.2.2), мы убеждаемся, что в силу сделанного предположения $\det(tI - A) > 0$ для $t > \rho$, а это и требовалось.

Указанное предположение можно ослабить, так что наше утверждение будет выглядеть следующим образом: если единственная последовательность n „окаймляющих“ главных миноров $|\rho I - A|_1^p$, $p = 1, \dots, n$, положительна, то любой главный минор матрицы A положителен, и поэтому, согласно полученным выше результатам, ρ будет больше максимального характеристического числа матрицы A . Доказательство этого утверждения мы опускаем (см. задачу 11).

Разложимость матриц. Другая группа идей, связанных с положительными матрицами, включает понятие неразложимости матриц. Рассмотрим неотрицательную $n \times n$ -матрицу $A = \|a_{ij}\|$. Будем говорить, что множество индексов S замкнуто, если $a_{pq} = 0$ для $q \in S$, $p \notin S$. Если собственных замкнутых множеств индексов не существует, то матрица A называется *неразложимой*. Это будет иметь место в том и только в том случае, когда не существует такой перестановочной матрицы¹⁾ Π , что

$$\Pi A \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

где A_1 и A_2 — квадратные подматрицы.

Как отмечено в доказательстве теоремы 8.2.3 (см. г), матрица является разложимой, если она имеет неотрицательный собственный вектор, не являющийся строго положительным и соответствующий положительному собственному числу. Если, например, $Ay^0 = \lambda_0 y^0$,

¹⁾ *Перестановочная матрица* — это матрица, в которой каждая строка и каждый столбец содержат единственный ненулевой элемент, равный единице.

где вектор $y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$ таков, что $y_1^0 > 0, \dots, y_r^0 > 0$ и $y_{r+1}^0 = y_{r+2}^0 = \dots = y_n^0 = 0$, то необходимо

$$A = \left(\begin{array}{cc} \overbrace{A_1}^r & \overbrace{A_2}^{n-r} \\ A_3 & A_4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \} r \\ \} n-r \end{array},$$

причем $A_3 = 0$.

Класс положительных неразложимых матриц можно в свою очередь подразделить на апериодический подкласс и периодический подкласс. Элементарно доказывается, что неразложимую матрицу A перестановками строк и столбцов можно привести к виду

$$ПАП^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & G_\omega \\ G_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & G_{\omega-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.2.3)$$

где нули, стоящие на диагонали, означают нулевые квадратные матрицы. Число ω связано с количеством собственных чисел в круге радиуса λ_0 (см. теорему 8.2.3, подпункт г). Если $\omega > 1$, то неразложимая матрица A называется *периодической*; при $\omega = 1$ она называется *апериодической*.

Приложения некоторых из этих идей к экономическим моделям читатель найдет в следующем пункте. Неразложимость является также важным понятием, связанным с переходами между состояниями в цепи Маркова.

Матрицы Метцлера. Завершим этот пункт рассмотрением структуры собственных чисел для матриц $C = \|c_{ij}\|$, у которых $c_{ij} \geq 0$ ($i \neq j$). Такие матрицы экономисты называют матрицами Метцлера; мы будем называть их *M-матрицами*. *M-матрицы* можно считать особым классом положительных матриц, так как, прибавляя к ним достаточно большое положительное кратное единичной матрицы, мы можем получить

$$A = C + \mu I,$$

где $A \geq 0$.

Направим наши усилия на выяснение критериев отрицательности вещественных частей всех собственных чисел *M-матриц*. Обладающие этим свойством *M-матрицы* играют важную роль в экономических исследованиях, особенно при изучении характеристик устойчивости, связанных со сходящимися к состоянию равновесия системами цен.

Это обусловлено тем, что для решений системы дифференциальных уравнений гарантируется локальная устойчивость, если вещественные части всех собственных чисел матрицы этой системы отрицательны (см. п. 9.3).

Так как при переходе к матрице A матрица C подвергается только сдвигу, то все собственные числа матрицы C будут иметь отрицательные вещественные части тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re}(\lambda_i) < \mu$, где λ_i — собственные числа матрицы A . В силу теоремы 8.2.3, так как $A \geq 0$, это будет иметь место в том и только в том случае, если $\lambda_0(A) < \mu$. Аналогичные рассуждения, существенно использующие теорию положительных матриц, позволяют нам получить более сильные результаты. Именнно:

а) собственное число M -матрицы с наибольшей вещественной частью вещественно и ему отвечает неотрицательный собственный вектор. Пусть $\sigma(C) = \max_i \operatorname{Re}(\alpha_i)$, где α_i — собственные числа матрицы C . (Это использование символа σ будет продолжено в дальнейшем);

б) $\sigma(C) < 0$ тогда и только тогда, когда существует такой вектор $x \geq 0$, что $Cx < 0$;

в) $\sigma(C) < 0$ тогда и только тогда, когда матрица $-C^{-1}$ сохраняет положительность.

Утверждения а) и б) непосредственно следуют из теоремы 8.2.3. Утверждение в) является следствием теоремы 8.2.4.

Можно дать эквивалентную формулировку утверждения в) в терминах миноров матрицы C (см. параллельное рассуждение на стр. 298). Именнно, $\sigma(C) < 0$ тогда и только тогда, когда

$$c_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad (8.2.4)$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, (-1)^n \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Дальнейшие свойства положительных матриц, M -матриц, а также их приложения, читатель найдет в задачах 10—15.

8.3. Приложения теории положительных матриц к изучению линейных моделей равновесия и обмена. (1) При рассмотрении замкнутых моделей Леонтьева в п. 8.1 мы не доказали существования положительного решения системы уравнений $AX = X$, где A представляет собой матрицу производственных коэффициентов. (Напомним, что $a_{ij} = x_{ij}/X_j$, где x_{ij} есть общее количество i -го

продукта, используемое j -й отраслью.) Для того чтобы обеспечить существование положительных решений, естественно, понадобится наложить некоторые дополнительные условия. Одно естественное условие, подсказываемое экономическими соображениями, есть $\sum_i x_{ij} = X_j$ (т. е. суммарный выпуск отрасли j полностью расходуется на затраты во всех отраслях). Можно считать, что это условие является частью определения замкнутой экономической системы. Например, в экономике, состоящей только из фермеров, ткачей и плотников, из нашего предположения следует, что фермер тратит весь свой доход на одежду, жилищное строительство и питание.

Задача заключается в определении подлежащих производству количеств, совместимых с производственными коэффициентами. В терминах коэффициентов наше предположение приводит к соотношению

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$$

для всех j .

Отсюда вытекает, что спектральный радиус матрицы A должен быть равен единице. В самом деле, если $u = (1, 1, \dots, 1)$ — вектор с n компонентами, то $uA = u$; если же $Az = \lambda z$, где $\sum_i |z_i| = 1$, то $(u, A|z|) \geq |\lambda| \sum_i |z_i|$. (Через $|z|$ мы снова обозначаем вектор с компонентами $|z_i|$.) Но $(uA, |z|) = \sum_i |z_i|$, откуда следует, что $|\lambda| \leq 1$, и поскольку собственные числа матриц A и A^T совпадают, то $\lambda_0(A) = 1$. Из теоремы 8.2.3 следует существование ненулевого неотрицательного вектора X , являющегося решением системы $AX = X$. Мы доказали следующую теорему.

► Теорема 8.3.1. В замкнутой системе Леонтьева, для которой

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = X_j,$$

существует нетривиальное положительное решение системы $AX = X$. Если некоторая степень матрицы A строго положительна, то это решение единственно с точностью до множителя и является строго положительным вектором.

Последняя часть теоремы выводится из утверждения теоремы 8.2.1.

В случае открытой системы Леонтьева задача заключается в определении условий, при которых система $(I - A)X = Y$ разрешима при любом заданном векторе конечного спроса Y , причем решение X есть неотрицательный вектор.

► Теорема 8.3.2. Если существует некоторый вектор выпуска x^0 , для которого вектор $(I - A)x^0$ строго положителен, то матрица $(I - A)^{-1}$ существует и переводит неотрицательные векторы в неотрицательные векторы. (Выражение $(I - A)^{-1}$ можно рассматривать как линейное преобразование, действующее в зависимости от того, как нам удобнее, либо над векторами-строками, либо над векторами-столбцами. Очевидно, что свойство сохранения положительности у матрицы A и у транспонированной A^T эквивалентны.)

Замечание 8.3.1. Условие этой теоремы означает, что имеется некоторая комбинация выпусков, обеспечивающая избыток по каждому продукту.

Доказательство. В силу теоремы 8.2.4 достаточно показать, что все собственные числа матрицы A по модулю меньше единицы. Пусть λ таково, что $zA = \lambda z$, причем вектор z — ненулевой. Тогда из положительности A следует, что $|z|A \geq |\lambda||z|$. Условие теоремы требует, чтобы имело место соотношение

$$0 < ((I - A)x_0, |z|) = (x_0, |z|) - (x_0, |z|A),$$

и из неотрицательности x_0 вытекает неравенство $0 < (x_0, |z|)(1 - |\lambda|)$. Следовательно, $|\lambda| < 1$, что и требовалось.

Утверждение теоремы 8.3.2 справедливо при любых предположениях, достаточно сильных для того, чтобы загнать все собственные числа матрицы A внутрь единичного круга на комплексной плоскости. Условия теоремы 8.3.2 с этим справляются.

Приведем другую теорему подобного рода. Ее доказательство можно получить небольшим изменением предыдущего рассуждения.

► Теорема 8.3.3. Если существует такой вектор цен p^0 , что вектор $p^0(I - A)$ строго положителен, то матрица $(I - A)^{-1}$ преобразует неотрицательные векторы в неотрицательные векторы.

(2) В качестве примера экономической ситуации, в которой важным является понятие неразложимости, рассмотрим модель, введенную на стр. 288, описывающую экспортно-импортные отношения между странами. Если матрица импортов A неразложима, то доллар, потраченный в какой-либо одной стране, в конечном счете вызовет затраты во всех остальных странах. В частности, если A имеет вид (8.2.3), то страны из G_i будут тратить только в странах из G_{i+1} ; после ω „инстанций“ затрат исходные затраты G_i в G_{i+1} окажут влияние на G_i , порождая тем самым своего рода цикл затрат.

(3) Мы завершим этот пункт кратким описанием одной динамической модели, анализ которой основывается на теореме 8.2.2.

Мы можем считать модель обмена, описанную на стр. 288, функционирующей во времени. В первоначальном рассмотрении система уравнений $Ax = x$ описывала замкнутую модель, в которой компоненты x_i вектора x представляли собой суммарный выпуск i -го производственного процесса (или его интенсивность) безотносительно к периоду времени, в течение которого поддерживалось это равновесие. Эти уравнения можно обобщить и дать им динамическую интерпретацию следующим образом. Пусть x^1 — вектор начальных интенсивностей процессов. Тогда можно считать, что процессам одного периода времени приписаны выпуски $Ax^1 = x^2$. Сходным образом $Ax^2 = x^3$ выражает вектор интенсивностей процессов, требуемых в третьем периоде; аналогичную интерпретацию имеет $Ax^n = x^{n+1}$. Поскольку $x^{n+1} = A^n x^1$, мы находим, что при соответствующих предположениях (т. е. при таких, которые позволяют применить теорему 8.2.2) последовательность x^{n+1} сходится к предельному вектору выпуска x^0 , для которого $x^0 = Ax^0$. Легко сформулировать условия, гарантирующие, что x^0 является ненулевым положительным собственным вектором матрицы A и обладает соответствующим смыслом в контексте замкнутой модели. Другие результаты этого типа, связанные со сходимостью и устойчивостью, будут получены в п. 9.2—9.6.

8.4. Теория производства. В этом пункте мы обобщим предположения Леонтьева и опишем нелинейную модель, включающую производство. Теория производства имеет дело, во-первых, с распределением производственных факторов по различным технологическим способам для производства потребительских товаров и, во-вторых, с распределением стоимости суммарного продукта по производственным факторам.

Рассмотрим ситуацию, в которой n конечных продуктов производятся с использованием данных количеств каждого из r производственных факторов, где производственными факторами считаются труд, земля, сырье и т. д. (Впоследствии мы рассмотрим проблему производства, в которой не будет делаться различия между конечными продуктами и производственными факторами.) Продукты будем обозначать через $i = 1, 2, \dots, n$, а факторы — через $k = 1, 2, \dots, r$.

Технологические возможности производства мы опишем в терминах производственных процессов¹⁾. Экономика имеет в своем распоря-

¹⁾ В подлиннике activity analysis. Трудно переводимое в данном контексте слово activity здесь эквивалентно тому, что в отечественной литературе по линейному программированию получило название технологического способа или технологического процесса (см., например, Л. В. Канторович * [2], стр. 281). Мы будем пользоваться обоими этими терминами, надеясь, что ни к каким недоразумениям это не приведет. — *Прим. перев.*

жении конечное множество базисных технологических процессов $j = 1, 2, \dots, m$, каждому из которых при любых данных обстоятельствах можно сопоставить его интенсивность. Интенсивность экономики в целом можно представить m -мерным вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, каждая компонента которого x_j неотрицательна и представляет интенсивность, с которой используется базисный процесс j . Технология системы будет теперь характеризоваться указанием пары векторных функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Здесь $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ есть n -мерный вектор, i -я компонента которого означает количество продукта i , производимое при поддержании системы на уровне интенсивности $\mathbf{x}$, а $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_r(\mathbf{x}))$ есть r -мерный вектор, k -я компонента которого указывает количество производственного фактора k , требуемого для того, чтобы система могла действовать с интенсивностью $\mathbf{x}$.

Предположим теперь, что в нашем распоряжении имеются определенные количества производственных факторов, представленные r -мерным вектором $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_r)$. Пусть, кроме того, единственной целью, поставленной перед системой, является максимизация стоимости выпуска, вычисленной по действующим рыночным ценам:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad p_i \geq 0.$$

Теперь задача о производстве может быть поставлена следующим образом: найти уровень интенсивностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, максимизирующий стоимость выпуска

$$(\mathbf{p}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n p_i f_i(\mathbf{x}) \quad (8.4.1)$$

при условиях

$$\mathbf{x} \geq 0, \quad (8.4.2)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{v}. \quad (8.4.3)$$

Сформулированная таким образом задача распределения производственных факторов по различным процессам является одним из вариантов задачи линейного (или нелинейного) программирования (см. п. 7.1).

Основными предположениями относительно технологии, которые играют важную роль в экономическом анализе производства и которые будут считаться выполненными в дальнейшем, являются законы постоянства выпуска и уменьшения маргинальных уровней трансформации. Первый из них выражается положительной однород-

ностью функций $f(x)$ и $g(x)$, второй — вогнутостью $f(x)$ и выпуклостью $g(x)$ ¹⁾.

Вспоминая теорию нелинейного программирования, мы можем свести задачу о производстве к задаче нахождения седловой точки $\{\bar{x}, \bar{\omega}\}$ формы Лагранжа:

$$\varphi(x, \omega) = (p, f(x)) + (\omega, v - g(x)) \quad (x \geq 0, \omega \geq 0).$$

Вектор $\bar{\omega}$ из решения задачи о седловой точке можно интерпретировать как индуцированный вектор цен; его можно истолковать как относительную меру распределения стоимости суммарного продукта по производственным факторам (см. п. 5.2).

Частный случай задачи о производстве возникает, если нет объединенных продуктов, т. е. если произведенные количества каждого продукта единственным образом определяются количествами производственных факторов, затраченных в производящем его технологическом способе. Выбирая подходящий масштаб для базисных способов, мы можем сформулировать эту частную задачу следующим образом: найти распределение производственных факторов $\|v_{ik}\|$, максимизирующее

$$\sum_{i=1}^n p_i f_i(v_{i1}, \dots, v_{ir}),$$

при условиях

$$\begin{aligned} v_{ik} &\geq 0 \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, r), \\ \sum_{i=1}^n v_{ik} &\leq v_k \quad (k = 1, \dots, r), \end{aligned}$$

где через v_{ik} обозначено количество производственного фактора k , затраченного в способе i .

Типичным примером является модель Кобба — Дугласа

$$f_i(v_{i1}, \dots, v_{ir}) = \alpha_i v_{i1}^{\beta_{i1}} \dots v_{ir}^{\beta_{ir}},$$

где α_i, β_{ik} — постоянные, причем $\beta_{ik} \geq 0, \sum_k \beta_{ik} = 1$.

Множества производственных возможностей. Различие между конечными продуктами (потребительскими товарами) и производствен-

¹⁾ Независимо от употребляемой автором буржуазно-экономической терминологии (в оригинале речь идет соответственно о законах constant returns и diminishing marginal rate of transformation), эти свойства функций f и g имеют довольно естественную экономическую интерпретацию. Положительная однородность этих функций означает пропорциональность затрат и выпуска интенсивностям функционирующих в системе процессов. Вогнутость f и выпуклость g можно, выражаясь несколько вольно, истолковать, как возможность за счет использования вместо тех или иных процессов их „смеси“ обеспечить те же суммарные интенсивности меньшими затратами и получить при этом больший выпуск. — *Прим. ред.*

ными факторами в значительной мере произвольно. Конечный продукт может использоваться в производстве других конечных продуктов (как в классической модели Леонтьева), а производственный фактор в свою очередь может также и производиться.

Поэтому имеет смысл построить такую модель, в которую все продукты (включая как производственные факторы, так и потребительские товары) входили бы равноправно. Обозначим товары через $i = 1, \dots, n+r$ и будем представлять объемы выпуска всех товаров $(n+r)$ -мерным вектором (отрицательные величины здесь означают затраты).

Технология системы описывается заданием множества производственных возможностей Z как такого подмножества $(n+r)$ -мерного пространства, что вектор выпуска $\mathbf{z}$ технологически осуществим тогда и только тогда, когда $\mathbf{z} \in Z$. Предположения, отвечающие законам постоянства выпуска и уменьшения маргинальных уровней трансформации, будут выражаться в том, что множество Z должно быть выпуклым конусом в $(n+r)$ -мерном пространстве¹⁾.

Исходная структура модели производства может быть представлена множеством производственных возможностей. Подробнее: если технология описывается в терминах $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, то соответствующее множество Z определяется, как

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \middle| \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}.$$

С другой стороны, если технология задана в терминах Z , то соответствующие $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ можно задать, беря (если это возможно) параметрическое представление Z , именно $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, и полагая

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), \dots, z_n(\mathbf{x})), \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (-z_{n+1}(\mathbf{x}), \dots, -z_{n+r}(\mathbf{x})).$$

Задача о производстве, сформулированная в терминах множества производственных возможностей, заключается в нахождении и характеристизации всех эффективных технологически возможных векторов производства. Один из случаев этой задачи будет исследован в следующем пункте.

Конкретный эффективный вектор производства можно получить, принимая во внимание рыночные цены, как это сделано в (8.4.1).

Классическая леонтьевская модель производства. Открытая леонтьевская модель производства отвечает в приведенной выше формулировке случаю $r = 1$ (труд) и

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x} \\ (-1, \mathbf{x}) \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\},$$

¹⁾ См. сноску на предыдущей стр. — Прим. ред.

где $A = \|a_{ik}\|$ есть матрица коэффициентов затрат и выпуска, а $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ представляет собой вектор трудовых коэффициентов. Здесь x_i можно интерпретировать непосредственно как произведенное количество i -го продукта, а a_{ik} измеряет количество i -го продукта, затрачиваемое на производство единицы k -го продукта. Последняя компонента Z , взятая с обратным знаком, оценивает количество труда, потребляемое для данного вектора выпуска.

8.5. Эффективные точки модели леонтьевского типа. Одно из основных ограничений описанной в предыдущем параграфе модели Леонтьева заключается в том, что с производством каждого продукта она связывает только один технологический процесс. В настоящем параграфе мы увидим, что даже если для производства каждого продукта можно использовать несколько процессов, тем не менее все „эффективные“ способы производства включают единственный производственный процесс для каждого способа, при условии, что объединенное производство не допускается и в распоряжении имеется только один первичный фактор. Это — известная теорема Самуэльсона о замещении. Проиллюстрируем это понятие на следующей модели.

Пусть имеется n отраслей, занятых производством n предметов потребления. Пусть a_{ij} — количество j -го продукта, производимое (или потребляемое) i -й отраслью, когда она функционирует с единичным уровнем интенсивности.

Предположим, что $a_{ij} \leq 0$, если $i \neq j$, но $a_{ii} > 0$. Отрицательные a_{ij} можно интерпретировать как количества материалов, расходуемые в производственных процессах. Мы видим, что в то время, как каждая отрасль может использовать все продукты, производит она только один продукт. (Именно это мы имеем в виду, говоря об отсутствии объединенного производства.)

Если мы примем общее количество имеющегося труда за единицу, то интенсивность i -й отрасли можно представить величиной $x_i \geq 0$, указывающей долю имеющегося труда, которая используется в этой отрасли. Чистый выпуск j -го продукта равен $\sum_i x_i a_{ij}$. Предположим, что i -я отрасль имеет в своем распоряжении допустимые альтернативные процессы $a_{ij}^{\lambda_i}$. Множество процессов, имеющих в i -й отрасли, обозначим через Λ_i ; здесь $\lambda_i \in \Lambda_i$. Тогда чистый выпуск продукта j , отвечающий выбору производственных процессов $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ для отраслей $1, \dots, n$, соответственно равен $\sum_i x_i a_{ij}^{\lambda_i}$.

Другая интерпретация этой модели состоит в том, что предприниматели варьируют число фабрик, занятых производством данного продукта.

Обозначим через S_k ($k = 1, \dots, n$) множество векторов-процессов, доступных k -й отрасли. Для фиксированного k множество S_k состоит из всех возможных процессов вида $\mathbf{a}_k^\lambda = (a_{k1}^\lambda, \dots, a_{kn}^\lambda)$. Наложим на все S_k требования выпуклости и компактности; при другой интерпретации это предположение вполне естественно, и его оправданность может быть подтверждена для многих реальных ситуаций. Под S будем понимать подмножество пространства E^n , представляющее собой выпуклую оболочку множеств $S_1, \dots, S_n$ (см. п. Б. 2).

Множество $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}^\lambda\}$ матриц, представляющих возможные процессы, состоит из матриц $\|a_{ij}^\lambda\|$ порядка n ; i -я строка такой матрицы есть элемент множества S_i .

Вектор $\mathbf{c} \in E^n$ называется *допустимым*, если $\mathbf{c} = \mathbf{x}\mathbf{A}$ для некоторого $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{x}$, для которого $x_i \geq 0$, $\sum_i x_i = 1$. (Векторы $\mathbf{x}$ такого вида будут называться *осуществимыми*.)

► Лемма 8.5.1. *Множество всех допустимых векторов совпадает с множеством S .*

Доказательство этого утверждения очевидно, поэтому мы его опускаем.

Допустимая точка $\mathbf{c} = \mathbf{x}^0 \mathbf{A}^{\lambda^0}$ называется *эффективной*, если не существует осуществимого вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{A}^\lambda \in \mathcal{A}$, для которых $\mathbf{x}^0 \mathbf{A}^{\lambda^0} \leq \mathbf{x} \mathbf{A}^\lambda$, причем по крайней мере для одной компоненты выполняется строгое неравенство.

Введенное здесь понятие эффективной точки совпадает с понятием эффективной точки в теории нелинейного программирования (см. п. 7.4).

Нашей ближайшей целью будет характеристика всех эффективных точек этой модели Леонтьева. Для этого понадобится следующая лемма.

► Лемма 8.5.2. *Пусть $\mathbf{p}_i$ — векторы, принадлежащие S_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Натянем на n точек $\mathbf{p}_i$ плоскость, т. е. множество точек вида $\sum_i y_i \mathbf{p}_i$, $\sum_i y_i = 1$. Если эта плоскость пересекается с внутренностью первого ортанта для $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, то пересечение плоскости и первого ортанта содержится в множестве $\Gamma = \{ \bar{\mathbf{p}} | \bar{\mathbf{p}} = \sum_i x_i \mathbf{p}_i, x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1 \}$.*

Доказательство. 1) Обозначим через $\mathbf{A}^\lambda$ матрицу процессов, построенную из векторов $\mathbf{p}_i$. Предположим, что $x_i \geq 0$, $\sum_i x_i = 1$

и $x_{i_0} = 0$ для некоторого i_0 . Тогда вектор $\mathbf{x}^\lambda$ будет содержать по крайней мере одну неположительную компоненту, именно i_0 , так как $a_{ii_0}^\lambda \leq 0$ для $i \neq i_0$. Итак, если $x_i \geq 0$, $\sum_i x_i = 1$ и $x_{i_0} = 0$, то вектор $\mathbf{x}^\lambda$ не принадлежит внутренности первого ортанта.

2) Множество всех тех $\mathbf{y}$, для которых $\sum_i y_i = 1$ и $\sum_i y_i \mathbf{p}_i > \mathbf{0}$, очевидно, выпукло. По предположению и в силу пункта 1), существует вектор $\mathbf{x}^0$, для которого $x_i^0 > 0$, $\sum_i x_i^0 = 1$ и $\sum_i x_i^0 \mathbf{p}_i > \mathbf{0}$.

Предположим, что существует такой $\mathbf{y}$, что $\sum_i y_i = 1$ и $\sum_i y_i \mathbf{p}_i > \mathbf{0}$, но $y_i < 0$ для некоторого i . Тогда можно найти такое λ ($0 < \lambda < 1$), что неотрицательный вектор $\lambda \mathbf{x}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{y}$ будет иметь хотя бы одну нулевую компоненту. Но из 1) следует, что $\lambda \mathbf{x}^0 + (1 - \lambda) \mathbf{y} > \mathbf{0}$, а это невозможно. Следовательно, $y_i \geq 0$ для всех i .

Условия леммы 8.5.2 не могут быть ослаблены. Плоскость должна пересекаться именно с внутренностью положительного ортанта; в противном случае заключение леммы может оказаться неверным. Читатель легко построит контр-примеры уже в E^3 , взяв, например,

$$\mathbf{p}_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right), \quad \mathbf{p}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right), \quad \mathbf{p}_3 = (0, 0, 1).$$

Теперь с помощью леммы 8.5.2 мы можем доказать основную теорему этого параграфа.

► **Теорема 8.5.1.** *Если внутри положительного ортанта существует допустимая точка, то все эффективные точки положительного ортанта лежат в некоторой гиперплоскости и каждая точка пересечения этой гиперплоскости с положительным ортантом эффективна.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}_0$ — допустимая точка со строго положительными координатами, и пусть l — луч, проходящий через начало координат и точку $\mathbf{p}_0$. Для каждого множества n точек $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ($\mathbf{p}_i \in S_l$), которое определяет допустимую точку, построим плоскость, натянутую на эти точки. Рассмотрим плоскость, пересекающую луч l в наиболее удаленной от начала точке положительного ортанта. Обозначим эту плоскость через P . Плоскость P и будет требуемой гиперплоскостью; ее пересечение P' с положительным ортантом дает множество эффективных точек в положительном ортанте.

Предположим, что это не так. Иначе говоря, пусть в положительном ортанте существует допустимая точка $\mathbf{g}$, доминирующая (в смысле неравенства $\geq$, где по крайней мере для одной компоненты имеет место знак $>$) некоторую точку $\mathbf{p} \in P'$. Но P пересекает

координатные оси в точках $(a_1, 0, \dots, 0)$, $(0, a_2, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, a_n)$; согласно лемме 8.5.2, все эти точки допустимы. Точка g принадлежит также плоскости G , натянутой на множество точек $g_1, \dots, g_n (g_i \in S_i)$, причем G пересекает координатные оси в точках $(b_1, 0, \dots, 0)$, $(0, b_2, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, b_n)$, которые в силу леммы допустимы. Так как g доминирует p , то по крайней мере одно из b_i должно быть больше соответствующего a_i . Пусть это будет b_1 . Точки $(b_1, 0, \dots, 0)$, $(0, a_2, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, a_n)$ допустимы; следовательно, их выпуклая оболочка есть некоторое подмножество множества S , лежащее в положительном ортанте. Точки этого подмножества доминируют точки множества P' ; в частности, это подмножество пересекает луч l в точке, более удаленной от начала координат, чем точка пересечения l с P' . Но это противоречит построению P' . Поэтому P' есть множество эффективных точек в положительном ортанте.

У этой теоремы есть три интересных следствия. Если имеется комбинация процессов и труда, дающая строго положительный избыток по каждому продукту, то

1) для каждой отрасли имеется один процесс, дающий неотрицательные эффективные точки. Каждая отрасль может не применять различных процессов, чтобы обеспечить неотрицательные эффективные точки, а может постоянно использовать один и тот же процесс;

2) множество неотрицательных эффективных точек частично не зависит от труда, так что существует много распределений труда, дающих неотрицательные эффективные точки;

3) цены не зависят от уровней спроса, так как вектор, нормальный к единственной эффективной гиперплоскости, определяет одну и ту же систему относительных цен для всех эффективных способов производства.

*Вычислительные методы для моделей Леонтьева и связь их с вполне смешанными играми*¹⁾. Теорема 8.5.1 показывает, что все эффективные точки положительного ортанта лежат в некоторой гиперплоскости; доказательство этой теоремы устанавливает также, что эта гиперплоскость конструируется с помощью некоторой матрицы процессов $A \in \mathcal{A}$. Так как предполагается, что эта гиперплоскость пересекается с внутренностью положительного ортанта, то для этой A существует вектор x^0 , для которого $x^0 A > 0$.

Далее, из построений теоремы вытекает, что достаточно найти матрицу A , для которой xA максимально вдоль любого конкретного луча, проведенного в положительном ортанте пространства E^n . Будем максимизировать его, например, вдоль луча, идущего под углом 45° ²⁾.

¹⁾ Заключительную часть этого пункта можно опустить при первом чтении, не нарушая непрерывности изложения.

²⁾ То есть вдоль „биссектрисы“ $x_1 = \dots = x_n$ положительного ортанта. — *Прим. перев.*

Очевидно, задача эквивалентна нахождению такой матрицы A , для которой достигается

$$\max_{A \in \mathcal{A}} v(A),$$

$$\text{где } v(A) = \max_x \min_j \sum_i x_i a_{ij}.$$

В величине $v(A)$ легко узнать значение игры с матрицей A . Матричные игры такого вида выше мы называли играми типа Минковского — Леонтьева (см. п. 2.5). Важное их свойство устанавливается в следующей лемме.

► **Лемма 8.5.3.** Если $A \in \mathcal{A}$ и существует вектор x^0 , для которого $x^0 A > 0$, то игра A является вполне смешанной.

Доказательство. Из соотношения $x^0 A > 0$ следует, что $v(A) > 0$. Если бы некоторая оптимальная стратегия x содержала нулевую компоненту, то итог для соответствующего столбца был бы отрицателен и, следовательно, был бы меньше v . Таким образом, все компоненты любой оптимальной стратегии игрока I строго положительны.

Из теоремы 2.4.1 следует, что ядром любой пары оптимальных стратегий должна быть матрица A и что оптимальная стратегия u должна быть единственной. Из соотношений размерности следует, что все компоненты u должны быть положительными.

Теорема 2.4.1 показывает также, что

$$v(A) = \frac{1}{(u, A^{-1}u)} = \frac{1}{\sum_{i,j} A_{ij}},$$

где $\|A_{ij}\| = A^{-1}$.

Пусть $\tilde{\mathcal{A}} = \{A | A \in \mathcal{A}, v(A) > 0\}$. Для характеристики эффективных точек достаточно найти матрицу $A \in \tilde{\mathcal{A}}$, для которой $v(A)$ максимально или, что равносильно, найти матрицу A , для которой достигается

$$\max_{A \in \mathcal{A}} \frac{1}{\sum_{i,j} A_{ij}}.$$

8.6*. Теория потребительского выбора. Общую теорию равновесия, описывающую отношение спроса и потребления к ценам, а также другим экономическим факторам, можно подразделить на две главные части: 1) теорию производства, охватывающую также теорию распределения ценностей (в том виде, как она включена, например, в понятие двойственной цены), и 2) теорию потребления, имеющую дело с интересами отдельных покупателей, отражаемыми системой их предпочтений на определенные продукты. В п. 8.3–8.5 мы

дали обзор математической теории производства. В этом пункте мы сосредоточим свое внимание на описании некоторых задач, возникающих в математической теории потребительского выбора. В п. 8.7 и 8.8 мы изучим модель глобального равновесия, сочетающую в себе одновременно факторы производства и потребления.

Теория потребительского выбора имеет дело, по существу, со следующим вопросом: рассматривается потребитель с ограниченным бюджетом и с определенным набором предпочтений по отношению к различным наборам товаров. Какие количества он приобретет при данных рыночных ценах на различные товары? Другой важный вопрос заключается в следующем. По каким правилам изменяются предпочтения потребителя — в зависимости от изменения рыночных цен или его собственных доходов?

Пусть имеется n потребительских товаров, и пусть их количества представлены n -мерным вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i означает потребляемое количество i -го товара. Взяв подходящий масштаб, мы можем предположить, что $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Предполагается, что для каждого потребителя имеется отношение предпочтения P между векторами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ либо $\mathbf{x}$ предпочитается $\mathbf{y}$ (записываем это, как $\mathbf{x}P\mathbf{y}$), либо $\mathbf{y}$ предпочитается $\mathbf{x}$ ($\mathbf{y}P\mathbf{x}$), либо ни один из этих векторов не предпочитается другому ($\overline{\mathbf{x}P\mathbf{y}}$ и $\overline{\mathbf{y}P\mathbf{x}}$, где $\overline{\mathbf{x}P\mathbf{y}}$ означает отрицание $\mathbf{x}P\mathbf{y}$). В последнем случае мы будем говорить, что $\mathbf{x}$ *безразличен* по отношению к $\mathbf{y}$, и писать $\mathbf{x}I\mathbf{y}$. Мы сейчас не требуем транзитивности для соотношения безразличия, хотя позже мы увидим, что если принять перечисленные ниже пять постулатов, то отношение I оказывается транзитивным и рефлексивным. Мы постулируем, что P обладает следующими свойствами:

- P1. Иррефлексивность: $\overline{\mathbf{x}P\mathbf{x}}$ для любого $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.
- P2. Транзитивность: из $\mathbf{x}P\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}P\mathbf{z}$ следует $\mathbf{x}P\mathbf{z}$.
- P3. Монотонность: из $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ следует $\mathbf{x}P\mathbf{y}$.
- P4. Выпуклость: из $\mathbf{x}P\mathbf{z}$ или $\mathbf{x}I\mathbf{z}$ и $\mathbf{y}I\mathbf{z}$, где $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, следует $[t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}]P\mathbf{z}$ для всех $0 < t < 1$.
- P5. Непрерывность: множества $P_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} | \mathbf{y}P\mathbf{x}\}$ и $Q_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} | \mathbf{x}P\mathbf{y}\}$ открыты при любом $\mathbf{x}$.

Если существует такая числовая функция $U(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$), что

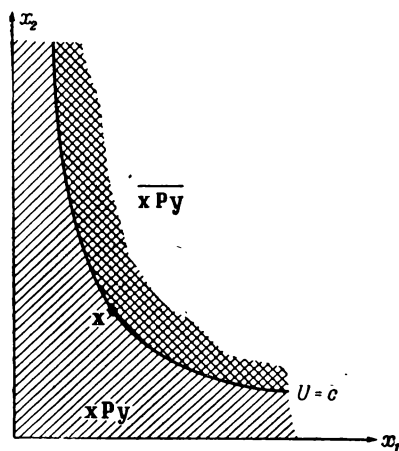
$$U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y}) \text{ тогда и только тогда, когда } \mathbf{x}P\mathbf{y} \quad (8.6.1)$$

(т. е. утверждения $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{y})$ и $\mathbf{x}P\mathbf{y}$ эквивалентны), то U называется *индексом полезности* для P . Если U — индекс полезности и $F(U)$ — монотонно-возрастающая функция, то $V = F(U)$ также является индексом полезности.

Для того чтобы требования монотонности и выпуклости выполнялись для функции индекса полезности U , необходимо и достаточно,

чтобы множество $\{x | U(x) \geq c\}$ при любой постоянной c было строго выпуклым (см. п. Б.4, свойство 1) и содержало вместе с любым x все векторы $y \geq x$. Постулат непрерывности выполняется, если только функция U непрерывна. Обратно, всякая вещественно-значная функция, обладающая этими свойствами, определяет соотношение предпочтения согласно (8.6.1). Очевидно, $x \mid y$ синонимично с $U(x) = U(y)$.

Соотношение предпочтения, индуцированное функцией индекса, изображено на рис. 14. Заштрихованная область состоит из всех y ,



Р и с. 14.

которым x предпочитается. Это множество открыто. Область, покрытая двойной штриховкой и включающая границу $\{y | U(y) \geq c\}$, состоит из всех y , которым x не предпочитается. Та же геометрическая иллюстрация приложима к общему отношению предпочтения P , удовлетворяющему постулатам P1 — P5.

Функция спроса для отношения предпочтения P . Мы будем предполагать, что потребитель ведет себя так, чтобы максимизировать свое предпочтение среди всех наборов товаров x , удовлетворяющих его бюджетному ограничению. Более точно, если рыночные цены составляют вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, а доход потребителя равен M , то он выбирает вектор x , для которого

$$x \geq 0, (p, x) \leq M, \quad (8.6.2)$$

где (p, x) оценивает общие издержки потребителя при данном векторе потребления, если рыночные цены описываются вектором p , и

$$xPy \text{ для всех } y \geq 0, (p, y) \leq M, \quad (8.6.3)$$

причем $p > 0$ и $M \geq 0$.

Из постулатов P1 — P5 легко вывести, что вектор x , удовлетворяющий условиям (8.6.2) и (8.6.3), всегда существует и однозначно определяется заданием p и M .

Единственность этого вектора непосредственно вытекает из свойств транзитивности и иррефлексивности. Так как установить его существование несколько более сложно, мы изложим здесь формальное доказательство.

Для любого x , удовлетворяющего неравенству $(p, x) \leq M$, рассмотрим множество

$$B_x = \{y | (p, y) \leq M, \overline{xPy}\}. \quad (8.6.4)$$

Покажем сначала, что множество $\Gamma = B_{x_1} \cap B_{x_2} \cap \dots \cap B_{x_n}$ при любом конечном наборе векторов x_i непусто. Для этого разобьем множество $x_1, x_2, \dots, x_n$ на два класса X^1 и X^2 , где некоторый элемент X^1 предпочитается каждому элементу X^2 и $\overline{x_i P x_j}$ для всех $x_i, x_j \in X^1$. В силу постулированных выше свойств иррефлексивности и транзитивности такое разбиение возможно, причем класс X^1 будет непустым. Для этого нужно лишь начать с x_1 и x_2 и сравнить их. Если один из них предпочитается другому, то доминируемый элемент направляется в X^2 . Затем оставшийся элемент сравнивается с x_3 и т. д.

Предположим теперь, что x_i пронумерованы так, что $x_1, \dots, x_k \in X^1$, а $x_{k+1}, \dots, x_n \in X^2$. Покажем, что $(x_1 + \dots + x_k)/k \in \Gamma$. В силу постулата P4

$$\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} P x_i \quad (i = 1, \dots, k);$$

по транзитивности и по определению X^2

$$\frac{x_1 + \dots + x_k}{k} P x_j \quad (j = 1, \dots, n).$$

Кроме того,

$$\overline{x_j P \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}},$$

так как в противном случае для вектора $(x_1 + \dots + x_k)/k$ нарушился бы постулат P1. Так как каждое множество B_{x_i} в силу P5 есть замкнутое подмножество компактного множества $T = \{y | (p, y) \leq M, p > 0\}$ и обладает свойством конечных пересечений, множество

$$\Delta = \bigcap_{x \in T} B_x$$

непусто. Пусть $x^0 \in \Delta$; тогда x^0 удовлетворяет бюджетному ограничению. Кроме того, $\overline{x^0 P y}$ для всех $y \neq x^0$. Если мы предположим противное, то будем иметь $\overline{x^0 P y^0}$ для некоторого $y^0 \in T$ и $\overline{y^0 P x^0}$ по построению Δ . Следовательно, $y^0 I x^0$. Но, кроме того, $x^0 I x^0$, и,

согласно Р4, мы имеем $[tx^0 + (1-t)y^0]Px^0$ для $0 < t < 1$, что противоречит выбору x^0 .

Мы можем написать

$$x^0 = f(p, M);$$

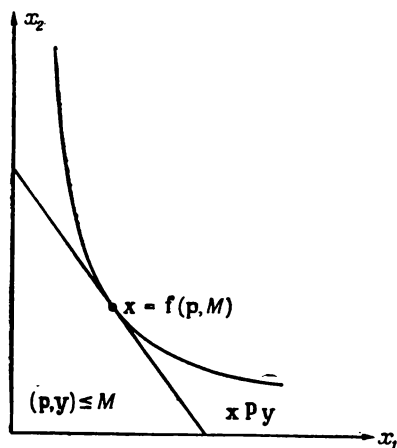
будем называть f *функцией спроса*, выведенной из отношения предпочтения Р.

Функцию спроса можно охарактеризовать также как вектор x^0 , удовлетворяющий условиям

$$x^0 \geq 0, (p, x^0) = M, x^0 P x \quad (8.6.5)$$

при всех тех x , для которых $(p, x) < M$, когда $p > 0$ и $M > 0$.

Доказательство. Если x^0 — функция спроса, отвечающая параметрам p и M , причем $(p, x^0) < M$, то мы можем увеличить все компоненты вектора x^0 , сохраняя неравенство $(p, x) \leq M$. Но тогда в силу Р3 нарушится свойство (8.6.3).



Р и с. 15.

Обратно, предположим, что x^0 удовлетворяет (8.6.5). Покажем, что в этом случае x^0 представляет собой функцию спроса, выведенную из отношения предпочтения и отвечающую значениям параметров p и M . Пусть величина спроса при p и M есть $y^0 \neq x^0$. Положим

$$Q_{x^0} = \{y | y P x^0\}.$$

Это множество открыто (в силу постулата Р5) и содержит y^0 . Следовательно, существует такое y , для которого $y P x^0$ и $(p, y) < M$, что невозможно из-за (8.6.5). Поэтому y^0 совпадает с x^0 , что и требовалось.

Для дальнейших рассуждений будет полезно изобразить положение функции $x = f(p, M)$; это сделано на рис. 15.

Если отношение предпочтения описывается индексом полезности U , то x^0 есть вектор, на котором $U(x)$ достигает максимума среди всех x , удовлетворяющих ограничению $(p, x) \leq M$.

С помощью (8.6.5) легко показать, что функция f непрерывна при $p > 0$ и $M > 0$. Вообще под функцией спроса $x = f(p, M)$ будет пониматься функция f , определенная для $p > 0$ и $M > 0$ и удовлетворяющая требованиям

D1. $f(p, M) \geq 0$, $(p, f(p, M)) = M$.

D2. f непрерывна при $p > 0$, $M > 0$.

В дальнейшем мы сделаем еще два предположения.

D3. Для любого $x \geq 0$ существуют такие $p > 0$ и $M \geq 0$, что $x = f(p, M)$.

D4. Функция $f(p, M)$ удовлетворяет условию Липшица по $M > 0$. Иначе говоря, для любого $M > 0$ существуют такие $K > 0$ и $\delta > 0$, что

$$|f(p, M_1) - f(p, M)| \leq K |M_1 - M|,$$

если только $|M_1 - M| < \delta$.

Если отношение P выведено для индекса полезности U (для которого $\{x | U(x) \geq c\}$ есть строго выпуклое множество, удовлетворяющее постулату P3) и U обладает надлежащими дифференциальными свойствами, то легко проверить выполнение свойств D3 и D4.

Аксиома выявленного предпочтения. С помощью данной функции спроса $x = f(p, M)$, удовлетворяющей условиям D1 — D4, мы определим теперь понятие выявленного предпочтения. Говорят, что вектор $x^0 = f(p^0, M^0)$ *выявлено предпочтается* вектору $x^1 = f(p^1, M^1)$, если

$$(p^0, x^0) \geq (p^0, x^1) \quad (x^0 \neq x^1).$$

Это отношение будет обозначаться как

$$x^0 R x^1;$$

иначе говоря, $x^0 R x^1$, если x^1 принадлежит удовлетворяющему бюджетным ограничениям множеству, по которому производится спрос на x^0 . Естественно, чтобы не противоречить смыслу функции спроса, вектор x^0 не может быть допустимым вектором потребления в условиях бюджетного ограничения, которому удовлетворяет x^1 .

Определим также отношения R^s и R^* следующим образом: $x R^s y$, если существуют векторы $x^1, x^2, \dots, x^{s-1}$, для которых $x R x^1, x^1 R x^2, \dots, x^{s-1} R y$; положим далее, $x R^* y$, если $x R^s y$ для некоторого целого s . Уже показано, что отношение R^s транзитивно, монотонно и непрерывно. Кроме того, если только $x = f(p, M)$ выведено из отношения предпочтения P , то отношение R^* иррефлексивно.

В самом деле, если xRy влечет xPy , то xR^*y влечет xPy в силу транзитивности P ; следовательно, иррефлексивность R^* является следствием иррефлексивности P .

Далее, если индуцированная функция спроса удовлетворяет условиям $D3$ и $D4$, то отношение R^* совпадает с P :

$$R^* = P.$$

Доказательство этого факта довольно сложно и поэтому будет здесь опущено (см. заключительные замечания к этой главе). Однако для случая $n = 2$ можно воспользоваться ориентацией единичного круга, и доказательство получается сравнительно легко (см. задачу 19).

Можно показать также, что если функция спроса $f(p, M)$ удовлетворяет условиям $D1 - D4$, и отношение R^* иррефлексивно, то R^* является отношением предпочтения, удовлетворяющим постулатам $P1 - P5$, а $f(p, M)$ есть функция спроса, выведенная из R^* .

Иррефлексивность R^* можно охарактеризовать следующим образом. Для любого целого s из соотношений

$$(p^0, x^0) \geq (p^0, x^1), (p^1, x^1) \geq (p^1, x^2), \dots, (p^{s-1}, x^{s-1}) \geq (p^{s-1}, x^s)$$

(где $x^i \neq x^j$ для некоторых i, j) следует

$$(p^s, x^0) > (p^s, x^s), \quad (8.6.6)$$

где

$$x^t = f(p^t, M^t), \quad t = 0, 1, \dots, s.$$

Эта характеристика обычно называется *сильной аксиомой выявленного предпочтения*. Родственное понятие, *слабая аксиома выявленного предпочтения*, формулируется следующим образом:

$$\text{из } (p^0, x^0) \geq (p^0, x^1) (x^0 \neq x^1) \text{ следует } (p^1, x^0) > (p^1, x^1). \quad (8.6.7)$$

Слабая аксиома, очевидно, следует из сильной. Нам еще предстоит случай применить понятие выявленного предпочтения в нашем дальнейшем рассмотрении устойчивости (см. п. 9.4).

Функция компенсированного дохода для вектора цен p . В качестве подспорья при исследовании свойств функции спроса $f(p, M)$, полученной из отношения предпочтения P , мы введем понятие компенсированного изменения дохода.

Пусть заданы $p^0 > 0$, $M^0 > 0$ и $x^0 = f(p^0, M^0)$. Определим компенсированный доход $M(p)$ для цены p , как

$$M(p) = \inf \{M \mid f(p, M) Px^0\}$$

или, что равносильно,

$$M(p) = \sup \{M \mid x^0 Pf(p, M)\}.$$

Рис. 16 поможет уяснению смысла $M(p)$. Для данного значения полезности, соответствующего полезности x^0 , компенсированный доход $M(p)$ можно интерпретировать как минимальный при данном векторе цен бюджет, с помощью которого можно приобрести товары, обладающие той же суммарной полезностью, что и x^0 .

Опираясь на геометрическое описание $M(p)$, указанное на рис. 16, легко показать, что $M(p)$ — вогнутая функция p , и поэтому она непрерывна при $p > 0$ и дифференцируема почти всюду.

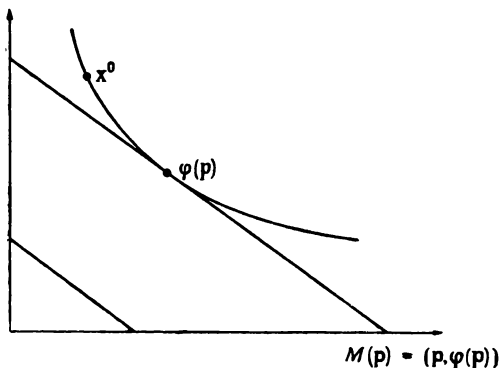


Рис. 16.

Для простоты изложения мы предположим, что $M(p)$ дифференцируема всюду. Мы можем также рассматривать $M(p)$ как опорную функцию некоторого выпуклого множества; в явном виде

$$M(p) = \min (p, x),$$

где минимум берется по всем x , для которых $\overline{x_0 p x}$. Функция $M(p)$, будучи минимумом линейных функций, вогнута. Положим

$$\varphi(p) = f(p, M(p)); \quad (8.6.8)$$

тогда

$$(p, \varphi(p)) = M(p) \quad (8.6.9)$$

и

$$M(p^0) = M^0, \quad x^0 = \varphi(p^0).$$

Согласно бюджетному ограничению $M(p)$, вектор $\varphi(p)$ является, очевидно, предпочтительным вектором потребления по сравнению со всеми векторами x , удовлетворяющими условию $(p, x) \leq M(p)$.

Из геометрических соображений (см. рис. 16) и из определения $\varphi(p)$ и $M(p)$ ясно, что функция $g(p) = \sum_i \tilde{p}_i \varphi_i(p)$, где вектор $\tilde{p} > 0$ служит параметром, достигает минимума по p в единственной точке

$\mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}}$. Следовательно, обычное необходимое условие минимума функции дает нам соотношение

$$\sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.6.10)$$

Из (8.6.10) мы имеем

$$\left(\frac{\partial M(\mathbf{p})}{\partial p} \right)_j = \varphi_j(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} = \varphi_j(\mathbf{p}). \quad (8.6.11)$$

Все эти преобразования выполняются с сохранением постоянства уровня полезности, равного полезности $\mathbf{x}^0$.

Мы будем называть величину

$$K_{ij}(\mathbf{p}^0) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} \right)_{\mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_j} \right)_{U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}^0)} \quad (8.6.12)$$

остаточной изменчивостью i -го товара по отношению к компенсированному изменению цены j -го товара. Другими словами, K_{ij} является мерой изменения желания потребить i -й товар при таком изменении цены j -го товара, которое сохраняет постоянный уровень полезности. Мысль, кроющаяся за изучением функции $K_{ij}(\mathbf{p}^0)$, заключается в следующем. Предположим, что мы пытаемся приписать смысл различию двух неравных векторов потребления $\mathbf{x}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{p}^0, M^0)$ и $\mathbf{x}^1 = \mathbf{f}(\mathbf{p}^1, M^1)$. Переход от $\mathbf{x}^0$ к $\mathbf{x}^1$ можно разложить на две составляющие: 1) изменение, вызванное изменением цен в $\mathbf{x}^0$, сохраняющим постоянный уровень полезности; 2) изменение при фиксированных ценах, являющееся результатом изменения объема бюджета. Величину $K_{ij}(\mathbf{p}^0)$ можно рассматривать как меру первого из названных изменений.

В силу (8.6.8) и (8.6.11) мы имеем

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k} = \frac{df_j}{dp_k} + \frac{\partial f_j}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial p_k} = \frac{\partial f_j}{\partial p_k} + \frac{\partial f_j}{\partial M} \varphi_k.$$

Вычисляя (8.6.12) при $\mathbf{p} = \mathbf{p}^0$, получаем

$$K_{jk}(\mathbf{p}^0) = \frac{\partial x_j^0}{\partial p_k} + \frac{\partial x_j^0}{\partial M} x_k^0,$$

где $\mathbf{x}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{p}^0, M^0)$. Таким образом, если $\mathbf{p}^0$ — единственная изменившаяся цена, то изменение спроса может быть записано как разность между членом $K_{ij}(\mathbf{p}^0)$ и членом, измеряющим действительную потерю в доходах, вызванную изменением цен.

► Теорема 8.6.1. K_{jk} удовлетворяет условиям

$$K_{jk} = K_{kj} \quad (j, k = 1, \dots, n), \quad (8.6.13)$$

$$\sum_{i, j=1}^n K_{ij} h_i h_j \leq 0 \quad (8.6.14)$$

для любого вещественного вектора $(h_1, \dots, h_n)$.

$$\sum_j p_j^0 K_{jk}(\mathbf{p}^0) = 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (8.6.15)$$

Доказательство. Равенство (8.6.13) легко выводится из (8.6.11). Именно

$$\begin{aligned} K_{jk}(\mathbf{p}^0) &= \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_k} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 M(\mathbf{p})}{\partial p_j \partial p_k} \right)_0 = \\ &= \left(\frac{\partial^2 M(\mathbf{p})}{\partial p_k \partial p_j} \right)_0 = \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_j} \right)_0 = K_{kj}(\mathbf{p}^0). \end{aligned} \quad (8.6.16)$$

Равенство (8.6.15) уже доказано в (8.6.10). Соотношение (8.6.14) следует из вогнутости $M(\mathbf{p})$, из (8.6.11) и (8.6.12) (см. п. Б. 4).

8.7. Нелинейные модели равновесия. Состояние экономической системы в условиях конкуренции в любой момент времени может быть выражено в виде решения системы неравенств, описывающих спрос потребителей на товары, предложение товаров производителями и условие равновесия, заключающееся в превышении предложения над спросом на любом рынке. При этом предполагается, что если предложение некоторого товара избыточно, то цена этого товара равна нулю. Изучение существования равновесных решений облегчит понимание сущности дескриптивной и нормативной экономической теории.

Если конкурентные экономические модели дают достаточно точное описание действительности, то уже сам по себе факт существования решений для этих моделей является подтверждением их потенциальной полезности. Не меньшую важность имеет отношение существования конкурентно равновесных решений к проблеме экономики благосостояния (см. п. 9.1).

Здесь и в следующем пункте мы рассмотрим ряд сходных между собой, но неперекрывающихся моделей, описывающих явления равновесия и обмена. Основным математическим инструментом, используемым при установлении существования решений каждой из этих моделей, является некоторая разновидность теоремы Какутани о неподвижной точке с небольшими дополнительными ухищрениями.

Линейные уравнения моделей Леонтьева в п. 8.1 и 8.3 можно интерпретировать как выражение равновесия обмена между различными отраслями. Для приведения модели в большее согласие с действительностью мы должны отказаться от предположения линейности,

т. е. от условия, что числа a_{ij} — постоянные, не зависящие от X_i . Исследование некоторых важнейших нелинейных моделей и будет предметом этого пункта.

Чтобы войти в курс дела, мы рассмотрим сначала следующую модель. Пусть имеется n производителей, причем каждый производитель P_i производит некоторый товар G_i . Пусть $f_{ij}(x)$ ($i \neq j$) обозначает количество денег, которое производитель P_i тратит на покупку товара G_j , если доход его равен x . Функции $f_{ij}(x)$ можно считать функциями спроса в смысле п. 8.6. Если каждый производитель тратит весь свой доход на покупку товаров у других производителей, то

$$x = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x) \quad (8.7.1)$$

для всех i и любых $x > 0$. Для удобства положим функции $f_{ii}(x)$ тождественно равными нулю. Экономические соображения подсказывают, что доход i -го производителя x_i определяется так, чтобы общее количество каждого товара, продаваемое производителем, равнялось общему количеству этого товара, купленному другими производителями. Математически мы хотим найти величины x_i , удовлетворяющие системе уравнений

$$x_j = \sum_{i=1}^n f_{ij}(x_i). \quad (8.7.2)$$

Эта задача является нелинейным аналогом замкнутой модели Леонтьева (см. теорему 8.3.1).

► Теорема 8.7.1. Если неотрицательные функции f_{ij} непрерывны и равенство (8.7.1) выполняется при всех $x \geq 0$, то существуют неотрицательные числа $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$, удовлетворяющие системе (8.7.2).

Доказательство. Пусть S — множество всех неотрицательных векторов y , для которых

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1.$$

Построим непрерывное отображение T множества S в себя и определим T так, чтобы j -я компонента вектора Ty была равна

$$(Ty)_j = \sum_{i=1}^n f_{ij}(y).$$

Из (8.7.1) следует, что $Tu \in S$ при любом $u \in S$. Отображение T непрерывно; следовательно, по теореме Брауэра о неподвижной точке (см. п. В.2 приложения) существует вектор $\bar{x} \in S$, для которого $T\bar{x} = \bar{x}$. Вектор $\bar{x}$, очевидно, является решением задачи.

Модель с переменными ценами. В рассмотренных до сих пор моделях все цены считались фиксированными, и для того, чтобы предложение было равно спросу, каждый производитель был вынужден управлять объемом своего выпуска. Теперь мы примем противоположную точку зрения и будем пытаться сбалансировать предложение и спрос, изменяя не объемы выпуска, а цены. В связи с этим мы зададимся вопросом: существует ли такой набор цен, при котором стоимость товаров, проданных каждым производителем, равна стоимости покупаемых им товаров?

Согласно классическому закону спроса и предложения, цена товара повышается, если спрос на товар превышает имеющееся предложение, и понижается, если предложение превосходит спрос. Поэтому экономическое равновесие может быть достигнуто лишь если цены таковы, что спрос и предложение на каждый товар равны, принимая во внимание переменность цен. Обозначим через a_i количество товара G_i , производимое производителем P_i в некоторый фиксированный промежуток времени, а через p_i — цену одной единицы товара G_i . Если каждый производитель продаст весь выпущенный им товар, то его доход будет равен $p_i a_i$. Пусть $D_{ij}(p_1, p_2, \dots, p_n) = x_{ij}$ представляет количество товара G_j , на которое предъявляет спрос производитель P_i . Функции D_{ij} по сути дела зависят от a_i (в том смысле, что цены p_i зависят от a_i). Предположение, что каждый производитель затрачивает весь свой доход, означает

$$p_i a_i = \sum_j p_j D_{ij}(\mathbf{p}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8.7.3)$$

(Мы положили $D_{ii} = 0$.)

Предположим, что соотношение (8.7.3) справедливо для любого вектора цен $\mathbf{p}$. Суммарный спрос на товары G_j равен $\sum_i D_{ij}(\mathbf{p})$, а суммарное их предложение есть a_j . Условие равновесия имеет вид

$$a_j - \sum_i D_{ij}(\mathbf{p}) = 0. \quad (8.7.4)$$

Задача заключается в следующем: существует ли для заданных a_i и функций спроса D_{ij} , удовлетворяющих соотношению (8.7.3), неотрицательное решение $\mathbf{p}$ системы (8.7.4)? К сожалению, такое решение существует не всегда. Можно представить себе, например, что один из производителей поставляет товар, не пользующийся

у остальных спросом; в этом случае левая часть равенств (8.7.4) становится положительной. Это соображение приводит нас к следующей теореме.

► Теорема 8.7.2. Если неотрицательные функции $D_{ij}(\mathbf{p})$ удовлетворяют условию (8.7.3) при любом положительном векторе $\mathbf{p}$ и $a_i > 0$ для всех i , то существует вектор $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$, для которого

$$a_j - \sum_i D_{ij}(\mathbf{p}^*) \geq 0; \quad (8.7.5)$$

если в соотношении j_0 знак равенства не имеет места, то $p_{j_0}^* = 0$.

(Эта теорема устанавливает, что всегда существуют цены, при которых предложение по меньшей мере равно спросу, и что нулевую цену имеют лишь перепроизводимые товары. Такая модификация закона спроса и предложения хорошо известна экономистам. В связи с этим см. также теорему 5.4.3.)

Доказательство. Вещественное число μ назовем *осуществимым*, если существует положительный вектор $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, для которого $\sum_i \mu p_i = 1$ и

$$\mu a_j \geq F_j(\mathbf{p}), \quad (8.7.6)$$

где

$$F_j(\mathbf{p}) = \sum_i D_{ij}(\mathbf{p}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Множество всех таких нормированных векторов $\mathbf{p}$ обозначим через S . Множество V всех осуществимых чисел μ , очевидно, непусто и ограничено снизу. Положим $\mu_0 = \inf_V \mu$; из непрерывности функций D_{ij} и компактности следует, что μ_0 также осуществимо. Так как число $\mu_0 - \epsilon$ осуществимым не является, то для любого вектора $\mathbf{p} \in S$ (S есть множество всех неотрицательных векторов с единичной суммой компонент) можно найти хотя бы один такой вектор $\mathbf{y} \in S$, что

$$((\mu_0 - \epsilon) \mathbf{a} - \mathbf{F}(\mathbf{p}), \mathbf{y}) \leq 0. \quad (8.7.7)$$

Множество $S(\mathbf{p})$ всех $\mathbf{y} \in S$, удовлетворяющих (8.7.7), непусто, замкнуто и выпукло. Множества $S(\mathbf{p})$ как функции $\mathbf{p}$ непрерывны в обычном смысле как точно-множественные отображения (см. п. В.2).

Так как условия теоремы Какутани о неподвижной точке выполнены, отсюда следует существование вектора $\mathbf{p}^0 \in S$, для которого

$$((\mu_0 - \epsilon) \mathbf{a} - \mathbf{F}(\mathbf{p}^0), \mathbf{p}^0) \leq 0. \quad (8.7.8)$$

Из последнего соотношения в сочетании с (8.7.3) следует, что $\mu_0 - \epsilon \leq 1$ и, следовательно, $\mu_0 \leq 1$. Если же мы помножим j -е соотношение из (8.7.6) на p_j и просуммируем, то из (8.7.3) будет вытекать, что $\mu \geq 1$ для любого осуществимого μ . Поэтому $\mu_0 \geq 1$ и, таким образом, $\mu_0 = 1$. Пусть $\mathbf{p}^*$ — вектор, отвечающий значению $\mu_0 = 1$. Тогда

$$a_j \geq \sum_{i=1}^n D_{ij}(\mathbf{p}^*), \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как $(\mathbf{a}_j, \mathbf{p}^*) - (\mathbf{F}(\mathbf{p}^*), \mathbf{p}^*) = 0$ в силу (8.7.3), то $p_j^* = 0$, если только

$$a_j > \sum_{i=1}^n D_{ij}(\mathbf{p}^*).$$

Модель с переменными ценами и объемами выпуска. В нашей следующей модели вместе с ценами меняются как типы, так и количества поставляемых товаров. Например, качество предлагаемых услуг будет зачастую зависеть от вознаграждения, полученного поставщиком услуг. Поэтому мы будем предполагать существование функций предложения $S_{ij}(\mathbf{p})$ ($i \neq j$), представляющих количества товаров G_j , предлагаемых производителем P_i при ценах $p_1, \dots, p_n$. Функции спроса $D_{ij}(\mathbf{p})$ определяются, как и прежде. Аналогом (8.7.3) служит уравнение

$$\sum_{j=1}^n p_j S_{ij}(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n p_j D_{ij}(\mathbf{p}). \quad (8.7.9)$$

($S_{ii}(\mathbf{p})$ снова положены тождественно равными нулю.) Закон спроса и предложения приводит к соотношению

$$\sum_i S_{ij}(\mathbf{p}) \geq \sum_i D_{ij}(\mathbf{p}). \quad (8.7.10)$$

Мы стремимся найти вектор цен $\mathbf{p}$, удовлетворяющий (8.7.10) и приписывающий нулевую цену любому товару, для которого предложение превышает спрос.

► Теорема 8.7.3. Пусть $S_{ij}(\mathbf{p})$ и $D_{ij}(\mathbf{p})$ — непрерывные неотрицательные функции, такие, что равенства (8.7.9) выполняются при всех $\mathbf{p}$ и $\sum_i S_{ij}(\mathbf{p}) > 0$ для всех j . Тогда существует неотрицательный вектор

$$\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_n^*), \quad \sum_i p_i^* = 1,$$

удовлетворяющий (8.7.10) и, кроме того, равенству

$$\sum_j p_j^* \sum_i [S_{ij}(p^*) - D_{ij}(p^*)] = 0.$$

Доказательство этой теоремы в точности следует доказательству теоремы 8.7.2 и поэтому здесь опускается.

*Общая теорема Вальда об уравнениях равновесия*¹⁾. Пусть

$$R_1, R_2, \dots, R_m$$

— производственные факторы, которые могут быть использованы в различных комбинациях для производства n различных товаров $S_1, S_2, \dots, S_n$. Точнее, для производства одной единицы товара S_j необходимо a_{ij} единиц фактора R_i . Пусть производитель имеет в своем распоряжении r_1 единиц фактора R_1 , r_2 единиц фактора $R_2, \dots, r_m$ единиц фактора R_m . Если при производстве s_j единиц товара S_j ($j=1, \dots, n$) цена единицы товара S_j равна $f_j(s_1, \dots, s_n)$, то уравнениями, связывающими неизвестные цены p_i единицы фактора R_i и неизвестные величины s_j , будут

$$r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (8.7.11)$$

и

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.7.12)$$

где $\sigma_j = f_j(s_1, \dots, s_n)$.

Эти уравнения в том виде, в каком они записаны, могут и не иметь экономически осмысленных решений. Поэтому было предложено заменить уравнения (8.7.11) на неравенства

$$r_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j, \quad (8.7.13)$$

условившись при этом, что в случае строгого неравенства соответствующая цена p_i равна нулю. Это согласуется с общим экономическим положением о том, что избыточные производственные факторы должны получать нулевую оценку (см. теоремы 8.7.2 и 8.7.3).

Уравнения (8.7.12), выражающие равенство издержек на производство товара и его цены, остаются без изменений. Общие функции стоимости f_j предполагаются непрерывными и неотрицательными. Кроме того, делаются следующие предположения:

¹⁾ Заключительная часть этого пункта носит более специальный характер и при первом чтении может быть пропущена без нарушения связности изложения.

(А) Если последовательности неотрицательных чисел $s_1^k, \dots, s_n^k$ сходятся соответственно к $s_1, \dots, s_n$, причем $s_j^k \neq 0$ для всех k , а $s_j = 0$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_j(s_1^k, \dots, s_n^k) = \infty, \quad j = 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots;$$

в других случаях функции f_j ограничены.

Это предположение довольно трудно обосновать с экономической точки зрения. Однако для последующих математических рассмотрений оно необходимо. Один из возможных доводов в его пользу можно высказать в терминах фиксированных издержек, связанных с производством¹⁾.

(Б) $r_i > 0$, $i = 1, \dots, m$.

(В) $a_{ij} \geq 0$ для всех i, j , причем для каждого j найдется хотя бы одно i , при котором $a_{ij} > 0$.

Благодаря условиям (Б) и (В) множество неотрицательных векторов $s = (s_1, \dots, s_n)$, удовлетворяющих условию (8.7.13), является непустым, выпуклым, компактным, ограниченным подмножеством n -мерного пространства. Обозначим это множество через S . Пусть s — внутренняя точка S ; обозначим через S_ϵ множество всех $s \in S$, представимых в виде $s = \epsilon s + (1 - \epsilon)s'$, где $s' \in S$ и $0 < \epsilon < 1$. Множество S_ϵ является внутренним подмножеством множества S ; если s' пробегает границу S , то при этом зачерчивается граница S_ϵ . Под проекцией P_ϵ множества S в S_ϵ мы будем понимать

$$P_\epsilon s = \epsilon s + (1 - \epsilon)s.$$

Нашей целью является установить существование неотрицательных решений $(p_1, \dots, p_m)$ и $(s_1, \dots, s_n)$ системы уравнений (8.7.12) и (8.7.13), удовлетворяющих дополнительному требованию

$$\sum_{i=1}^m p_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j \right) = 0.$$

Наши рассуждения основаны на использовании теоремы Какутани о неподвижной точке и теоремы двойственности линейного программирования. Для любого $s_0 \in S_\epsilon$ построим вектор

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (f_1(s_0), \dots, f_n(s_0)).$$

Рассмотрим следующие две задачи:

1. Максимизировать (σ, u) при условиях $Au \leq r$, $u \geq 0$.

¹⁾ Здесь имеется в виду, что при уменьшении размера партии затраты на производство единицы товара повышаются из-за наличия фиксированных производственных издержек, не зависящих от объема выпуска, т. е. при $s_j' > s_j''$ ($j = 1, \dots, n$) мы должны иметь $f_j(s_1', \dots, s_n') < f_j(s_1'', \dots, s_n'')$. Соотношение (А) получается путем своеобразного "предельного перехода". — Прим. перев.

II. Минимизировать $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ при условиях $\mathbf{p}\mathbf{A} \geq \sigma$, $\mathbf{p} \geq 0$.

Так как множество допустимых векторов $\mathbf{u}$ заполняет ограниченное, выпуклое, замкнутое множество S , лежащее в первом ортанте, решение задачи I существует. Обозначим множество всех этих решений через $\bar{T}(\mathbf{s}_0)$. Проекция $\mathbf{P}_e[\bar{T}(\mathbf{s}_0)] = T(\mathbf{s}_0)$ есть непустое замкнутое выпуклое множество. Фундаментальная теорема двойственности (теорема 5.4.1) утверждает, что существует решение $\mathbf{p}^0$ задачи II, обладающее тем свойством, что $(\mathbf{p}^0, \mathbf{r} - \mathbf{A}\mathbf{u}^0) = 0$ для любого $\mathbf{u}^0 \in \bar{T}(\mathbf{s}^0)$. Точечно-множественное отображение $\mathbf{s}_0 \rightarrow T(\mathbf{s}_0)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Какутани о неподвижной точке. Следовательно, существует $\mathbf{s}_e^* \in S_e$, для которого также $\mathbf{s}_e^* \in T(\mathbf{s}_e^*)$.

Обозначим через $\mathbf{s}^*$ предельную точку для $\mathbf{s}_e^*$ с максимальным числом нулевых компонент. Докажем сначала, что ни одна компонента вектора $\mathbf{s}^* = (s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$ не может быть нулем. Предположим, что $s_{i_0}^* = 0$ для индексов i_0 из некоторого множества I_0 ; тогда функции $f_j(\mathbf{s}_e^*)$ стремятся к ∞ при $\epsilon \rightarrow 0$ для всех $j \in I_0$, но остаются ограниченными по другим координатам. При достаточно малом ϵ вектор $\mathbf{s}_e^*$ будет близок к множеству векторов $\mathbf{u}$, максимизирующих $(\mathbf{f}, \mathbf{u})$ при условии $\mathbf{A}\mathbf{u} \leq \mathbf{r}$, где вектор $\mathbf{r}$ строго положителен. Отсюда, однако, следует, что некоторые компоненты вектора $\mathbf{s}_e^*$ с индексами из I_0 должны быть выбраны ограниченными от нуля; если бы было верно обратное и все компоненты вектора $\mathbf{s}_e^*$ с индексами $i \in I_0$ сходились к нулю, то мы могли бы получить большее значение $(\mathbf{f}(\mathbf{s}_e^*), \mathbf{u})$, выбрав такой вектор $\mathbf{u} \in S$, у которого все компоненты с номерами $i_0 \in I_0$ были бы строго больше некоторого фиксированного положительного ϵ_0 . Множество $T(\mathbf{s}_e^*)$ не могло бы содержать построенного нами $\mathbf{s}_e^*$. Следовательно, во избежание этих нелепостей каждая компонента вектора $\mathbf{s}^*$ должна быть строго ограниченной от нуля; поэтому соответствующие $f_j(\mathbf{s}^*)$ равномерно ограничены.

Так как соответствующие решения $\mathbf{p}_e^0$ задачи II при выборе σ , отвечающего $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_e^*$, минимизируют $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$, а каждое r_i строго положительно, то все $\mathbf{p}_e^0$ лежат в ограниченном подмножестве первого ортанта и, следовательно, при $\epsilon \rightarrow 0$ существует предельная точка $\mathbf{p}^0$. Векторы $\mathbf{s}^*$ и $\mathbf{p}^0$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$r_i \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}s_j^*, \quad i = 1, \dots, m, \quad (8.7.14)$$

$$\sigma_j \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}p_i^0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (8.7.15)$$

$$\sigma_j = f_j(s_1^*, \dots, s_n^*), \quad j = 1, \dots, n. \quad (8.7.16)$$

Рассмотрение с точки зрения линейного программирования показывает, что $\mathbf{s}^*$ есть решение задачи I, причем $\sigma_j = f_j(\mathbf{s}^*)$, а $\mathbf{p}^0$ есть решение задачи II. Так как все компоненты вектора $\mathbf{s}^*$ положительны, то в (8.7.15) должны стоять равенства (в силу теоремы 5.4.3). Согласно той же теореме, мы получаем

$$\sum_{i=1}^m p_i^0 \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} s_j^* \right) = 0. \quad (8.7.17)$$

Итоги предыдущих рассмотрений подводит следующая теорема.

► **Теорема 8.7.4.** Если r_i , a_{ij} и f_j удовлетворяют условиям (А), (Б) и (В), то существуют положительные векторы $\mathbf{s}^*$ и $\mathbf{p}^0$ (первый из которых строго положителен), удовлетворяющие соотношениям (8.7.14), (8.7.16) и (8.7.17), причем каждое неравенство системы (8.7.15) выполняется как равенство.

8.8*. Модель равновесия конкурентной экономики (Эрроу — Дебре). Предположим, что в нашем распоряжении имеется конечное число r различных товаров (включая услуги всех видов). Если один и тот же товар покупается и продается в m различных местах или в m различных моментов времени, то его можно рассматривать как m различных товаров.

Фирму или другое подобного рода производственное объединение, производящее товары, мы будем называть *производственной единицей*. Предположим, что у каждой производственной единицы j ($j = 1, 2, \dots, n$) имеется множество Y_j возможных производственных планов. Элементами $y_j \in Y_j$ являются векторы из E^r , h -я компонента которых y_{hj} обозначает выпуск товара h в этом плане. Как обычно, затраты изображаются отрицательными компонентами. Множество $Y = \sum_j Y_j$ представляет собой набор всевозможных графиков затрат и выпуска всего производственного сектора. Мы сделаем следующие предположения:

Иа. Y_j есть компактное подмножество пространства E^r , содержащее нулевой вектор $\mathbf{0}$.

Иб. Множество Y выпукло.

Предположение выпуклости отражает принцип невозрастающих маргинальных уровней трансформации¹⁾. Кроме того, мы предположим существование конечного числа потребляющих единиц (индивидуумов или коллективов).

Пусть X_i ($i = 1, \dots, m$) представляет собой множество векторов потребления из E^r , доступных потребителю i . Сделаем следующее предположение:

¹⁾ См. сноску на стр. 305. — *Прим. ред.*

II. X_i есть замкнутое выпуклое подмножество пространства E^r , обладающее тем свойством, что если $x_i^{(n)} \in X_i$ и некоторая компонента $x_{h_0}^{(n)}$ вектора $x_i^{(n)}$ стремится к бесконечности, то $x_{hi}^{(n)} \rightarrow \infty$ для всех $h = 1, 2, \dots, r$.

Предположим, что для i -го потребителя определен индекс полезности $U_i(x_i)$, для которого:

IIIа. $U_i(x_i)$ — непрерывно дифференцируемая функция на X_i ;

IIIб. если $U_i(x_i) \geq U_i(x'_i)$, где $x_i, x'_i \in X_i$ ($x_i \neq x'_i$) и $0 < t < 1$, то $U_i(tx_i + (1-t)x'_i) > U_i(x'_i)$;

IIIв. для любого $x_i \in X_i$ найдется такой вектор $x'_i \in X_i$, что $U_i(x'_i) > U_i(x_i)$.

Предположение IIIб обеспечивает строгую выпуклость множества $\{x | U_i(x) \geq c\}$ при любой постоянной c (см. п. Б. 4, свойство II). Функция U_i очевидно, индуцирует отношение предпочтения, как это описано в п. 8.6. Не будучи связан бюджетным ограничением, i -й потребитель будет производить свой выбор из X_i исключительно на основании своей шкалы предпочтения.

Предположение IIIв утверждает, что если мы отвлечемся от бюджетных соображений, то желания потребителей никогда не будут полностью удовлетворяться.

Пусть через ξ_i обозначен вектор товаров, которыми i -й потребитель располагает для начальной торговли. Мы предположим, далее, что

IV. Существует $x_i \in X_i$, для которого $\xi_i > x_i$.

Хотя предположение IV слишком сильно и не вполне реалистично, к сожалению, его нельзя полностью исключить из рассмотрения. Его можно несколько ослабить, но лишь дорогой ценой: наши рассуждения станут более утомительными, но не вознаградят нас новыми результатами. (По поводу обобщений см. замечания в конце этой главы.)

Наконец, мы предположим, что i -й потребитель имеет обусловленную договором претензию¹⁾ на долю α_{ij} прибыли j -го производителя, причем

V. $\alpha_{ij} \geq 0$ для всех i, j ,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = 1$$

для всех j .

Обозначим через $p = (p_1, \dots, p_r)$ вектор цен на товары. Так как для нас важны лишь относительные цены, мы можем, не умаляя общности, нормировать вектор p следующим образом:

$$p_v \geq 0, \quad \sum_{v=1}^r p_v = 1.$$

¹⁾ Можно подразумевать, например, держателей акций. — Прим. перев.

Определение конкурентного равновесия. Существование конкурентного равновесия эквивалентно существованию набора векторов

$$\{p^*; x_1^*, \dots, x_m^*; y_1^*, \dots, y_n^*\},$$

удовлетворяющего условиям

$$(A) \quad p^* \in P = \left\{ p \mid p \in E^r, p \geq 0, \sum_{v=1}^r p_v = 1 \right\};$$

(Б) для всех j

$$(p^*, y_j^*) = \max_{y_j \in Y_j} (p^*, y_j);$$

(В) при всех i вектор x_i^* максимизирует $U_i(x_i)$ на множестве

$$\left\{ x_i \mid x_i \in X_i, (p^*, x_i) \leq (p^*, \xi_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (p^*, y_j^*) \right\};$$

$$(Г) \quad x^* \leq y^* + \xi^*, \quad (p^*, x^* - y^* - \xi^*) = 0,$$

где

$$x^* = \sum_{i=1}^m x_i^*, \quad y^* = \sum_{j=1}^n y_j^*.$$

Условие (Б) утверждает, что производство таково, что максимизирует прибыли, когда в качестве цен взяты равновесные рыночные цены. Условие (В) гласит, что i -й потребитель стремится максимизировать полезность приобретенных им товаров по всем имеющимся векторам потребления, где вектор потребления считается допустимым, если он принадлежит множеству возможностей X_i потребителя i и если связанные с этим вектором издержки не превышают приносимого им дохода. Доход потребителя складывается из двух источников: во-первых, из дохода, связанного с его начальным капиталом, и, во-вторых, из дохода от его доли прибылей от производства в целом. Другими словами, условие (В) выражает бюджетное ограничение в условиях равновесия. Условие (Г) утверждает, что весь спрос удовлетворяется и, кроме того, любой товар, поставляемый сверх имеющегося спроса, получает нулевую цену.

Основная теорема формулируется следующим образом:

► **Теорема 8.8.1.** *Для любой системы, удовлетворяющей предположениям I—V, существует конкурентное равновесие.*

Доказательство этой теоремы является простым следствием следующего топологического результата, представляющего, впрочем, и некоторый самостоятельный интерес.

► Лемма 8.8.1. Пусть S — ограниченное¹⁾, полунепрерывное сверху точечно-множественное отображение, переводящее множество P в E^r и удовлетворяющее следующим условиям:

- а) $S(p)$ есть непустое выпуклое множество для всех $p \in P$;
- б) если $z \in S(p)$, то $(p, z) \geq 0$.

Тогда существуют такие $p \in P$ и $z \in S(p)$, что $z \geq 0$.

[Полунепрерывность сверху отображения $S(p)$ понимается в обычном смысле: если $z_n \in S(p_n)$ и $z_n \rightarrow z_0$, $p_n \rightarrow p_0$, то $z_0 \in S(p_0)$; см. также п. В. 2.]

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Это означает, что каждое множество $S(p)$ не касается неотрицательного ортанта. Мы утверждаем, что в этом случае существует такое положительное ϵ_0 , что семейство выпуклых множеств

$$T(p) = \{w \mid w = z + \epsilon_0 p, z \in S(p), p \in P\}$$

также не касается неотрицательного ортанта. В противном случае должна существовать последовательность $p_n \rightarrow \tilde{p}$ и $z_n \in S(p_n)$, $z_n \rightarrow z$, для которых $z_n + \epsilon_n p_n \geq 0$ при $\epsilon_n \rightarrow 0$. (В качестве z_n можно взять сходящуюся последовательность, так как все множества $S(p_n)$ компактны и поэтому лежат в ограниченной области пространства E^r .) Тогда из непрерывности отображения S следуют соотношения $z \in S(\tilde{p})$ и $z \geq 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, семейство $T(p)$ не пересекается с неотрицательным ортантом, как мы и утверждали.

Отметим далее, что каждую гиперплоскость, разделяющую положительный ортант и одно из множеств семейства $T(p)$, можно отождествить с вектором $q = (q_1, \dots, q_r)$, для которого

$$q_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r q_i = 1, \quad (q, w) \leq 0,$$

где $w \in T(p)$; и обратно, каждому такому вектору соответствует некоторая разделяющая гиперплоскость (см. лемму Б. 1.3).

Построим теперь точечно-множественное отображение следующим образом. Для каждого $p \in P$ рассмотрим множество $Q(p) \subset P$, состоящее из всех тех нормированных векторов из P , которые представляют гиперплоскости, разделяющие положительный ортант и множества $T(p)$. Так как $T(p)$ не касается положительного ортанта, множество $Q(p)$ непусто (лемма Б. 1.3).

Множества $Q(p)$, очевидно, являются выпуклыми и замкнутыми и описывают полунепрерывное сверху точечно-множественное ото-

¹⁾ Под ограниченностью отображения понимается ограниченность всех образов $S(p)$ как подмножеств евклидова пространства E^r . — Прим. перев.

бражение; нужная нам непрерывность $Q(\mathbf{p})$ легко следует из соответствующей непрерывности $T(\mathbf{p})$. По теореме Какутани (см. п. В. 2) существует точка $\mathbf{p}_0 \in Q(\mathbf{p}_0)$. Но, согласно условию б), для этой точки $\mathbf{p}_0$ мы будем иметь $(\mathbf{p}_0, \mathbf{z}) \geq 0$ при $\mathbf{z} \in S(\mathbf{p}_0)$ и, следовательно, $(\mathbf{p}_0, \mathbf{w}) > 0$ для $\mathbf{w} \in T(\mathbf{p}_0)$. Это заключение несовместимо со смыслом $\mathbf{p}_0$ в $Q(\mathbf{p}_0)$. Следовательно, наше исходное предположение было неверно, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 8.8.1. Для любого $\mathbf{p} \in P$ построим отображение $S(\mathbf{p})$, удовлетворяющее условиям леммы 8.8.1, следующим образом. Во-первых, определим $Y_j(\mathbf{p})$ как множество всех векторов из Y_j , максимизирующих $(\mathbf{p}, \mathbf{y}_j)$. Пусть $Y(\mathbf{p}) = \sum_j Y_j(\mathbf{p})$ и

$$\beta_j(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{y}_j \in Y_j} (\mathbf{p}, \mathbf{y}_j).$$

Легко проверить, что $Y(\mathbf{p})$ — непустое замкнутое выпуклое множество, определяющее ограниченное полунепрерывное сверху точечно-множественное отображение. Пусть, далее, $X_i(\mathbf{p})$ обозначает множество всех $\mathbf{x}_i \in X_i$, максимизирующих $U_i(\mathbf{x}_i)$ при условии

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}_i) \leq (\mathbf{p}, \xi_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_j(\mathbf{p}). \quad (8.8.1)$$

Важное замечание, которым мы еще воспользуемся в дальнейшем, заключается в том, что для $\mathbf{x}_i \in X_i(\mathbf{p})$ в (8.8.1) должно иметь место равенство. Предположим противное. Тогда в силу предположения IIIв существует $\mathbf{x}'_i \in X_i$, для которого $U_i(\mathbf{x}'_i) > U_i(\mathbf{x}_i)$, а по предположениям IIIа и IIIб мы можем найти такой $\tilde{\mathbf{x}}_i = t\mathbf{x}_i + (1-t)\mathbf{x}'_i$ (при подходящем выборе t , $0 < t < 1$), что $U_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) > U_i(\mathbf{x}_i)$, причем вектор $\tilde{\mathbf{x}}_i$ все еще удовлетворяет ограничениям (8.8.1). Но это противоречит смыслу $\mathbf{x}_i$ в $X_i(\mathbf{p})$. Таким образом, для всех таких $\mathbf{x}_i$ в (8.8.1) имеет место знак равенства.

Из того факта, что $\beta_j(\mathbf{p}) \geq 0$ (напомним, что $\mathbf{0} \in Y_j$ согласно предположению Ia), и из предположений I, II, III и IV легко видеть, что каждое $X_i(\mathbf{p})$ есть непустое выпуклое замкнутое и ограниченное множество. Определим множество

$$X(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m X_i(\mathbf{p}),$$

которое также будет непустым, выпуклым, замкнутым и ограниченным. На основании предположений III и IV, как и выше, легко показывается, что $X(\mathbf{p})$ задает полунепрерывное сверху точечно-

множественное отображение. Построим, наконец, отображение

$$S(p) = \{z \mid z = y - x + \xi, y \in Y(p), x \in X(p)\},$$

где

$$\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i.$$

Покажем теперь, что $S(p)$ представляет собой ограниченное, полунепрерывное сверху отображение из P в E^r , удовлетворяющее следующим двум условиям: а) множества $S(p)$ непусты, выпуклы и замкнуты и б) $(p, z) = 0$ для всех $z \in S(p)$.

Справедливость утверждения а) мы уже отмечали. Для проверки б) заметим, что $y_j \in Y_j(p)$ и $x_i \in X_i(p)$ удовлетворяют соотношению (8.8.1) как равенству, т. е.

$$(p, x_i) = (p, \xi_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_j(p) = (p, \xi_i) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (p, y_j),$$

$$x = \sum_{i=1}^m x_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j.$$

Суммируя по i , заключаем на основании предположения V, что

$$(p, x) = (p, \xi) + (p, y),$$

а это совпадает с утверждением б).

Приготовления к использованию леммы 8.8.1 закончены. Мы выводим из нее существование таких p^* и $z^* = y^* - x^* + \xi$, что $z^* \in S(p^*)$ и $z^* \geq 0$. Система векторов

$$\{p^*; x_1^*, \dots, x_m^*; y_1^*, \dots, y_n^*\}$$

образует конкурентное равновесие, где

$$x^* = \sum_{i=1}^m x_i^*, \quad y^* = \sum_{j=1}^n y_j^*.$$

Условия (А), (Б) и (В) (см. стр. 330) выполняются в силу определения векторов x_i^* и y_j^* , а также того факта, что $z^* \in S(p^*)$. Условие (Г) следует из того, что $z^* \geq 0$, и из указанного выше соотношения б). Это завершает доказательство теоремы.

8.9. Задачи.

Задачи 1—6 отражают некоторые простые формулировки макроэкономических отношений.

1. Пусть предложение $S(t)$ и спрос $D(t)$ на товар связаны с его ценой $p(t)$ соотношениями

$$S(t) = \alpha + a \left(p(t) + \frac{dp(t)}{dt} \right), \quad D(t) = \beta + bp(t),$$

где α, a, β, b — постоянные. Предположим, что в каждый момент времени цена назначается так, чтобы $S(t) = D(t)$. Выяснить поведение функции $p(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

2. Пусть Q_t обозначает наличный запас к концу периода t . Пусть предложение $S(t)$ и спрос $D(t)$ являются заданными функциями цены в момент t , имеющими вид

$$S(t) = \alpha + aP(t), \quad D(t) = \beta + bP(t).$$

Рассмотреть модель, в которой цена изменяется в зависимости от изменений запаса по закону

$$P(t) = P(t-1) - \lambda(Q_{t-1} - Q_{t-2}), \quad t \geq 2. \quad (*)$$

Показать, что $P(t) = \bar{P} + [P(0) - \bar{P}]C^t$, где

$$\bar{P} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}, \quad C = 1 - \lambda(b - a).$$

3. Рассмотреть описанную в задаче 2 модель, предполагая время непрерывным. Закон (*) примет вид

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda \frac{dQ}{dt},$$

где

$$Q(t) = Q(0) + \int_0^t [S(\tau) - D(\tau)] d\tau,$$

$$S(t) = \alpha + aP(t), \quad D(t) = \beta + bP(t).$$

Определить $P(t)$ в явном виде.

4. Одно из известных макроэкономических соотношений можно сформулировать следующим образом: национальный доход = потребление + инвестиции (накопления) + автономные инвестиции, или

$$Y(t) = C(t) + I(t) + A(t).$$

Рассмотреть это соотношение во времени t , если

$$C(t) = cY(t), \quad 0 < c < 1$$

(величина $1/(1-c)$ называется *мультипликатором*),

$$I(t) = v \frac{dY}{dt}$$

(величина $v > 0$ называется *акселератором*)

и

$$A(t) = A_0 e^{rt}.$$

Определить $Y(t)$ для всех t и интерпретировать решение.

5. Пусть в условиях описанной в задаче 4 макроэкономической модели

$$C(t) = \gamma Y(t) + c_1 \frac{dY(t)}{dt} + c_2 \frac{d^2 Y(t)}{dt^2},$$

$$I(t) = v \frac{dY(t)}{dt}, \quad A(t) = 0.$$

Определить вид $Y(t)$ при всех t и интерпретировать решение.

6. Рассмотреть описанную в задаче 4 модель, считая время дискретным. Пусть при всех t

$$C(t) = c_1 Y_{t-1} + c_2 Y_{t-2}, \quad I(t) = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}),$$

$$A(t) = A = \text{const.}$$

Определить $Y(t)$ для всех t .

7. Задача о простой монополии может быть поставлена следующим образом. Пусть производство набора товаров $\mathbf{x}$ обходится в $\varphi(\mathbf{x})$, а при предложении $\mathbf{x}$ на рынке вектор цен за единицу каждого из товаров равен $\mathbf{p} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$. Следовательно, чистая прибыль составляет

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}). \quad (**)$$

Найти соотношение, которому должен удовлетворять вектор $\mathbf{x}$, максимизирующий (**).

8. Пусть $\mathbf{C}$ — вещественная или комплексная $n \times n$ -матрица, для которой

$$S_j = \sum_{i=1}^n |C_{ij}| \leq 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Доказать, что

$$\prod_{j=1}^n (1 - \sum_{i=1}^n |C_{ij}|) \leq \det(\mathbf{I} - \mathbf{C}).$$

9. Пусть $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ — $n \times n$ -матрица, для которой

$$2 \det \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| > \sum_{j < k} \left| \det \begin{pmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{pmatrix} \right|$$

и

$$2|a_{ii}| > \sum_j |a_{ij}|, \quad i = 3, 4, \dots, n.$$

Доказать, что $\det \mathbf{A} \neq 0$.

10. Используя следствие 8.2.1, показать, что для строго положительной $n \times n$ -матрицы $\mathbf{A}$, имеющей более одного вещественного характеристического корня, все максимальные характеристические числа главных миноров $\mathbf{A}$, имеющих порядок $n - 1$, заключены между двумя наибольшими вещественными характеристическими числами матрицы $\mathbf{A}$.

11. Показать, что положительное число λ является верхней границей модулей характеристических чисел матрицы $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ в том и только в том случае, когда все главные миноры определителя $\mathbf{B}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})|_1^n$, т. е.

$$b_{11}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \dots, \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

положительны.

12. Рассмотрим матрицу $\mathbf{A} > \mathbf{0}$, имеющую более одного вещественного характеристического корня. Показать, что существует хотя бы один главный минор матрицы $\mathbf{A}$, имеющий порядок $n-2$, у которого максимальный характеристический корень лежит между двумя наибольшими характеристическими числами матрицы $\mathbf{A}$. (Указание: воспользоваться следствием 8.2.1.)

13. Пусть все алгебраические дополнения элементов некоторой строки (или столбца) определителя матрицы $\mathbf{B}(\lambda) = \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ ($\mathbf{A} > \mathbf{0}$, $\lambda > 0$) неотрицательны, но не все они равны нулю. Доказать, что из $\det \mathbf{B}(\lambda) > 0$ следует $\lambda > \lambda_0(\mathbf{A})$.

14. Пусть $\mathbf{A}$ — положительная матрица, и пусть все алгебраические дополнения B_{ik} определителя $\mathbf{B}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})|_1^n$ положительны.

Показать, что из неравенств

$$0 < \tilde{a}_{ij} < a_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

следуют неравенства

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})|_1^k \geq \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})|_1^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

В каком случае имеет место знак равенства?

15. Пусть $\mathbf{B} = \|b_{ij}\| - r \times r$ -матрица, в которой $b_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$. Пусть существует такой вектор $\mathbf{z}$, что $\mathbf{z} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{Bz} > \mathbf{0}$. Показать, что матрица $\mathbf{B}$ устойчива. (Матрица называется устойчивой, если все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части.)

16. Продукт y производится посредством использования двух факторов x_1 и x_2 в соответствии с билинейной однородной функцией производства $y = kx_1x_2$, где k — постоянная. Задавшись ценами факторов p_1 и p_2 , найти оптимальное использование факторов, дающее минимальные издержки на производство продукта y . Показать, что при этом оптимуме будет $x_1 = c_1y$, $x_2 = c_2y$.

17. Доказать, что для любой матрицы C существуют такие неотрицательные векторы x и y , что

$$\begin{aligned} xC &\geq 0, & Cy &\leq 0; \\ x - Cy &> 0, & y + xC &> 0. \end{aligned}$$

18. Используя модель Эрроу — Дебре и предполагая, что технология подчинена требованию постоянства результата (т. е. каждое Y_j представляет собой замкнутый выпуклый конус), показать, что в состоянии равновесия прибыль каждой фирмы равна нулю и, следовательно, что состояние равновесия определяется безотносительно к величинам α_{ij} (см. стр. 329).

19. а) Доказать, что при $n = 2$ сильная аксиома выявленного предпочтения вытекает из слабой аксиомы.

б) Доказать, что если вектор-функция спроса $f(p, M)$ удовлетворяет слабой аксиоме выявленного предпочтения, то f — положительно однородная функция нулевого порядка, т. е.

$$f(\lambda p, \lambda M) = f(p, M) \quad \text{при любом } \lambda > 0.$$

Комментарии и библиография к главе 8

Принято считать, что математические методы начали играть существенную роль в экономической науке после выхода в 1838 г. книги Курно „Исследования о математических принципах теории богатства“ (Cournot A. A., *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*), хотя некоторые экономисты (Чева, фон Тюнен) разрабатывали эти вопросы и до Курно. В 70-х годах прошлого века У. Стэнли Джевонс, Леон Вальрас и Карл Менгер создали субъективную теорию стоимости, которая отличает современную экономику от классической. Из названных трех ученых наиболее выдающимся был Вальрас, на которого большое влияние оказал Курно. Вальрас своей теорией общего равновесия сделал для экономики примерно то же, что Ньютон сделал для физики¹⁾. Среди экономистов, которых можно отнести к созданной Вальрасом лозаннской школе, мы назовем Парето, Бароне, Панталеони, Шумпетера, Леонтьева и Хикса. Что касается Менгера, то ему недоставало соответствующего математического аппарата; однако его маргинальная теория стоимости и многое другое из работ австрийской школы, одним из основателей которой он является, оказали решающее влияние на современную математическую экономику.

В Англии в книге Р. Эджворта „Математическая физика“ (Edgeworth F. Y., *Mathematical physics*, 1881) было предложено детальное объяснение процесса обмена. Несколькими годами позже Альфред Маршалл создал кембриджскую школу экономического анализа, основанную на гармоничном равновесии интуитивного знания и научной точности; впоследствии выдающимися представителями этой школы были Альфонс Пигу, Джон Мейнард Кейнс и Д. Х. Робертсон. Не будет преувеличением сказать, что истоки подавляющего большинства современных экономических исследований лежат в конеч-

¹⁾ Необходимо иметь в виду, что речь идет о тех или иных математических моделях экономики. — *Прим. ред.*

ном счете в фундаментальных работах лозаннской, австрийской и кембриджской школ.

Двумя основными источниками современного развития математико-экономической теории явились книги Дж. Р. Хикса „Стоимость и капитал“ [1] и П. А. Самуэльсона „Основания экономического анализа“ [1]. Последняя была написана в 1937 г. как диссертация при Гарвардском университете и лишь позднее опубликована в виде отдельной книги.

Два очень полезных учебника, охватывающих множество вопросов математической экономики, написаны Алленом [1] и Дорфманом, Самуэльсоном и Солоу [1].

Предмет математической экономики распадается на две основные части — макроэкономическую теорию и микроэкономическую теорию. Первая занимается в основном соотношениями между экономическими переменными, агрегированными для системы в целом, вторая — соотношениями между индивидуальными экономическими переменными (в основном размерами потребления, объемами производства и рыночными ценами наборов товаров).

Математическую экономику можно подразделить также на статическую и динамическую теорию. Статическая задача — это такая задача, в которую время явным образом не входит; динамическая задача содержит в качестве одной из переменных время. Разумеется, даже если мы имеем дело с динамической задачей, решение может оказаться не зависящим от времени. В этом случае перед нами явление стационарности. Часто (но не всегда) статические ситуации можно интерпретировать как стационарные состояния динамических систем.

Исследования в области микроэкономической теории сосредоточивались в основном вокруг статических задач, в то время как большинство исследований по макроэкономической теории было связано с динамическими задачами. Типичным приемом макроэкономической теории является построение моделей различных укрупненных категорий (потребления, инвестиций, национального дохода) как функций времени и последующий анализ сходимости или колеблемости, скажем, функции дохода во времени.

Здесь мы совершенно не затрагивали широко развитую статистическую точку зрения эконометрики. С этой точки зрения задача статистики заключается в оценке параметров, лежащих в основе динамической модели, методами, охватывающими модификации регрессионного анализа. Эконометрические проблемы изучали Я. Хаавельмо, Т. Купманс, А. Вальд, Т. У. Андерсон, Г. Рубин, Л. Гурвиц, Дж. Маршак, Н. Шульц, Я. Тинберген и Г. Вольд. Основным учебником эконометрики является книга Л. Клейна [1].

8.1. Первая линейная модель равновесия и обмена была предложена Вальрасом, разработавшим систему уравнений для описания простого явления равновесия. Однако он не занимался чисто математическими вопросами существования и единственности решений этих уравнений. С помощью теории положительных матриц этот пробел был в достаточной мере восполнен многими работавшими в этой области исследователями.

Примерно до 1948 года изучение моделей равновесия ограничивалось в основном линейным случаем.

Приведенные в этом пункте модели следуют формулировкам открытых и замкнутых систем, принадлежащим Леонтьеву [1] (см. также Моргенштерн [1]).

8.2. Теория матриц с положительными элементами ведет свое начало от работы Фробениуса [1]. С 1908 года были указаны бесчисленные приложения и обобщения результатов Фробениуса. Эти обобщения проводились по двум основным направлениям: 1) замена свойства положительности элементов требованием, чтобы матрица A оставляла инвариантным некоторый

конус, и 2) изучение бесконечномерных аналогов теорем Фробениуса, включающих положительные ядра. Внушительное собрание этих обобщений можно найти в книге Гантмахера и Крейна [1], в которой, кроме того, развиты многие более тонкие вопросы теории положительных матриц. Абстрактные рассуждения этого вопроса даны в статьях Крейна и Рутмана [1] и Карлина [6]. К сожалению, экономисты до сих пор продолжают переоткрывать многие из этих результатов, приписывая им при этом совершенно неправильные авторства.

Непосредственные интерпретации теории положительных матриц применительно к экономической теории, а также различные изложения свойств положительных матриц и M -матриц были даны Метцлером [1], Мозаком [1], Дебре и Херштейном [1], Солоу [1], Хокинсом и Саймоном [1] и многими другими авторами.

Простые доказательства, содержащиеся в этом пункте, представляют собой непосредственные перефразировки абстрактных рассуждений Крейна и Рутмана [1] и Карлина [6]. Данная в следствии 8.2.1 характеристика наибольшего собственного числа, по-видимому, является новой; как показывают многие последующие рассуждения, она оказывается весьма полезной. Изящное рассуждение, использованное при доказательстве утверждения г) теоремы 8.2.3, также ново и принадлежит Боненбласту (личное сообщение).

Результаты, родственные теореме 8.2.4, можно найти в статье Котелянского [1].

Разбиение матрицы на периодическую и непериодическую компоненты рассматривается в книге Феллера [1], гл. 13 и 15.

Тот факт, что результаты, справедливые для M -матриц, могут быть перенесены на положительные матрицы и обратно, хорошо известен. Утверждение, включающее в себя (8.2.4), известно экономистам под названием критерия Хокинса — Саймона [1] (см. также Котелянский [1]).

8.3. Результаты, родственные изложенным в этом пункте, приведены в сборнике под редакцией Моргенштерна [1].

8.4. Современное развитие теории производства приписывается Вальрасу и Маршаллу. Самуэльсон посвящает теории производства главу IV своих „Оснований экономического анализа“ [1]; см. также книги Хикса [1] и Дорфмана [1].

В настоящее время теория производства формулируется в терминах моделей анализа производственных процессов с использованием теорем линейного и нелинейного программирования. В качестве общих источников по анализу производственных процессов мы назовем сборники под редакцией Купманса [1] и Моргенштерна [1]. В основе более тонкого математического исследования теории производства лежит статья Куна и Таккера по нелинейному программированию [1].

От теории производства неотделима теория распределения благ (перераспределенные цены). Информацию о распределении благ мы получаем, решая двойственную задачу для соответствующей задачи программирования и интерпретируя соответствующим образом понятие двойственной цены (см. Удава [1]).

8.5. Теорема 8.5.1 была указана Самуэльсоном. Купманс [2] доказал ее для случая трех товаров; справедливость общего результата была установлена Эрроу [1]. Другое доказательство было разработано Гейлом [2]. Приводимое здесь доказательство является новым.

8.6. Современная теория потребления ведет свое начало от работ Вальраса и Джевонса. Слуцкий [1] и впоследствии Хикс [1] значительно развили эту теорию. Исследование Слуцкого опирается на существование

функции полезности, используемой при выводе соотношений Слуцкого, которым удовлетворяют функции спроса (см. теорему 8.6.1). Мак-Кензи [1] вывел те же заключения, не используя функцию полезности. Наше доказательство является видоизменением доказательства Мак-Кензи. Понятие слабого принципа выявленного предпочтения было введено Самуэльсоном [2]; он показал также, что справедливость этого принципа вытекает из существования функции спроса, индуцированной функцией полезности.

Хаутэккер [1] показал, что сильная аксиома выявленного предпочтения эквивалентна существованию функции полезности.

Аксиоматический подход к исследованию отношений предпочтения был развит в работе Удзава [1]. Он установил взаимно-однозначное соответствие между отношением предпочтения, индуцированным сильной аксиомой выявленного предпочтения, и общим отношением предпочтения, удовлетворяющим постулатам P1 — P5. Наше рассмотрение в этом пункте близко к тому, которое дал в своей статье Удзава¹⁾.

8.7. Основные современные продвижения в исследовании моделей равновесия связаны с именами Вальраса, Вальда, Мак-Кензи, Эрроу и Дебре. Вальрасу [1] принадлежит первое подробное описание явления равновесия (см. комментарии к п. 8.1). Впоследствии Вальд [8] провел подробное математическое исследование уравнений Вальраса и установил существование и единственность решения этих уравнений при целом ряде условий. Наконец, Эрроу и Дебре [1] и Мак-Кензи независимо сформулировали общие модели равновесия и доказали существование конкурентного равновесия. Ни одна из этих трех моделей (Вальраса — Вальда, Мак-Кензи и Эрроу — Дебре) не содержит ни одну из других как частный случай; скорее, все три модели следует считать различными вариантами описания равновесия в экономике с конкуренцией. Другие исследования этих же моделей и других вариантов равновесия независимо проводили Гейл, Мак-Кензи и Удзава.

Утверждения теорем 8.7.1—8.7.3 были обнаружены Гейлом [1]. Приводимые здесь доказательства кажутся нам более непосредственными.

Наш анализ уравнений Вальда, сочетающий теорему Какутани и теорему двойственности линейного программирования, следует статье Куна [4].

8.8. Приводимая здесь модель, не считая некоторых небольших изменений, принадлежит Эрроу и Дебре. Доказательства в этом пункте, по-видимому, являются новыми и более простыми, чем первоначальные доказательства, хотя необходимо отметить, что формулировка Эрроу — Дебре является несколько более общей и, несомненно, более реалистичной.

Лемма 8.8.1 была установлена Гейлом [1], использовавшим при ее доказательстве теорему Кнастера — Марцинкевича о неподвижной точке. Непосредственное применение теоремы Какутани позволяет существенно упростить доказательство.

¹⁾ В связи с результатами этого пункта см. работы Африата [1], Санса [1], Хаутэккера [4], Чипмэна [1], Шёнфельда [1]. — *Прим. ред.*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ИЗУЧЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

В этой главе мы изучим вопросы экономики благосостояния, устойчивости равновесных систем векторов цен и теории сбалансированного роста.

Модели равновесия по существу являются дескриптивными, а не нормативными; их роль заключается попросту в описании (по возможности, наиболее точном) взаимодействий между спросом, предложением и ценами в экономике с конкуренцией. Напротив, теория экономики благосостояния является, по существу, нормативной; она ставит своей задачей нахождение векторов производства и потребления, дающих оптимальные результаты с определенной точки зрения, — именно, с точки зрения потребителя. Теория равновесия рассматривает вещи, как они есть¹⁾, теория благосостояния — вещи, какими они могли бы стать.

Целью экономики благосостояния является система, в которой все потребители равномерно достигают максимума своей полезности. Если мы рассматриваем систему, в которой участвует более одного потребителя, то это случается довольно редко. В этом случае мы характеризуем вид для всех эффективных векторов потребления, которые назначаются таким образом, что ни один потребитель не может увеличить свою полезность, не ущемляя при этом интересов других потребителей. Это понятие известно под названием оптимума Парето. Конечно, всякая программа потребления должна формулироваться в терминах оптимума Парето. Однако так как существует множество оптимальных по Парето векторов потребления, то для выделения конкретной оптимальной системы векторов потребления следует наложить дальнейшие условия. Одно из таких условий указывается в п. 9.1.

Математическим аппаратом теории экономики благосостояния является в основном некоторое нетривиальное приложение векторной задачи максимизации из нелинейного программирования (см. п. 7.4). Связи экономики благосостояния с теорией равновесия выявляются также в п. 9.1.

¹⁾ В рамках определенной модели, разумеется. — *Прим. ред.*

В остальной части этой главы мы рассматриваем различные динамические задачи математической экономики. В п. 9.2 мы формулируем несколько вариантов процесса реагирования цен на изменения от периода к периоду функций избыточного спроса (т. е. изменения в размерах превышения суммарного спроса над суммарным предложением). Функции избыточного спроса сами являются функциями цен предыдущего периода. Для равновесного вектора цен функции избыточного спроса, по существу, равны нулю.

Если время считается непрерывным, то процесс регулирования цен описывается системой дифференциальных уравнений. Задача выяснения устойчивости этого процесса по сути дела заключается в определении условий, заставляющих вектор цен (как функций времени) при возрастании времени сходиться к равновесному вектору цен. Говоря математически, задача состоит в нахождении критериев, обеспечивающих устойчивость решений некоторой специальной системы дифференциальных (или, в зависимости от модели, разностных) уравнений.

Природа этих критериев зависит от экономических соображений. Например, понятия „валовых заменителей“ и „валовых дополнений“ (см. стр. 355 и 358) приводят к естественным условиям, которым удовлетворяют функции избыточного спроса; помимо других вещей, они позволяют нам проводить попарное разбиение товаров в зависимости от того, как влияют повышения цены одного товара на спрос на другие товары. Математический аппарат, применяемый при изучении понятия валовых заменителей, включает в себя некоторые интригующие соотношения для особого рода векторных полей функций (см., в частности, п. 9.4). Другим содержательным экономическим понятием, из которого следует устойчивость процесса регулирования цен, является принцип выявленного предпочтения.

В п. 9.2—9.5 мы исследуем устойчивость дифференциальных уравнений процесса регулирования цен при различных условиях. В п. 9.6 рассматривается разностный вариант этого же процесса. В п. 9.7 и 9.8 изучаются вопросы теории локальной устойчивости процесса регулирования, если функции избыточного спроса зависят не только от текущих цен, но и от так называемых „цен, ожидаемых в будущем“. Сравниваются два варианта устойчивости (с учетом влияния цен, ожидаемых в будущем, и без такого учета).

В п. 9.9 и 9.10 рассмотрены динамические процессы иного рода, а именно рост производства и потребления в последовательные периоды времени. Одно из фундаментальных следствий показывает, что при соответствующих предположениях темп роста равен проценту на капитал. В п. 9.9 мы описываем классическую модель расширяющейся экономики, предложенную фон Нейманом. Заключительный пункт содержит изложение обобщения этой модели и исследование одного из ее частных случаев — динамической модели Леонтьева.

9.1*. Экономика благосостояния. Дескриптивное изучение экономики можно охарактеризовать главным образом при помощи явления равновесия. Состояние равновесия — это такое положение, когда при заданном наборе цен ни один потребитель не может приобрести больше без дополнительных затрат и ни один производитель не может добиться большей прибыли. Изучение экономики благосостояния связано в основном с проблемой описания тех состояний экономики, когда ни один потребитель не может стать богаче, не обедняя при этом другого.

Обратимся теперь к детальному исследованию теории благосостояния. Наборы товаров мы будем представлять r -мерными векторами. Каждому потребителю i ($i = 1, 2, \dots, m$) соответствует множество X_i векторов потребления из E^r и функция-индикатор полезности $U_i(x_i)$, определенная для $x_i \in X_i$ и характеризующая шкалу предпочтений i -го потребителя. [Мы предполагаем, что индуцируемое функцией $U_i(x_i)$ отношение предпочтения удовлетворяет всем обычным свойствам, перечисленным в п. 8.6. Далее мы для удобства изложения предположим, что $U_i(x_i)$ есть строго вогнутая функция для $x_i \in X_i$.] Экономика достигает совершенства, когда все потребители могут одновременно добиться максимума своей функции полезности. Мы увидим, что уравнения конкурентной экономики, вообще говоря, не обладают решениями, позволяющими каждому потребителю достигнуть максимальной полезности.

Говорят, что система векторов $\{x_i\}$ ($x_i \in X_i$) образует *оптимум Парето*, если а) эта система допустима (см. ниже) и б) не существует другой системы векторов $\{x'_i\}$ ($x'_i \in X_i$), для которой

$$U_i(x'_i) \geq U_i(x_i) \quad (i = 1, \dots, m),$$

причем хотя бы для одного потребителя имеет место строгое неравенство. (Это понятие, по существу, совпадает с понятием допустимости в статистике.)

В этом пункте мы преследуем двоякую цель: во-первых, охарактеризовать все оптимальные по Парето системы векторов потребления и, во-вторых, изучить соотношение между данным оптимумом Парето и существованием конкурентного равновесия (см. п. 8.8).

В заключение пункта мы вкратце рассмотрим задачу выбора оптимальной по Парето системы векторов из множества всех таких эффективных векторных систем.

Рассмотрим сначала вопрос о том, когда оптимум Парето является конкурентным равновесием, и обратно.

Случай одного потребителя. Пусть Y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — подмножество пространства E^r , представляющее множество возможных

векторов производства фирмы j . Очевидно,

$$Y = \sum_{j=1}^n Y_j$$

образует множество векторов суммарного производства для всей экономики.

Пусть X (лежащее в положительном ортанте E') представляет множество потребления, доступное нашему потребителю, а через $U(x)$ обозначена его функция полезности (которую мы будем предполагать строго вогнутой). Предполагается, что множество суммарного производства выпукло и компактно. Потребитель стремится выбрать вектор $x^* \in X$ таким образом, чтобы иметь

$$U(x^*) = \max U(x),$$

где максимум распространен на все те $x \in X$, для которых существуют такие векторы $y \in Y$, что $x \leq y$.

Любой вектор $x \in X$, для которого существует такой вектор $y \in Y$, что $y \geq x$, мы будем называть *допустимым*, или *возможным*. Иными словами, потребитель, выбирая допустимый вектор, максимизирует свою функцию полезности, действуя при этом с учетом имеющихся технологических возможностей.

Из-за компактности Y ясно, что область допустимых векторов $x (x \leq y)$ также компактна, и, следовательно, операция $\max U(x)$, распространенная лишь на допустимые векторы потребления, вполне определена.

Мы наложим также следующие условия.

Предположение I. Существуют векторы $x^0 \in X$ и $y^0 \in Y$, для которых $y^0 - x^0 > 0$.

Предположение II. Для каждого $x \in X$ существует такой вектор $x' \in X$, что $U(x') > U(x)$.

Предположение II устанавливает, что если отвлечься от бюджетных ограничений и допустимости, то не существует вектора потребления, который являлся бы точкой насыщения (см. стр. 329).

Задачу определения оптимального вектора потребления можно свести к задаче вогнутого программирования. Это делается следующим образом.

Для пары $\{x, y\}$ (точки из произведения $X \times Y$) положим

$$g(x, y) = U(x).$$

Пусть через $F(x, y) = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_r - x_r)$ обозначена векторная система функций, определенных повсюду на произведении

$E' \times E'$. В этих обозначениях задача выбора вектора потребления с максимальной полезностью превращается в задачу нахождения

$$\max g(x, y) = \max U(x) \quad (9.1.1)$$

при условиях

$$F(x, y) \geq 0 \quad (x \in X, y \in Y). \quad (9.1.2)$$

Определение конкурентного равновесия в случае одного потребителя выглядит следующим образом: система векторов $\{p^*, x^*, y^*\}$, где $y^* \in Y$, $x^* \in X$, а p^* — вектор относительных цен, подчиненный условиям

$$p_i^* \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r p_i^* = 1,$$

образует конкурентное равновесие, если

$$U(x^*) = \max_{x \in \hat{X}} U(x), \quad (9.1.3)$$

где $\hat{X} = \{x | x \in X, (p^*, x) \leq (p^*, y^*)\}$,

$$(p^*, y^*) = \max_{y \in Y} (p^*, y) \quad (9.1.4)$$

и

$$x^* \leq y^*, \quad (p^*, x^* - y^*) = 0. \quad (9.1.5)$$

Основным результатом, связывающим понятия конкурентного равновесия и потребления с максимальной полезностью, является

► Теорема 9.1.1. Пусть выполнены предположения I и II. Для того чтобы вектор x^* максимизировал $U(x)$ среди всех допустимых векторов, необходимо и достаточно существование вектора $y^* \in Y$ и вектора цен p^* , при которых $\{p^*, x^*, y^*\}$ образует конкурентное равновесие.

Доказательство этой теоремы является приложением теоремы 7.1.1. Пусть x^* максимизирует $U(x)$ по всем допустимым векторам. Выберем любой вектор $y^* \in Y$, для которого $y^* \geq x^*$. Тогда пара $\{x^*, y^*\}$ является решением задачи (9.1.1) — (9.1.2). Кроме того, предположение I гарантирует нам выполнение дополнительного условия теоремы 7.1.1. Следовательно, в силу этой теоремы форма Лагранжа

$$\varphi(x, y; u) = g(x, y) + (u, F(x, y)) = U(x) + (u, F(x, y)),$$

где $\{x, y\}$ пробегает произведение $X \times Y$, а $u \geq 0$, имеет седловую точку $\{x^*, y^*; u^0\}$, для которой

$$\begin{aligned} U(x) + (u^0, F(x, y)) &\leq U(x^*) + (u^0, F(x^*, y^*)) \leq \\ &\leq U(x^*) + (u, F(x^*, y^*)) \end{aligned} \quad (9.1.6)$$

при всех $\{x, y\} \in X \times Y$ и $u \geq 0$. Далее, та же теорема показывает, что

$$F(x^*, y^*) \geq 0, (u^0, F(x^*, y^*)) = 0. \quad (9.1.7)$$

Теперь мы заключаем, что $u^0 \geq 0$, так как в противном случае левое неравенство в (9.1.6) противоречило бы предположению II. Положим $p^* = \lambda u^0$, где

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{i=1}^r u_i^0}.$$

Установим теперь, что тройка $\{x^*, y^*, p^*\}$ образует конкурентное равновесие. Отметим, во-первых, что из (9.1.7) следует (9.1.5). Так как

$$(u^0, F(x, y)) = \frac{1}{\lambda} [(p^*, y) - (p^*, x)],$$

мы находим из (9.1.7) и левого неравенства (9.1.6), что $U(x^*) \geq U(x)$ в согласии с (9.1.3). Используя снова левое неравенство (9.1.6) для конкретного выбора $\{x, y\} = \{x^*, y\}$ при произвольном $y \in Y$, мы приходим к неравенству

$$(u^0, y) \leq (u^0, y^*),$$

эквивалентному (9.1.4). Первая половина теоремы теперь доказана.

Обратно, предположим, что $\{p^*, x^*, y^*\}$ определяет конкурентное равновесие в смысле 9.1.3—9.1.5. Мы должны доказать, что $U(x^*) = \max U(x)$, где максимум взят по всем допустимым векторам x . Ясно, что для любого допустимого x существует некоторый $y \in Y$, такой, что $y \geq x$. Следовательно, $(p^*, y) \geq (p^*, x)$. Кроме того, $(p^*, y^*) \geq (p^*, x)$ в силу (9.1.4); поэтому, согласно (9.1.3), $U(x^*) \geq U(x)$, что и требовалось. Это завершает доказательство.

Случай многих потребителей. Пусть $X_i \subset E^r$ представляет собой множество потребления для потребителя i ($i = 1, 2, \dots, m$), и пусть

$$X = \sum_{i=1}^m X_i$$

обозначает множество суммарного потребления для всех потребителей. Упорядочение предпочтения для потребителя i описывается строго вогнутой функцией полезности $U_i(x_i)$. Предполагается, что все множества X_i лежат в неотрицательном ортанте пространства E^r , выпуклы и замкнуты. Положение с векторами производственных возможностей здесь то же, что и в случае одного потребителя.

Мы снова хотим найти условия того, чтобы оптимум Парето был элементом конкурентного равновесия. Будем говорить, что система

векторов $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*; y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*; p^*\}$ образует конкурентное равновесие, если p^* представляет собой вектор относительных цен, для которого

$$p_i^* \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i^* = 1,$$

и данная система удовлетворяет условиям

$$(p^*, y_j^*) = \max_{y_j \in Y_j} (p^*, y_j), \quad (9.1.8)$$

$$U_i(x_i^*) = \max_{x_i \in \hat{X}_i} U_i(x_i), \quad (9.1.9)$$

где ¹⁾

$$\hat{X}_i = \{x_i \mid x_i \in X_i, (p^*, x_i) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (p^*, y_j^*)\},$$

и

$$x^* \leq y^*, (p^*, x^* - y^*) = 0, \quad (9.1.10)$$

где

$$x^* = \sum_{i=1}^m x_i^*, y^* = \sum_{j=1}^n y_j^*.$$

Задачу характеристики оптимумов Парето мы можем сформулировать в виде векторной задачи максимизации в смысле теоремы 7.4.1. Именно определим для любого набора $\{x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n\}$ ($x_i \in X_i, y_j \in Y_j$) вектор-функцию

$$G(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = \{U_i(x_i)\} = U(x). \quad (9.1.11)$$

Пусть

$$F(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = y - x, \quad (9.1.12)$$

где

$$x = \sum_{i=1}^m x_i, y = \sum_{j=1}^n y_j.$$

В соответствии с терминологией параграфа 7.4 характеристика оптимумов Парето эквивалентна характеристике всех эффективных точек функции $U(x)$ при условиях $F \geq 0, x_i \in X_i, y_j \in Y_j$.

¹⁾ Величина α_{ij} представляет собой долю прибыли, которая выделяется i -му потребителю. Предполагается, что она удовлетворяет условиям

$$\alpha_{ij} \geq 0, \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n.$$

Полная экономическая интерпретация величин α_{ij} дана в п. 8.8.

Предположения I и II снова предполагаются выполненными, причем второе из них естественным образом обобщено на каждую компоненту U_i .

Соотношения между оптимальными по Парето системами векторов и конкурентным равновесием выводятся из утверждений теоремы 7.4.1. В следующей теореме эти соотношения формулируются более точно.

► Теорема 9.1.2. Пусть выполнены предположения I и II. Пусть

$$\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\}$$

— такой оптимум Парето, что если $y^* \geq x^*$, то для любого i_0 существует такая система векторов потребления $\{\tilde{x}_i\}$, что $\tilde{x}_i = x_i^*$, $i \neq i_0$, и существует некоторый вектор $\tilde{y} \in Y$, для которого $\tilde{y} - \tilde{x} > 0$. Тогда существуют такие векторы $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ ($y_j^* \in Y_j$), вектор цен p^* и матрица $\|\alpha_{ij}^*\|$,

$$\alpha_{ij}^* \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}^* = 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

что система

$$\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*; y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*; p^*, \alpha_{ij}^*\}$$

образует конкурентное равновесие.

Доказательство. Пусть $\{x_1^*, \dots, x_m^*\}$ — оптимум Парето, а $y_1^*, \dots, y_n^*$ — элементы из соответствующих множеств Y_j , дающие элемент

$$y^* = \sum_{j=1}^n y_j^*.$$

который выбирается таким образом, чтобы

$$y^* \geq x^* = \sum_{i=1}^m x_i^*.$$

Очевидно, $\{x_1^*, \dots, x_m^*\}$ является эффективной точкой функции G [см. (9.1.11)] среди всех векторов x_i, y_j , удовлетворяющих ограничениям $F = y - x \geq 0$, $x_i \in X_i$, $y_j \in Y_j$. Условие теоремы 7.4.1 выполнено в силу предположения I. Согласно этой теореме, существуют такие векторы $u^0 \geq 0$, $v^0 \geq 0$, что

$$\begin{aligned} (v^0, U(x)) + (u^0, y - x) &\leq (v^0, U(x^*)) + (u^0, y^* - x^*) \leq \\ &\leq (v^0, U(x^*)) + (u, y^* - x^*) \end{aligned} \quad (9.1.13)$$

для всех $u \geq 0$ и $x_i \in X_i$, $y_j \in Y_j$. Так как $y^* \geq x^*$, мы заключаем из правого неравенства, что $(u^0, y^* - x^*) = 0$ (см. доказательство теоремы 7.1.1). Отметим далее, что $u^0 \geq 0$, так как в случае $u^0 = 0$ и $v^0 \geq 0$ левое неравенство было бы несовместимо с предположением II. Покажем, наконец, что $v^0 > 0$. В самом деле, предположим противное: пусть $v_{i_0}^0 = 0$. Тогда в левом неравенстве мы можем взять $\tilde{x}_i = x_i^*$ для $i \neq i_0$ (это обеспечивается условием теоремы) так, что $\tilde{x} < \tilde{y}$. Подставляя выбранные таким образом x и y в (9.1.13), мы легко убеждаемся, что левое неравенство нарушается.

Положим

$$p^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^r u_i^0} u^0,$$

и $\alpha_{ij}^* = a_i$, где

$$a_i = \frac{(p^*, x_i^*)}{(p^*, y^*)}.$$

Отметим, что

$$a_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m a_i = 1,$$

так как

$$\sum_{i=1}^m (p^*, x_i^*) = (p^*, y^*), \quad (p^*, x_i) \geq 0.$$

Теперь мы подготовлены к доказательству того, что система

$$\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*; y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*; p^*, \alpha_{ij}^*\}$$

образует конкурентное равновесие.

Соотношения (9.1.10) немедленно следуют из того, что

$$y^* \geq x^*, \quad (u^0, y^* - x^*) = 0.$$

Положим, далее, $x_i = x_i^*$ для всех i и $y_j = y_j^*$ для $j \neq j_0$. Тогда левое неравенство (9.1.13) даст нам

$$(u^0, y_{j_0}) \leq (u^0, y_{j_0}^*),$$

откуда из-за произвольности j_0 вытекает (9.1.8). Наконец, положим $y_j = y_j^*$ для всех j и $x_i = x_i^*$ для $i \neq i_0$; выберем $x_{i_0} \in \hat{X}_{i_0}$ (см. (9.1.9)). Тогда левое неравенство (9.1.13) сведется к неравенству

$$v_{i_0}^0 U_{i_0}(x_{i_0}) + \left(\sum_{i=1}^r u_i^0 \right) (p^*, y^* - x) \leq v_{i_0}^0 U_{i_0}(x_{i_0}^*). \quad (9.1.14)$$

Теперь $\mathbf{x}_i^* \in \hat{X}_i$ по построению α_{ij}^* . Тогда

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}_i^*) = a_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{y}^*), \quad i \neq i_0,$$

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}_{i_0}) \leq a_{i_0}(\mathbf{p}^*, \mathbf{y}^*).$$

Складывая эти соотношения, мы получаем

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}) \leq (\mathbf{p}^*, \mathbf{y}^*).$$

Отсюда и из того, что $v_{i_0}^0 > 0$, мы выводим неравенство $U_{i_0}(\mathbf{x}_{i_0}) \leq U_{i_0}(\mathbf{x}_{i_0}^*)$ для $\mathbf{x}_{i_0} \in \hat{X}_{i_0}$, т. е. получаем утверждение (9.1.9). Это завершает доказательство теоремы.

Перейдем теперь к обратной теореме.

► Теорема 9.1.3. Если

$$\{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*; \mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \dots, \mathbf{y}_n^*; \mathbf{p}^*, \alpha_{ij}^*\}$$

есть конкурентное равновесие, то $\{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*\}$ представляет собой оптимум Парето.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует допустимая система векторов $\{\mathbf{x}'_i\}$, для которой $U_i(\mathbf{x}'_i) \geq U_i(\mathbf{x}_i^*)$, $i = 1, \dots, m$, со строгим неравенством по крайней мере для одного i . Упорядочим индексы таким образом, чтобы

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i^*, \quad i = 1, \dots, s; \quad \mathbf{x}'_i \neq \mathbf{x}_i^*, \quad i = s+1, \dots, m.$$

Очевидно, что $s < m$, так как, согласно предположенному, $\mathbf{x}'_i$ доминируют $\mathbf{x}_i^*$ в смысле полезности. Из строгой вогнутости U_i следует, что для векторов

$$\tilde{\mathbf{x}}_i = t\mathbf{x}'_i + (1-t)\mathbf{x}_i^*, \quad i = 1, \dots, m; \quad 0 < t < 1,$$

будет

$$U_i(\tilde{\mathbf{x}}_i) > U_i(\mathbf{x}_i^*), \quad i = s+1, \dots, m.$$

Кроме того, векторы $\tilde{\mathbf{x}}_i$ допустимы, и, следовательно, существует такой вектор $\tilde{\mathbf{y}}$, что

$$\tilde{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^n \tilde{\mathbf{y}}_j \geq \tilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{x}}_i.$$

Поэтому $(\mathbf{p}^*, \tilde{\mathbf{y}}) \geq (\mathbf{p}^*, \tilde{\mathbf{x}})$ и, согласно (9.1.8),

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{y}^*) \geq (\mathbf{p}^*, \tilde{\mathbf{x}}). \quad (9.1.15)$$

Принимая во внимание, что $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i^*$ для $i = 1, \dots, s$, а также неравенство (9.1.15), мы видим, что существует такой индекс i_0 ($s + 1 \leq i_0 \leq m$), для которого

$$(\mathbf{p}^*, \tilde{\mathbf{x}}_{i_0}) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_{i_0 j} (\mathbf{p}^*, \mathbf{y}_j^*).$$

Однако $U_{i_0}(\tilde{\mathbf{x}}_{i_0}) > U_{i_0}(\mathbf{x}_{i_0}^*)$, что противоречит (9.1.9). Теорема доказана.

Теперь, когда мы, по существу, охарактеризовали оптимальные по Парето системы векторов потребления, остается задача выделения конкретного оптимума Парето. Для этого необходимо установить некоторые дальнейшие критерии. Один из них, известный под названием принципа справедливости, заключается в назначении равных весов $\lambda_i = 1/m$ и в определении таких $\mathbf{x}_i \in X_i$, при которых сумма

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i U_i(\mathbf{x}_i)$$

достигает максимума, причем $\mathbf{x}_i$ подчинены ограничениям $\mathbf{x}_i \in X_i$ и существует такой вектор $\mathbf{y} \in Y$, для которого

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i \leq \mathbf{y}.$$

Получаемые таким образом векторы $\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_m^*$, очевидно, образуют оптимум Парето. Экономические преимущества такого процесса выбора были убедительно доказаны, в частности, Эджвортом и Маршаллом.

Вообще выбор оптимума Парето представляет собой весьма сложную проблему, очень близкую к задаче оправданного выбора некоторой допустимой статистической процедуры из полного класса таких процедур.

9.2. Устойчивость конкурентного равновесия. В предыдущей главе и в предшествующем параграфе мы занимались в основном исследованием существования, единственности и оптимальности конкурентного равновесия. Эти понятия являются статическими. Не меньшую важность имеет динамика процесса равновесия и, в частности, понятие устойчивости. В этом параграфе мы опишем формальную динамическую модель, характеристики которой отражают сущность процесса конкуренции, и исследуем устойчивость этой модели в свете определенных предположений, касающихся либо свойств индивидуальных производственных единиц, либо совокупных функций избыточного спроса.

Для начала предположим, как и выше, что имеются m потребителей с допустимыми множествами потребления $X_i \subset E^{r+1}$ ($i = 1, \dots, m$)¹⁾. Потребитель i стремится выбрать допустимый вектор потребления $x_i \in X_i$, максимизирующий его функцию полезности (см. стр. 312).

Пусть $x = \sum_{i=1}^m x_i$ обозначает совокупный вектор потребления.

Пусть через Y обозначен совокупный производственный сектор наборов товаров из E^{r+1} . Каждая из производственных единиц (фирм) стремится организовать производство таким образом, чтобы максимизировать свои прибыли. Следовательно, всякому вектору цен $p = (p_0, p_1, \dots, p_r)$ набора товаров соответствует совокупный вектор спроса $x(p)$ и совокупный вектор производства $y(p)$, подчиненные соответственно условиям (Б) и (В) (см. стр. 330) и обладающие требуемыми свойствами максимальности. При обычных условиях, лежащих в основе равновесия (в первую очередь наличие ненасыщенного спроса), мы имеем для любого вектора цен p

$$(p, x(p) - y(p)) = (p, F(p)) = 0. \quad (9.2.1)$$

Что касается вывода соотношения (9.2.1), то читатель может обратиться к стр. 333. Мы будем называть $F(p)$ совокупной функцией избыточного спроса для данного вектора p . Вектор избыточного спроса для i -го потребителя будет обозначаться через $F^i(p)$, при этом

$$F(p) = \sum_{i=1}^m F^i(p).$$

Из тех же соображений вытекает, что $(p, F^i(p)) = 0$.

В дальнейшем мы будем повсюду предполагать функцию $F(p)$ непрерывно-дифференцируемой и однозначной при $p \geq 0$. Соотношение (9.2.1) известно в классической экономической теории под названием закона Вальраса. Подчеркнем, что он действует универсально, независимо от того, какие цены имеют место на рынке.

Далее, равновесный вектор цен p^* характеризуется тем свойством, что

$$F(p^*) \leq 0. \quad (9.2.2)$$

Это обеспечивает возможность достижения вектора потребления $x(p^*)$ при помощи вектора производства $y(p^*)$.

Для математического удобства и для более легкого уяснения динамического процесса регулирования цен мы в дальнейшем будем предполагать, что существует строго положительный равновесный

¹⁾ Мы рассматриваем $(r+1)$ -мерные векторы товаров вместо r -мерных, имея в виду отождествление их нулевых компонент с денежной стоимостью, если последнюю важно отличать от остальных.

вектор цен $\mathbf{p}^*$, т. е. что $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$. В силу (9.2.1) и (9.2.2) отсюда следует, что $\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$.

Мы будем также предполагать, что функция избыточного спроса $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ — положительно однородная нулевой степени, т. е.

$$\mathbf{F}(\lambda p_0, \lambda p_1, \dots, \lambda p_r) = \mathbf{F}(p_0, p_1, \dots, p_r), \quad \lambda > 0. \quad (9.2.3)$$

Этим выражено естественное предположение о том, что на флуктуации функции избыточного спроса существенное влияние оказывают лишь относительные цены различных товаров.

Теперь мы можем предложить динамическую модель, описывающую приспособление цен во времени к вариациям спроса и предложения в экономической системе с конкуренцией.

Одна такая динамическая модель основана на системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_j}{dt} = F_j(p_0, p_1, \dots, p_r), \quad j = 0, 1, \dots, r \quad (9.2.4)$$

или в векторной записи

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{p}). \quad (9.2.5)$$

Цена некоторого товара в такой системе повышается или понижается в зависимости от того, будет ли избыточный спрос на этот товар положителен или отрицателен. Скорость этого повышения или понижения пропорциональна размеру избыточного спроса или избыточного предложения по каждому товару. Это привлекательное функциональное соотношение между спросом, предложением и ценами часто постулируется; оно дает наиболее простую и непосредственную характеристику процесса регулирования цен.

Подходящим выбором единиц измерения для каждого товара мы можем придать уравнениям (9.2.4) вид

$$\frac{dp_j}{dt} = k_j F_j, \quad j = 0, 1, \dots, r$$

с произвольными положительными коэффициентами пропорциональности k_j . Таким образом, сделанное нами предположение $k_j = 1$ не нарушает общности.

Аналогом динамической системы (9.2.4) в случае дискретного времени будет

$$p_j(t+1) = p_j(t) + \rho F_j(p_0(t), \dots, p_r(t)), \quad j = 0, 1, \dots, r. \quad (9.2.6)$$

Имея в виду экономическую интерпретацию модели, необходимо в целях адекватности наложить в (9.2.5) и (9.2.6) некоторые условия, обеспечивающие неотрицательность вектора $\mathbf{p}(t)$ при всех t .

В случае дискретного времени мы заменим (9.2.6) системой уравнений

$$p(t+1) = \max[0, p(t) + \rho F(p(t))], \quad (9.2.7)$$

которая обеспечивает положительность $p(t)$ при всех t и по-прежнему отражает динамику процесса регулирования цен. Исследование системы вида (9.2.7) мы отложим до п. 9.6.

В случае непрерывного времени мы не будем заботиться о проверке положительности вектора $p(t)$ во все моменты времени. Самостоятельный читатель сможет провести эту проверку без особых затруднений.

Мы будем изучать устойчивость для двух процессов, возникающих из системы (9.2.5): для нормированного процесса регулирования цен и для ненормированного процесса регулирования цен. В нормированном процессе выделяется один из товаров (скажем, нулевой), и вектор цен нормируется так, что $q = (1, q_1, \dots, q_r)$. Этот выделенный товар часто понимается как деньги¹⁾. Динамику для нормированного процесса мы будем рассматривать в терминах относительных цен $q_j = p_j/p_0$ ($j = 1, \dots, r$). Сейчас мы переформулируем процесс регулирования цен, снова постулируя, что он описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_j}{dt} = G_j(q), \quad j = 1, \dots, r, \quad (9.2.8)$$

где $G_j(q) = F_j(1, q_1, \dots, q_r)$, а F_j имеет тот же смысл, что и прежде.

В ненормированном процессе все товары предполагаются равноправными, а динамика его описывается системой (9.2.5).

Мы установим критерии устойчивости одновременно для нормированных и ненормированных процессов. С математической точки зрения ненормированный процесс усложняется множественностью равновесных векторов цен, так как если p^* есть точка равновесия, то все точки луча λp^* ($\lambda > 0$) также будут точками равновесия. Однако с экономической точки зрения эта модель более привлекательна ввиду своей полной симметрии. Во многих специфических ситуациях более содержательным будет нормированный процесс (особенно в тех случаях, когда товар „деньги“ не является свободным товаром и поэтому может быть выделен в качестве измерителя стоимости).

Решение системы (9.2.5) будет обозначаться через $p(t) = \psi(t, p^0)$, где p^0 — начальный вектор цен. Далее мы будем предполагать, что функции избыточного спроса $F_j(p)$ достаточно гладки. В результате

¹⁾ В оригинале *numéraire* (термин Вальраса). В буржуазной политической экономии этим термином обозначается произвольно выделенный товар, служащий масштабом при сопоставлении стоимости остальных товаров. — *Прим. перев.*

начальный вектор цен $\mathbf{p}^0$ единственным образом определяет решение $\psi(t, \mathbf{p}^0)$, которое непрерывно зависит от $\mathbf{p}^0$. Решение системы (9.2.8) мы обозначим через $\mathbf{q}(t) = \varphi(t, \mathbf{q}^0)$. Здесь мы сделаем аналогичные предположения относительно единственности и непрерывности решений. Очевидно, всякий строго положительный равновесный вектор

$$\mathbf{p}^*(t) = \psi(t, \mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$$

есть решение типа неподвижной точки. Имея это в виду, мы можем сформулировать основную проблему, изучаемую в п. 9.2—9.5, следующим образом: нужно определить критерии сходимости любого решения $\psi(t, \mathbf{p}^0)$ системы (9.2.5) или решения $\varphi(t, \mathbf{q}^0)$ системы (9.2.8) к равновесному вектору.

Явления устойчивости можно изучать на двух уровнях. Во-первых, можно определять условия локальной устойчивости, т. е. условия, обеспечивающие сходимость к равновесному вектору $\mathbf{p}^*$ при достаточно близком к $\mathbf{p}^*$ начальном векторе цен $\mathbf{p}^0$. Во-вторых, — что более важно — мы можем пытаться найти условия глобальной устойчивости, т. е. условия, обеспечивающие сходимость к равновесному вектору цен безотносительно к начальному вектору цен $\mathbf{p}^0$.

Теперь представляется целесообразным подвести итоги и кратко обсудить интерпретацию различных условий устойчивости, откладывая детальное рассмотрение до последующих параграфов.

Пусть

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}) = \left\| \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right\|, \quad i, j = 0, 1, \dots, r; \quad \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \left\| \frac{\partial G_i}{\partial q_j} \right\|, \quad i, j = 1, \dots, r. \quad (9.2.9)$$

Будем говорить, что для ненормированного процесса имеет место *валовая заменимость* (*строгая валовая заменимость*), если при всех $i \neq j$

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \geq 0 \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} > 0 \right). \quad (9.2.10)$$

Аналогичное определение применимо и к нормированному процессу. Соотношение (9.2.10) обладает свойством валовой заменимости при всех $\mathbf{p}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ есть M -матрица (см. стр. 299). Экономическое истолкование этого свойства заключается в следующем. Если цена j -го товара повышается, в то время как цены других товаров остаются неизменными, то можно ожидать увеличения спроса на все остальные товары и, следовательно, (9.2.10) будет справедливо. Товары, между которыми установлено такого рода соотношение, называются „заменителями“. Это соотношение справедливо не всегда: так, например, если цена на масло повышается, то вполне может случиться, что спрос на хлеб упадет, поскольку многие не в состоянии представить себе хлеб без масла.

Тем не менее исследование процесса регулирования цен в условиях валовой заменимости представляет определенный интерес. Особенно интересна основная теорема п. 9.4, утверждающая, что если для нормированного или ненормированного процесса имеет место строгая валовая заменимость и $\mathbf{p}^*$ — строго положительный равновесный вектор, то процесс глобально устойчив.

Другое предложение, представляющее известный экономический интерес, заключается в том, что нормированный процесс (9.2.8) глобально устойчив, если $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ — вещественная отрицательно квазиопределенная матрица. (Вещественная матрица $\mathbf{C}$ называется отрицательно квазиопределенной, если матрица $\mathbf{C} + \mathbf{C}^T$ отрицательно определенная.)

Отрицательная квазиопределенность матрицы $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ тесно связана с понятием выявленного предпочтения [см. п. 8.6 и соотношение (8.6.7)].

Другие результаты, относящиеся к устойчивости, подробно излагаются в следующем пункте.

9.3. Локальная устойчивость. *Нормированный процесс.* При изучении локальной устойчивости мы можем заменить систему (9.2.8) системой линейных дифференциальных уравнений. Именно, разлагая правую часть системы (9.2.8) в окрестности точки равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$ (в этом параграфе, если явно не оговаривается обратное, мы предполагаем вектор $\mathbf{q}^*$ строго положительным), мы получаем

$$\frac{d(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*)}{dt} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \sim \mathbf{G}(\mathbf{q}^*) + \mathbf{B}(\mathbf{q}^*)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) = \mathbf{B}(\mathbf{q}^*)(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*), \quad (9.3.1)$$

где

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \left\| \frac{\partial G_i(\mathbf{q})}{\partial q_j} \right\| \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Локальная устойчивость для системы (9.2.8), очевидно, равносильна устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{C}\mathbf{z}, \quad (9.3.2)$$

где $\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{q}^*)$; последнее в этих обстоятельствах сводится к утверждению о сходимости всех решений к нулю. Очевидно, система (9.3.2) будет устойчивой в том и только в том случае, когда все характеристические корни матрицы $\mathbf{C}$ будут иметь отрицательные вещественные части, так как каждое решение системы (9.3.2) выражается в виде линейной комбинации экспоненциальных функций $e^{\lambda_i t}$, где λ_i — собственные числа матрицы $\mathbf{C}$. Матрица $\mathbf{C}$, все собственные числа которой имеют отрицательные вещественные части, называется *устойчивой*.

Теперь мы укажем ряд условий локальной устойчивости. Все вводимые нами предположения имеют в какой-то мере экономический смысл.

► Теорема 9.3.1. Если $\mathbf{B}(\mathbf{q}^*)$ есть M -матрица и либо а) $\det \mathbf{B}(\mathbf{q}^*) \neq 0$ и $\partial G_0 / \partial q_i \geq 0$, либо б) $\partial G_0 / \partial q_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), то нормированный процесс регулирования (9.2.8) локально устойчив.

(Как уже отмечалось, первое условие равносильно утверждению о том, что нормированный процесс локально (в точке $\mathbf{q}^*$) обладает свойством валовой заменимости.)

Доказательство. Дифференцируя закон Вальраса [уравнение (9.2.1)] в точке $\mathbf{q}^*$, мы получаем

$$\frac{\partial G_0(\mathbf{q}^*)}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^r q_j^* \frac{\partial G_j(\mathbf{q}^*)}{\partial q_i} = 0. \quad (9.3.3)$$

Следовательно, по условию нашей теоремы $\mathbf{q}^* \mathbf{C} \leq \mathbf{0}$, а, согласно предположению, $\mathbf{q}^* > \mathbf{0}$. Так как $\mathbf{C}$ есть M -матрица, достаточно показать, что $\sigma(\mathbf{C}) < 0$, где $\sigma(\mathbf{C}) = \max \operatorname{Re} \lambda_i$ (через λ_i обозначены собственные числа матрицы $\mathbf{C}$). Добавляя к $\mathbf{C}$ некоторое положительное кратное единичной матрицы, мы можем предположить, что матрица $\mathbf{D} = \mathbf{C} + \mu \mathbf{I}$ неотрицательна. Тогда

$$\mathbf{q}^* \mathbf{D} \leq \mu \mathbf{q}^*.$$

Для завершения доказательства теоремы необходимо проверить, что $\lambda_0(\mathbf{D}) < \mu$, где $\lambda_0(\mathbf{D})$ — спектральный радиус матрицы $\mathbf{D}$.

Обозначим через λ_0 наибольшее положительное собственное число матрицы $\mathbf{D}$ и предположим, что $\lambda_0 \geq \mu$. В случае а) будет $\lambda_0 > \mu$. Из данной в следствии 8.2.1 характеристики λ_0 вытекает существование вектора $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, для которого $\mathbf{D}\mathbf{x} > (\lambda_0 - \varepsilon)\mathbf{x}$ при $\lambda_0 - \varepsilon > \mu$ и достаточно малых ε . Но из неравенства $\mathbf{q}^* > \mathbf{0}$ следует

$$\mu(\mathbf{q}^*, \mathbf{x}) \geq (\mathbf{q}^* \mathbf{D}, \mathbf{x}) = (\mathbf{q}^*, \mathbf{D}\mathbf{x}) > (\lambda_0 - \varepsilon)(\mathbf{q}^*, \mathbf{x}),$$

что невозможно.

В случае б), согласно (9.3.3), имеем

$$\mathbf{q}^* \mathbf{D} < \mu \mathbf{q}^*.$$

Используя результат следствия (8.2.2), мы заключаем, что $\lambda_0(\mathbf{D}) < \mu$, что и требовалось. Доказательство теоремы 9.3.1 завершено.

Другое условие того же рода, обеспечивающее локальную устойчивость, заключается в следующем.

► Теорема 9.3.2. Пусть $T = B(q^*) + \mu I$ — положительная матрица, некоторая степень которой строго положительна. Если $\partial G_0 / \partial q_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, r$), причем хотя бы для одного i имеет место строгое неравенство, то матрица $B(q^*)$ устойчива. (Отметим, что это условие выполнено, если $B(q^*)$ обладает свойством строгой валовой заменимости.)

Доказательство. Из соотношения (9.3.3) и условия теоремы вытекает, что $q^* B(q^*) \leq 0$ и, следовательно, $q^* T \leq \mu q^*$. Для некоторой степени T мы будем иметь $q^* T^k < \mu^k q^*$. Поэтому в силу следствия 8.2.2 спектральный радиус матрицы T^k меньше μ^k . Известный результат (см. стр. 766) говорит нам, что спектральный радиус матрицы T лежит внутри круга радиуса μ . Отсюда вытекает заключение теоремы.

В литературе можно найти много других аналитических критериев устойчивости матриц (в качестве типичного результата см. задачу 3).

Здесь мы сосредоточили свое внимание на установлении теорем об устойчивости M -матриц из-за естественной привлекательности понятия „строгих заменителей“ и его прозрачных экономических интерпретаций.

С другой стороны, два товара с индексами i и j называются *дополнительными*, если $\partial F_i / \partial p_j < 0$ и $\partial F_j / \partial p_i < 0$; таковы, например, перья и чернила. Если цена на чернила повышается, то спрос на перья падает, и обратно.

Предположим, что индексы матрицы $B(q^*)$ можно разбить на две такие группы J и J' , что для любых двух различных индексов k и k' из одной группы (J или J')

$$b_{kk'} \geq 0$$

и

$$b_{k'k} \geq 0,$$

а при k из одной группы и k' из другой

$$b_{kk'} \leq 0$$

и

$$b_{k'k} \leq 0.$$

Такие матрицы мы будем называть *$\tilde{M}$ -матрицами*. Для определенности переставим строки и столбцы матрицы так, чтобы индексы группы J предшествовали индексам группы J' . Очевидно, если S есть $\tilde{M}$ -матрица, то SCS есть M -матрица, где

$$S = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

причем порядок единичной матрицы $\mathbf{I}$ равен числу индексов в группе J , а порядок матрицы $-\mathbf{I}$ равен числу индексов в группе J' .

► Теорема 9.3.3. Пусть $\mathbf{B}(\mathbf{q}^*)$ — $\tilde{M}$ -матрица. Пусть существует такой вектор $\mathbf{u}$, что $\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ и $\mathbf{S}\mathbf{B}(\mathbf{q}^*)\mathbf{u} < \mathbf{0}$. Тогда матрица $\mathbf{B}(\mathbf{q}^*)$ устойчива.

Доказательство. Так как $\mathbf{S}\mathbf{S} = \mathbf{I}$, мы имеем

$$\mathbf{0} > \mathbf{S}\mathbf{B}(\mathbf{q}^*)\mathbf{u} = \mathbf{S}\mathbf{B}(\mathbf{q}^*)\mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{v},$$

где $\mathbf{D}$ есть M -матрица и $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$. Из результата задачи 15 к гл. 8 вытекает, что матрица $\mathbf{D}$ устойчива; поэтому и матрица $\mathbf{B}(\mathbf{q}^*)$, полученная из $\mathbf{D}$ преобразованием подобия, также устойчива (см. также задачу 4.)

Ненормированный процесс. Устойчивость для ненормированного процесса следует интерпретировать с учетом однородности функций избыточного спроса $F_i(\mathbf{p})$; как отмечалось ранее, весь луч $\Gamma = \{\lambda \mathbf{p}^* | \lambda > 0\}$ состоит из векторов равновесия. В последующем рассмотрении локальная устойчивость будет означать, что если $\mathbf{p}$ — вектор цен, лежащий вблизи луча Γ , то $\mathbf{p}(t)$ стремится к некоторому вектору равновесия, расположенному на луче Γ .

► Теорема 9.3.4. Пусть $\mathbf{A}(\mathbf{p}^*)$ — строгая M -матрица (т. е. $a_{ij} > 0$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \dots, r$). Если $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$ — вектор равновесия и вектор $\mathbf{p}$ достаточно близок к $\Gamma = \{\lambda \mathbf{p}^* | \lambda > 0\}$, то $\mathbf{p}(t)$ стремится к равновесной точке из Γ .

Доказательство опирается на следующую лемму.

► Лемма 9.3.1. В условиях теоремы 9.3.4, если вектор $\mathbf{p}$ достаточно близок к Γ , то

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p})) > 0$$

для $\mathbf{p} \neq \lambda \mathbf{p}^*$.

Доказательство. Положим $h(\theta) = (\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}(\theta)))$, где $\mathbf{p}(\theta) = \mathbf{p}^* + \theta(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)$; мы покажем, что $h(0) = h'(0) = 0$ и $h''(0) > 0$, если только не выполняется равенство $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}^*$ для некоторого положительного λ .

Заключение $h(0) = 0$ является непосредственным следствием закона Вальраса (9.2.1). Дифференцируя (9.2.1), получаем, так как $\mathbf{p}^*$ есть вектор равновесия ($\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$), что $h'(0) = 0$. Именно

$$h'(\theta) = \sum_{i=0}^r p_i^* \sum_{j=0}^r \frac{\partial F_i(\mathbf{p}(\theta))}{\partial p_j} (p_j - p_j^*). \quad (9.3.4)$$

Дифференцируя (9.2.1) по p_j , мы получаем

$$\sum_{i=0}^r p_i \frac{\partial F_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} + F_j(\mathbf{p}) = 0. \quad (9.3.5)$$

При $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$ последнее сводится к равенству $\mathbf{p}^* \mathbf{A}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$. Используя это в (9.3.4) и меняя порядок суммирования, получаем, что $h'(0) = 0$.

Дифференцирование (9.3.4) вместе с прежними преобразованиями (9.3.5) дает нам

$$h''(0) = - \sum_{j, k=0}^r (p_j - p_j^*) \left[\frac{\partial F_j(\mathbf{p}^*)}{\partial p_k} + \frac{\partial F_k(\mathbf{p}^*)}{\partial p_j} \right] (p_k - p_k^*), \quad (9.3.6)$$

что с помощью скалярных произведений можно записать в виде

$$h''(0) = -(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*, [\mathbf{A}(\mathbf{p}^*) + \mathbf{A}^T(\mathbf{p}^*)](\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)) = -(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*, \mathbf{T}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)),$$

где $\mathbf{A}^T$, как обычно, обозначает матрицу, транспонированную к $\mathbf{A}$. Мы уже отмечали, что $\mathbf{p}^* \mathbf{A}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$. Из однородности функций $F_i(\mathbf{p})$, которая эквивалентна соотношению Эйлера

$$\sum_{j=0}^r \frac{\partial F_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} p_j = 0,$$

следует, в частности, что $\mathbf{A}(\mathbf{p}^*) \mathbf{p}^* = \mathbf{0}$. Отсюда вытекает соотношение $\mathbf{p}^* [\mathbf{A}(\mathbf{p}^*) + \mathbf{A}^T(\mathbf{p}^*)] = \mathbf{p}^* \mathbf{T} = \mathbf{0}$. Но $\mathbf{T}$ представляет собой вещественную симметричную M -матрицу, и так как $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$, мы можем, используя свойство б) M -матриц, заключить, что любое другое решение $\mathbf{x}$ уравнения $\mathbf{xT} = \mathbf{0}$ должно быть положительным кратным вектора $\mathbf{p}^*$, а также, что все ненулевые собственные значения матрицы $\mathbf{T}$ отрицательны. Таким образом, матрица $\mathbf{T}$ является отрицательно полуопределенной. Следовательно, если равенство $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}^*$ не имеет места, то $h''(0) > 0$ — снова в силу однородности функций F_i . Результат леммы 9.3.1 теперь очевиден, если мы в выражении $(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}))$ изменим $\mathbf{p}^*$ на подходящее $\lambda \mathbf{p}^*$ ($\lambda > 0$) и образуем тейлоровское разложение относительно $\lambda \mathbf{p}^*$.

Доказательство теоремы 9.3.4. Положим

$$V(t) = \frac{1}{2} |\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^r [p_i(t) - p_i^*]^2,$$

где $\mathbf{p}(t) = \psi(t, \mathbf{p}^0)$ и $\mathbf{p}^0$ достаточно близко к лучу $\lambda \mathbf{p}^*$. Имеем

$$\frac{dV(t)}{dt} = (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))) = -(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}(t)))$$

(второе равенство вытекает из закона Вальраса). Согласно лемме 9.3.1, если не имеет места равенство $\mathbf{p}(t) = \lambda \mathbf{p}^*$, то $dV(t)/dt < 0$. Так как функция $V(t)$ убывает, мы можем выбрать предельную точку $\tilde{\mathbf{p}}$ для функции $\mathbf{p}(t)$. Если $\tilde{\mathbf{p}}$ не лежит на луче Γ , то довольно легко прийти к противоречию. Именно, существует такая последовательность $t^v \rightarrow \infty$, что

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \psi(t^v, \mathbf{p}^0) = \tilde{\mathbf{p}}.$$

Из непрерывности решений относительно начального вектора вытекает, очевидно,

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \psi(t^v + t, \mathbf{p}^0) = \psi(t, \tilde{\mathbf{p}}).$$

Далее, $\frac{dV(t^v + t)}{dt}$ стремится к нулю; однако если вектор $\tilde{\mathbf{p}}$ не лежит на Γ , то

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{dV(t^v + t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |\psi(t, \tilde{\mathbf{p}}) - \mathbf{p}^*|^2 \right) < 0.$$

Следовательно, если $\lim V(t) = a$, то все предельные для $\mathbf{p}(t)$ точки лежат на луче Γ на расстоянии $2a$ от $\mathbf{p}^*$. Любое $\tilde{\mathbf{p}}$ содержит не более одной из этих двух точек. Но дифференциальное уравнение (9.2.5) показывает [с помощью (9.2.1)], что

$$\sum_{i=0}^r p_i(t) \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=0}^r p_i(t) F_i(\mathbf{p}(t)) = 0;$$

следовательно,

$$\sum_{i=0}^r p_i^2(t)$$

есть постоянная b , не зависящая от t . Очевидно, $\tilde{\mathbf{p}} = \lambda \mathbf{p}^*$, где

$$\lambda = \sqrt{b / \sum_{i=0}^r (p_i^*)^2}.$$

9.4. Глобальная устойчивость процесса регулирования цен.

В этом пункте мы исследуем различные условия, обеспечивающие устойчивость в целом. Приводимые нами критерии основаны большей частью на экономических соображениях. Мы сосредоточим наше внимание на ненормированном процессе, динамика которого описывается системой дифференциальных уравнений (9.2.5).

В этом параграфе мы снова будем предполагать (если только явно не будет оговариваться противное) справедливость закона Вальраса, однородность функций избыточного спроса F_i и строгую положительность равновесного вектора цен $\mathbf{p}^*$, существование которого постулируется (см. также задачу 13). Следующая лемма окажется решающей в большинстве наших рассмотрений глобальной устойчивости.

► Лемма 9.4.1. Если $(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p})) > 0$ для всех тех векторов $\mathbf{p}$, при которых $\mathbf{F}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, то ненормированный процесс регулирования цен глобально устойчив; иначе говоря, при $t \rightarrow \infty$ решение $\psi(t, \mathbf{p}^0)$ сходится к решению типа неподвижной точки.

Доказав лемму 9.4.1, мы посвятим оставшуюся часть параграфа установлению естественных условий, обеспечивающих выполнение условий леммы. В теоремах 9.4.1 и 9.4.2 высказаны два таких условия.

Литература по глобальной устойчивости систем дифференциальных уравнений опирается в основном на один основной метод исследования. Этот метод заключается в введении некоторой подходящей меры расстояния („нормы“) между решением и неподвижной точкой. Если удастся показать, что значения этой нормы строго убывают во времени, когда расстояние отлично от нуля, то из этого вытекает устойчивость в целом. Норма, которую мы используем в этой главе, представляет собой обычное евклидово расстояние. В следующем параграфе мы используем две другие нормы, подходящие для предложенных здесь гипотез (см. также заключительные замечания к этой главе). Более общим методом установления устойчивости является рассмотрение функций $V(\mathbf{p}(t))$, необязательно являющихся нормами, но обладающих лишь подходящими свойствами сжатия относительно точек равновесия. Мы используем это понятие на стр. 368—378.

Доказательство леммы 9.4.1. Пусть $\mathbf{p}^0$ — любой начальный вектор. Обозначим через $\mathbf{p}(t)$ решение системы (9.2.5) с начальным условием $\mathbf{p}^0$; иначе говоря, $\mathbf{p}(t) = \psi(t, \mathbf{p}^0)$. Рассмотрим меру отклонения

$$V(t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*\|^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*, \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*).$$

Из (9.2.5) следует, что

$$V'(t) = (\mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))) = -(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))); \quad (9.4.1)$$

последнее упрощение следует из применения закона Вальраса. Согласно предположению, $V'(t) < 0$, если только $\mathbf{p}(t)$ не удовлетворяет соотношению $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{0}$. Начиная с этого места, доказательство проводится так же, как и в теореме 9.3.4.

Рассмотрим теперь ряд приложений леммы 9.4.1.

Будем говорить, что совокупные функции избыточного спроса удовлетворяют слабой аксиоме выявленного предпочтения, если из соотношений

$$(p', F(p'') - F(p')) \leq 0, \quad F(p'') \neq F(p') \quad (9.4.2)$$

следует, что

$$(p'', F(p'') - F(p')) < 0$$

(см. также стр. 316).

► Теорема 9.4.1. *Если функции избыточного спроса удовлетворяют слабой аксиоме выявленного предпочтения, то процесс, описываемый системой (9.2.5), глобально устойчив.*

Доказательство. Возьмем $p'' = p^*$ и $p' = p$. Тогда первое неравенство в (9.4.2) выполняется в силу закона Вальраса и определения точки равновесия ($F(p^*) = 0$). Если, далее, вектор p не является равновесным, то $F(p) \neq 0$ и поэтому второе неравенство (9.4.2) также выполняется. Следовательно, $-(p^*, F(p)) < 0$, что означает выполнение условий леммы 9.4.1. Поэтому процесс глобально устойчив, и теорема тем самым доказана.

Слабость теоремы 9.4.1 заключается в том, что выполнение аксиомы выявленного предпочтения обычно можно установить лишь в окрестности точки равновесия; „в целом“ эта аксиома может и не выполняться. Следующий результат является значительно более глубоким и не менее привлекательным с экономической точки зрения.

► Теорема 9.4.2. *Если функции избыточного спроса внутри положительного ортанта обладают свойством строгой валовой заменимости, то процесс, описываемый системой (9.2.5), глобально устойчив. Кроме того, если $p^* > 0$ — вектор равновесия, то для всех $p \neq \lambda p^*$ (λ — вещественное положительное число) выполняется неравенство $(p^*, F(p)) > 0$.*

Замечания по поводу условий теоремы 9.4.2¹⁾. Следует подчеркнуть, что ограничение, заключающееся в требовании выполнения свойств строгой валовой заменимости лишь внутри положительного ортанта, а не во всем (замкнутом) положительном ортанте, является необходимым. В самом деле, свойства строгой валовой заменимости и однородности исключают друг друга. Действительно, предположим

¹⁾ В задаче 7 указывается, что в условиях теоремы любое решение системы (9.2.5), подчиненное условию $p(0) > 0$, необходимо будет иметь $p(t) > 0$ для всех $t > 0$. Таким образом, величина $F(p(t))$ является вполне определенной.

противное. Пусть функция избыточного спроса $F(p)$ однородна и обладает свойством строгой валовой заменимости для всех

$$p = (p_0, p_1, \dots, p_r), \quad p_i \geq 0,$$

включая границу. Возьмем теперь $p^0 = (0, p_1^0, \dots, p_r^0)$, где $p^0 \geq 0$. Тогда $F_0(\lambda p^0) = F_0(p^0)$ не зависит от λ . Но по крайней мере одна из компонент $\lambda p_1^0, \dots, \lambda p_r^0$ строго возрастает, так что и F_0 должна строго возрастать. Получено противоречие.

Если предполагать выполнение свойства строгой валовой заменимости лишь внутри положительного ортанта, то предположения об однородности, о справедливости закона Вальраса и свойство строгой валовой заменимости будут непротиворечивыми.

Примеры векторных функций F , удовлетворяющих перечисленным ограничениям, можно построить следующим образом. Положим для $p > 0$

$$F_k(p) = \frac{\sum_{i=0}^r a_{ik} p_i}{p_k}, \quad k = 0, 1, \dots, r. \quad (9.4.3)$$

Из дальнейших условий $a_{ik} > 0$ для $i \neq k$ и

$$\sum_{k=0}^r a_{ik} = 0$$

тривиально следует выполнение свойства строгой валовой заменимости и справедливость закона Вальраса. Однородность функций $F_k(p)$ также ясна непосредственно. Простой частный случай соотношений (9.4.3) можно получить, полагая $a_{ik} = 1$ для $i \neq k$ и $a_{kk} = -r$ ($i, k = 0, 1, \dots, n$).

Интересно отметить, что функцию избыточного спроса, имеющую вид (9.4.3), можно вывести, осуществив надлежащую максимизацию полезности потребителя. Именно, задача нахождения

$$U(x^*) = \max_x U(x) = \max_{x_i} \sum_{i=0}^r \alpha_i \log(x_i + x_i^0 + c_i)$$

при условии

$$\sum_{i=0}^r p_i x_i = 0,$$

легко решаемая обычным методом множителей Лагранжа, приводит к решению $x_i^*(p) = F_i(p)$ вида (9.4.3). (Здесь α_i — фиксированные положительные постоянные, а $x^0 > 0$ интерпретируется как фиксированный вектор начальных владений каждого потребителя.)

Если в дополнение к условиям теоремы мы потребуем, чтобы $F_j(p) \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow p^0 \geq 0$, где $p_j^0 = 0$, и F_j оставалась в других

случаях конечной, то мы обеспечим существование равновесного вектора цен $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$ (см. задачи 12 и 13 и указания к решению этих задач на стр. 412—413).

Доказательство теоремы 9.4.2. Мы покажем, что если $\mathbf{p} \neq \lambda \cdot \mathbf{p}^*$, то

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p})) \geq 0, \quad (9.4.4)$$

откуда заключение теоремы следует согласно лемме 9.4.1.

Не умаляя общности, мы можем предположить, что

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{u}^* = (1, 1, \dots, 1).$$

Чтобы доказать это, положим

$$H_i(\mathbf{p}) = H_i(p_0, p_1, \dots, p_r) = p_i^* F_i(p_0^* p_0, p_1^* p_1, \dots, p_r^* p_r).$$

Уже доказано, что векторная функция $\mathbf{H}$ удовлетворяет всем тем свойствам, что и $\mathbf{F}$, включая валовую заменимость; но теперь $\mathbf{H}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0}$ в силу закона Вальраса и, таким образом, $\mathbf{u}^*$ — вектор равновесия для $\mathbf{H}$. Отметим, наконец, что $(\mathbf{u}^*, \mathbf{H}(\mathbf{p})) > 0$ при $\mathbf{p} \neq \lambda \mathbf{u}^*$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p})) > 0$ при $\mathbf{p} \neq \lambda \mathbf{p}^*$.

В этом месте нам удобно вернуться к нашим старым обозначениям, содержащим векторную функцию $\mathbf{F}$ и вектор равновесия $\mathbf{p}^* = (1, 1, \dots, 1)$.

Пусть $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_r)$ — любой вектор, не являющийся кратным вектора $\mathbf{p}^*$. Не умаляя общности, мы можем перенумеровать товары таким образом, чтобы

$$p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_r. \quad (9.4.5)$$

Так как $\mathbf{p}$ не является кратным $\mathbf{p}^*$, то в (9.4.5) должен быть хотя бы один знак строгого неравенства, скажем $p_v < p_{v+1}$ для некоторого $0 \leq v \leq r$. Определим теперь последовательность векторов $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^r$ соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^0 &= (p_0, p_0, \dots, p_0), \\ \mathbf{p}^1 &= (p_0, p_1, \dots, p_1), \\ . &. \\ \mathbf{p}^s &= (p_0, p_1, \dots, p_{s-1}, p_s, p_s, \dots, p_s), \\ . &. \\ \mathbf{p}^r &= (p_0, p_1, \dots, p_r), \end{aligned} \tag{9.4.6}$$

где p_j — компоненты вектора $\mathbf{p}$. Очевидно, $\mathbf{p}^T = \mathbf{p}$, и вектор $\mathbf{p}^0$ является кратным $\mathbf{p}^*$. Мы покажем, что

$$(p^*, F(p^{s+1}) - F(p^s)) \geq 0, \quad s = 0, 1, \dots, r-1, \quad (9.4.7)$$

причем для $s = v$ имеет место строгое неравенство. Складывая затем соотношения (9.4.7) и учитывая, что $F(p^0) = 0$, мы выведем требуемое неравенство (9.4.4).

Остается установить справедливость неравенств (9.4.7). Из предположения строгой валовой заменимости (так как увеличиваются лишь компоненты с номерами, большими s) следует, что

$$F_i(p^{s+1}) - F_i(p^s) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, s \quad (9.4.8)$$

со строгим неравенством для $s = v$.

Кроме того, однородность F в сочетании с тем фактом, что $p_s/p_{s+1} \leq 1$, показывает, что

$$F_j(p^{s+1}) - F_j(p^s) = F_j\left(\frac{p_s}{p_{s+1}} p_0, \frac{p_s}{p_{s+1}} p_1, \dots, \frac{p_s}{p_{s+1}} p_s, p_s, p_s, \dots, p_s\right) - \\ - F_j(p_0, p_1, \dots, p_{s-1}, p_s, p_s, \dots, p_s) \leq 0 \quad (9.4.9)$$

для $j = s+1, \dots, r$. Это следует из условия строгой валовой заменимости в предположении, что F_j вычисляется сначала при векторе цен, у которого первые $s+1$ компонент не превосходят соответствующих компонент второго вектора, при котором вычисляется F_j , а последние $r - (s+1)$ компонент этих векторов совпадают. В неравенствах (9.4.9) снова имеет место строгое неравенство при $s = v$.

Итерируя (9.4.9) по s до нуля при фиксированном j , мы получаем

$$F_j(p^{s+1}) \leq F_j(p^s) \leq \dots \leq F_j(p^0) = 0, \quad j = s+1, \dots, r \quad (9.4.10)$$

со строгим неравенством для точки p^v (если p^v содержится в этой последовательности).

Рассмотрим произвольный фиксированный индекс s и разобьем каждый $(r+1)$ -мерный вектор на два вектора меньшей длины, один из которых состоит из первых $s+1$ компонент исходного вектора, а второй — из оставшихся компонент. Пусть x — произвольный $(r+1)$ -мерный вектор; мы будем обозначать соответствующие векторы, построенные по только что изложенному правилу, через x_* и x_{**} . Отметим, что

$$p_*^{s+1} = p_*^s \quad (9.4.11)$$

и

$$p_{**}^{s+1} = (p_r^{s+1}) p_{**}^* = p_{**}^s + (p_{s+1} - p_s) p_{**}^*, \quad (9.4.12)$$

где p_{**}^* — вектор подходящего размера с единичными компонентами. Разбивая выражение $(p^{s+1}, F(p^{s+1})) - (p^s, F(p^s))$ (равное нулю на основании закона Вальраса) в соответствии с предложенной выше

$$0 = (\mathbf{p}_*^{s+1}, \mathbf{F}(\mathbf{p}_*^{s+1})) + (\mathbf{p}_{**}^{s+1}, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^{s+1})) - (\mathbf{p}_*^s, \mathbf{F}(\mathbf{p}_*^s)) - (\mathbf{p}_{**}^s, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^s)) =$$

$$= (\mathbf{p}_*^s, \mathbf{F}(\mathbf{p}_*^{s+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}_*^s)) + (\mathbf{p}_{**}^{s+1}, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^{s+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^s)) + \\ + (p_{s+1} - p_s)(\mathbf{p}_{**}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^s)) =$$

$$= (\mathbf{p}_*^s, \mathbf{F}(\mathbf{p}_*^{s+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}_*^s)) + p_r^{s+1} (\mathbf{p}_{**}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^{s+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^s)) + (p_{s+1} - p_s) (\mathbf{p}_{**}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^s)) \leq$$
$$\leq p_r^{s+1}(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}^{s+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}^s)) + (p_{s+1} - p_s)(\mathbf{p}_{**}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^s))$$
$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}^{s+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}^s)) \geq -\frac{p_{s+1} - p_s}{p_r^{s+1}} (\mathbf{p}_{**}^*, \mathbf{F}(\mathbf{p}_{**}^s)). \quad (9.4.13)$$
$$\frac{p_{s+1} - p_s}{p_s^{s+1}} \geq 0$$

Далее мы рассмотрим процесс регулирования цен, задаваемый системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_l}{dt} = H_l(F_l(\mathbf{p})), \quad l = 0, 1, \dots, r, \quad (9.4.14)$$

где функции $H_i(x)$ непрерывны и сохраняют знак, т. е. $\text{sign } H_i(x) = \text{sign } x$ для всех вещественных x . Кроме того, делаются обычные предположения относительно единственности и непрерывности решения системы (9.4.14) как функции начального положения.

► Теорема 9.4.3. В условиях теоремы 9.4.2, с тем единственным изменением, что выполнения закона Вальраса не требуется, любое решение $\mathbf{p}(t)$ системы (9.4.14), для которого $\mathbf{p}(0) > \mathbf{0}$, устойчиво.

Доказательство. Как устанавливалось в доказательстве теоремы 9.4.2, можно, не умаляя общности, нормировать всякий строго положительный вектор равновесия, приведя его к виду $\mathbf{p}^* = (1, 1, \dots, 1)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что это уже сделано.

Нам понадобится следующий вспомогательный результат.

(I). Если вектор $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \dots, p_r)$ строго положителен и удовлетворяет условию

$$p_{i_0} = \max_{0 \leq j \leq r} p_j > \min_{0 \leq j \leq r} p_j = p_{k_0},$$

то

$$F_{i_0}(\mathbf{p}) < 0 \quad \text{и} \quad F_{k_0}(\mathbf{p}) > 0.$$

Мы докажем только первое неравенство; второе устанавливается аналогичными рассуждениями. С этой целью мы увеличим все компоненты $p_j (j \neq i_0)$, если это необходимо, и получим вектор цен $\mathbf{p}' = (p_{i_0}, p_{i_0}, \dots, p_{i_0})$. В силу свойства строгой валовой заменимости $0 = F_{i_0}(\mathbf{p}') > F_{i_0}(\mathbf{p})$, что и требовалось доказать. Эти же рассуждения показывают, кроме того, что совокупность векторов равновесия исчерпывается множеством $\{\lambda \mathbf{p}^* | \lambda > 0\}$.

Продолжим теперь доказательство теоремы. Пусть $\mathbf{p}(t)$ — решение системы (9.4.14), отвечающее начальному вектору $\mathbf{p}(0) > \mathbf{0}$. В (9.4.18) мы установим, что $\mathbf{p}(t) > \mathbf{0}$, гарантируя тем самым осмысленность выражения $\mathbf{F}(\mathbf{p}(t))$ при всех t . Пока мы будем продолжать рассуждения так, как если бы это было уже установлено. (Читатель может затем проверить, что все наши выводы непротиворечивы.) Введем функции

$$\Lambda(t) = \max_{0 \leq j \leq r} p_j(t), \quad \lambda(t) = \min_{0 \leq j \leq r} p_j(t). \quad (9.4.15)$$

Из определения следует существование индекса i , для которого

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{\Lambda(t+h) - \Lambda(t)}{h} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{p_i(t+h) - p_i(t)}{h} = \frac{dp_i(t)}{dt}$$

($h \rightarrow +0$ означает, что h стремится к нулю, пробегая лишь положительные значения) и

$$p_i(t) = \max_{0 \leq j \leq r} p_j(t).$$

Поэтому в силу утверждения (I)

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{\Lambda(t+h) - \Lambda(t)}{h} \leq H_i(F_i(\mathbf{p}(t))) \leq 0, \quad (9.4.16)$$

где имеет место строгое неравенство, если только $\mathbf{p}(t)$ не имеет вида $\lambda \mathbf{p}^*$ при некотором положительном λ . Аналогичным образом мы получаем

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} \geq 0 \quad (9.4.17)$$

со строгим неравенством, за исключением того случая, когда $\mathbf{p}(t) = \lambda \mathbf{p}^*$ ($\lambda > 0$). Неравенства (9.4.16) и (9.4.17) показывают, что функция $\Lambda(t)$ — невозрастающая, а $\lambda(t)$ — неубывающая (так как обе они непрерывны). В частности,

$$0 < \lambda(0) \leq \lambda(t) \leq \Lambda(t) \leq \Lambda(0); \quad (9.4.18)$$

следовательно, решение $\mathbf{p}(t)$ всегда ограничено сверху и снизу, и каждая компонента $p_j(t)$ строго ограничена от нуля. Положим

$$\tilde{\Lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t).$$

Пусть $\tilde{\mathbf{p}}$ — предельная точка последовательности $\mathbf{p}(t)$, т. е.

$$\tilde{\mathbf{p}} = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t_\mu)$$

для некоторой последовательности $t_\mu \rightarrow \infty$. Пусть $\tilde{\mathbf{p}}(t)$ — решение системы (9.4.14), соответствующее начальному вектору $\tilde{\mathbf{p}}$. Определим

$$\tilde{\Lambda}(t) = \max_{0 \leq j \leq r} \tilde{\mathbf{p}}_j(t).$$

Тогда

$$\tilde{\Lambda}(t) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \Lambda(t + t_\mu) = \tilde{\Lambda},$$

откуда следует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Lambda}(h) - \tilde{\Lambda}(0)}{h} = 0.$$

Согласно (9.4.16), $\tilde{\mathbf{p}}$ есть кратное $\mathbf{p}^*$ и, следовательно, является равновесным вектором. Так как $\tilde{\Lambda}$ определяется единственным образом, мы заключаем, что $\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\Lambda} \mathbf{p}^*$ также единственно. Поэтому $\mathbf{p}(t)$ сходится к $\tilde{\mathbf{p}}$, и теорема доказана.

Отметим, что доказательство этой теоремы не опирается на закон Вальраса. Если, однако, мы будем предполагать вместо строгой валовой заменимости лишь слабую, т. е. потребуем, чтобы $\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \geq 0$ при $i \neq j$ и $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, то справедливость закона Вальраса следует постулировать.

► Теорема 9.4.4. Пусть функции избыточного спроса $F(\mathbf{p})$ однородны и дифференцируемы при $\mathbf{p} > \mathbf{0}$. Пусть они удовлетворяют закону Вальраса и обладают свойством слабой валловой заменимости. Тогда процесс регулирования цен, описываемый системой (9.4.14), устойчив.

(Как обычно, мы предполагаем существование строго положительного вектора равновесия.)

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 9.4.3, соотношение (9.4.18) справедливо и в этом случае; следовательно, решение $\mathbf{p}(t)$ системы (9.4.14) при произвольном начальном векторе $\mathbf{p}(0) > \mathbf{0}$ ограничено и положительно.

Рассмотрим теперь функцию

$$R(t) = \max_{i \in S(t)} \frac{F_i(t)}{p_i(t)} \quad (9.4.19)$$

($F_i(t)$ есть сокращенное обозначение для $F_i(\mathbf{p}(t))$), где

$$S(t) = \left\{ i \mid \frac{H_i(F_i(t))}{p_i(t)} = \max_{0 \leq j \leq r} \frac{H_j(F_j(t))}{p_j(t)} \right\}.$$

Отметим, что $R(t) = 0$ или $R(t) > 0$ в зависимости от того, является ли $\mathbf{p}(t)$ вектором равновесия или нет. В самом деле, если $R(t) \leq 0$, то из определения $R(t)$ следует, что $H_i(F_i(\mathbf{p}(t))) \leq 0$ для $i = 0, 1, \dots, r$ и, так как H_i сохраняют знак, $F_i(\mathbf{p}(t)) \leq 0$. Из этих неравенств и закона Вальраса следует, что $F_i(\mathbf{p}(t)) = 0$, и $\mathbf{p}(t)$ есть вектор равновесия.

Рассмотрим

$$W(t) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{R(t+h) - R(t)}{h} \leq \frac{d}{dt} \frac{F_i(\mathbf{p}(t))}{p_i(t)}, \quad (9.4.20)$$

где последнее неравенство имеет место для некоторого подходящего индекса $i \in S(t)$. Мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{F_i(t)}{p_i(t)} &= -\frac{F_i(t)}{p_i^2(t)} \frac{dp_i(t)}{dt} + \frac{1}{p_i(t)} \sum_{j=0}^r \frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} = \\ &= -\frac{F_i(t) H_i(F_i(t))}{p_i^2(t)} + \frac{1}{p_i(t)} \sum_{j=0}^r \frac{dF_i}{dp_j} H_j(F_j(t)). \end{aligned}$$

Используя свойство слабой валовой замещимости и учитывая смысл индекса i и однородность функции F , мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_i(t)} \sum_{j=0}^r \frac{\partial F_i}{\partial p_j} H_j(F_j(t)) &= \\ &= \frac{H_i(F_i(t))}{p_i(t)} \frac{\partial F_i}{\partial p_i} + \frac{1}{p_i(t)} \sum_{j \neq i} \frac{\partial F_i}{\partial p_j} H_j(F_j(t)) \leq \\ &\leq \frac{H_i(F_i(t))}{p_i(t)} \frac{\partial F_i}{\partial p_i} + \frac{H_i(F_i(t))}{p_i^2(t)} \sum_{j \neq i} \frac{\partial F_i}{\partial p_j} p_j(t) = \\ &= \frac{H_i(F_i(t))}{p_i^2(t)} \sum_{j=0}^r \frac{\partial F_i}{\partial p_j} p_j(t) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (9.4.20) можно записать в виде

$$W(t) \leq - \frac{F_i(t) H_i(F_i(t))}{p_i^2(t)}. \quad (9.4.21)$$

Так как H_i сохраняет знак, мы заключаем на основании (9.4.21) и рассуждений, следующих за (9.4.19), что

$$W(t) \leq 0, \quad (9.4.22)$$

причем знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $F(p(t)) = 0$.

Таким образом, функция $R(t)$ оказывается невозрастающей и неотрицательной (последнее — в силу закона Вальраса); следовательно, $R(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к некоторому пределу $\tilde{R}$. Пусть теперь $\tilde{p}$ — предельная точка для $p(t_v)$, где t_v — некоторая стремящаяся к бесконечности последовательность. Для решения $\tilde{p}(t)$, отвечающего начальному вектору $\tilde{p}$, определим $\tilde{R}(t)$ и $\tilde{W}(t)$ так же, как $R(t)$ и $W(t)$ определялись для $p(t)$. Тогда

$$\tilde{R}(t) = \lim_{v \rightarrow \infty} R(t + t_v) = \tilde{R},$$

и поэтому $\tilde{W}(t) = 0$ при $t = 0$.

В силу (9.4.22) $\tilde{p}$ представляет собой равновесный вектор цен. Теперь мы можем определить для решения $p(t)$ функции

$$\Lambda(t) = \max_j \frac{p_j(t)}{\tilde{p}_j} \quad \text{и} \quad \lambda(t) = \min_j \frac{p_j(t)}{\tilde{p}_j}. \quad (9.4.23)$$

Хотя рассуждения теоремы 9.4.3 приводились по отношению к равновесному вектору p^* , мы легко показали, что они остаются справедли-

ливыми и для $\Lambda(t)$ и $\lambda(t)$, определенных в (9.4.23). Следовательно, существуют оба предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t)$$

и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t).$$

Кроме того, так как $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \tilde{p}$, мы имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 1.$$

Отсюда в сочетании с (9.4.23) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \tilde{p},$$

и доказательство теоремы завершено.

Теоремы 9.4.1—9.4.4 с соответствующими изменениями можно перенести и на случай нормированного процесса регулирования цен.

9.5*. Глобальная устойчивость (продолжение). В последнем пункте мы установили глобальную устойчивость для одного случая, показав, что „норма“, измеряемая евклидовым расстоянием между решением и равновесным вектором цен, убывает во времени. В дальнейшем мы получили более сильные результаты, используя другие нормы. В этом пункте мы снова используем с той же целью нормы, отличные от евклидова расстояния при различных типах условий. Три основные теоремы этого пункта сформулированы для нормированного процесса. При помощи соответствующих изменений эти теоремы можно переделать в предложения, справедливые для ненормированного процесса.

► **Теорема 9.5.1.** *Нормированный процесс, описываемый системой (9.2.8), глобально устойчив, если существует набор таких положительных постоянных $(c_1, c_2, \dots, c_r)$, что для всех $j = 1, 2, \dots, r$*

$$G_{jj} < 0, \quad c_j |G_{jj}| > \sum_{k \neq j}^r c_k |G_{kj}|, \quad (9.5.1)$$

где $G_{kj} = \partial G_k / \partial q_j$.

Замечание 9.5.1. *Условие доминирующей диагонали означает, что цена k -го товара определяет спрос на этот товар в большей степени, чем спрос на другие товары.*

Доказательство теоремы 9.5.1. Рассмотрим функцию

$$V(t) = \sum_{j=1}^r c_j |G_j|. \quad (9.5.2)$$

Легко показывается, что

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} = W(t)$$

существует. Эту величину $W(t)$ можно вычислить следующим образом:

$$W(t) = \sum_j c_j \operatorname{sign} G_j(t) \sum_{k=1}^r \frac{\partial G_j}{\partial q_k} G_k + \sum_{j'} c_{j'} \left| \sum_{k=1}^r \frac{\partial G_{j'}}{\partial q_k} G_k \right|, \quad (9.5.3)$$

где первая сумма распространена на те индексы j , для которых $G_j(t) \neq 0$, а вторая — на те j , для которых $G_j(t) = 0$. Символ sign понимается обычным образом, а именно

$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} +1, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -1, & a < 0. \end{cases}$$

Мы покажем, что $-W(t)$ положительно, если нарушается равенство $G_j = 0$ для всех j (т. е. если решение совпадает с некоторым равновесным вектором цен). Рассмотрим $L_{k_0}(t)$ — коэффициент в выражении $-W(t)$ при $G_{k_0}(t)$, предполагая его ненулевым. Именно,

$$\begin{aligned} L_{k_0}(t) = & -c_{k_0} \frac{\partial G_{k_0}}{\partial q_{k_0}} \operatorname{sign} G_{k_0}(t) - \sum_{j \neq k_0} c_j \operatorname{sign} G_j(t) \frac{\partial G_j}{\partial q_{k_0}} - \\ & - \sum_{j \neq k_0} c_j \operatorname{sign} \left(\sum_{k=1}^r \frac{\partial G_j}{\partial q_k} G_k \right) \frac{\partial G_j}{\partial q_{k_0}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} G_{k_0}(t) L_{k_0}(t) \geq \\ \geq c_{k_0} \left| \frac{\partial G_{k_0}}{\partial q_{k_0}} \right| |G_{k_0}(t)| - \left(\sum_{j \neq k_0} c_j \left| \frac{\partial G_j}{\partial q_{k_0}} \right| \right) |G_{k_0}(t)|, \end{aligned} \quad (9.5.4)$$

и, согласно предположенному, правая часть строго положительна. Складывая неравенства (9.5.4) при различных k_0 (отметим, что члены, в которых $G_{k_0}(t) = 0$, не влияют на величину $W(t)$ и поэтому не играют никакой роли), мы получим $W(t) < 0$, за исключением того случая, когда все $G_k(t) = 0$. Определенная согласно (9.5.2) норма $V(t)$ строго убывает, откуда, как и в теореме 9.3.4, следует глобальная устойчивость.

Результат, двойственный к теореме 9.5.1, заключается в следующем.

► Теорема 9.5.2. Нормированный процесс, описываемый системой (9.2.8), глобально устойчив, если существует набор таких положительных постоянных $(c_1, c_2, \dots, c_r)$, что для всех $j = 1, 2, \dots, r$

$$G_{jj} < 0, \quad c_j |G_{jj}| > \sum_{k \neq j} c_k |G_{jk}|. \quad (9.5.5)$$

Замечание 9.5.2. Условие теоремы можно несколько вольно истолковать следующим образом: цена k -го товара оказывает наибольшее влияние на функцию избыточного спроса для этого товара.

Разница между теоремами 9.5.1 и 9.5.2 заключается в том, что условие (9.5.1) относится к суммам по столбцам, а условие (9.5.5) — к суммам по строкам матрицы $\|G_{jk}\|$. Эти наборы условий можно истолковать как двойственные критерии, каждый из которых обеспечивает глобальную устойчивость. Доказательства также проводятся двойственным образом.

Доказательство теоремы 9.5.2. Рассмотрим норму

$$V(t) = \max_j \frac{|G_j|}{c_j}. \quad (9.5.6)$$

С точки зрения теории линейных пространств норму (9.5.6) можно рассматривать как сопряженную (двойственную) к норме (9.5.2). Здесь, как и раньше, мы покажем, что $dV/dt < 0$ всюду (где существует эта производная), за исключением точек равновесия. Предположим, что

$$V(t) = \frac{G_{j_0}(q(t))}{c_{j_0}} \operatorname{sign} G_{j_0}(q(t))$$

и $G_{j_0}(q(t)) \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\operatorname{sign} G_{j_0}(q(t))}{c_{j_0}} \sum_k \frac{\partial G_{j_0}}{\partial p_k} G_k \leq \\ &\leq - \frac{|G_{j_0}|}{c_{j_0}} \left(- \frac{\partial G_{j_0}}{\partial p_{j_0}} \right) + \frac{1}{c_{j_0}} \sum_{k \neq j_0} c_k \left| \frac{\partial G_{j_0}}{\partial p_k} \right| \frac{|G_k|}{c_k}. \end{aligned}$$

Но, по определению j_0 ,

$$\frac{|G_j|}{c_j} \leq \frac{|G_{j_0}|}{c_{j_0}},$$

и, следовательно, мы получаем

$$\frac{dV}{dt} \leq - \frac{|G_{j_0}|}{c_{j_0}} \left| \frac{\partial G_{j_0}}{\partial p_{j_0}} \right| + \frac{|G_{j_0}|}{c_{j_0}^2} \sum_{k \neq j_0} c_k \left| \frac{\partial G_{j_0}}{\partial p_k} \right| < 0; \quad (9.5.7)$$

последнее неравенство имеет место в силу условий теоремы и того, что $|G_{j_0}(t)| \neq 0$. Разумеется, при $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ мы находимся в равновесном векторе цен и остаемся в нем при любых t . Если производная dV/dt не существует, мы оценим предел

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h},$$

который существует всегда, и изменим соответствующим образом наши рассуждения. Глобальная устойчивость обычным образом следует из (9.5.7).

Критерий иного рода, также обеспечивающий глобальную устойчивость, заключается в требовании отрицательной квазиопределенности матрицы $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \|\partial G_i(\mathbf{q})/\partial q_j\|$. (Определение отрицательно квазиопределенной матрицы см. стр. 356.) Небольшое обобщение этого критерия содержится в следующей теореме.

Теорема 9.5.3. Пусть $\mathbf{S}$ — положительно определенная матрица порядка r . Если матрица $\mathbf{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{B}(\mathbf{q})$ при любом векторе цен $\mathbf{q}$ является отрицательно определенной, то нормированный процесс глобально устойчив.

(Отметим, что если $\mathbf{S}$ — единичная матрица, то это условие сводится к отрицательной квазиопределенности матрицы $\mathbf{B}(\mathbf{q})$.)

Доказательство. Здесь мы введем для $\mathbf{G}(\mathbf{q}(t))$ метрику

$$V(t) = (\mathbf{G}, \mathbf{S} \mathbf{G}). \quad (9.5.8)$$

Дифференцирование $V(t)$ дает

$$V'(t) = (\mathbf{G}, [\mathbf{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{B}(\mathbf{q})] \mathbf{G}).$$

Это выражение строго отрицательно, за исключением случая $\mathbf{G} = \mathbf{0}$. Теперь глобальная устойчивость выводится уже известным нам образом.

В заключение этого пункта мы наметим общий подход к проблеме установления устойчивости динамических процессов.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, r, \quad (9.5.9)$$

где $(f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}))$ — непрерывная векторная функция, определенная на множестве $X \subset E^r$.

Предполагается, что множество X замкнуто и имеет непустую внутренность X^0 ; далее, что решение $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}^0)$ системы для любого начального положения $\mathbf{x}^0 \in X^0$ определено единственным образом, непрерывно относительно $\mathbf{x}^0$ и остается в X .

Рассмотрим множество E всех равновесных векторов в X , т. е.

$$E = \{\bar{x} \mid \bar{x} \in X, f(\bar{x}) = 0\},$$

и определим расстояние от точки $x \in X$ до множества E посредством

$$V(x) = \inf_{\bar{x} \in E} |x - \bar{x}|^2.$$

Система (9.5.9) называется *квазистойчивой*, если для любого начального положения $x^0 \in X^0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t; x^0)) = 0.$$

Сформулируем без доказательства следующую общую теорему.

► Теорема 9.5.4. Если при любом начальном положении $x^0 \in X^0$ решение системы (9.5.9) ограничено и на X существует функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что $D_{\varphi, f}(x) < 0$ для всех $x \in X \setminus E$, то система (9.5.9) квазистойчива.

Функция $D_{\varphi, f}$ определяется следующим образом. В общем случае

$$D_{\varphi, f}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta_i \varphi(x)}{\Delta x_i} f_i(x),$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_i \varphi(x) = & \varphi(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_r) - \\ & - \varphi(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_{i-1} + \Delta x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_r). \end{aligned}$$

Если функция φ дифференцируема, то

$$D_{\varphi, f} = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i.$$

Эту теорему можно доказать, видоизменяя соответствующим образом рассуждения, использованные при доказательстве теорем 9.4.3 и 9.4.4 предыдущего пункта.

В качестве одного из конкретных приложений этой теоремы рассмотрим случай, когда функция $f(x)$ имеет симметричную матрицу из частных производных, т. е. $\partial f_i / \partial x_j = \partial f_j / \partial x_i$ для всех i и j . На основании известного свойства полных дифференциалов мы заключаем о существовании потенциальной функции φ , для которой

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i(x).$$

Поэтому для $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ имеем

$$\sum_{i=1}^r \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) = - \sum_{i=1}^r f_i^2(\mathbf{x}) < 0,$$

и можно применить нашу теорему. В связи с этим читатель может также обратиться к замечаниям в конце этой главы (см. также задачу 14).

Наряду с этими понятиями мы приведем один общий результат о квазиустойчивости, применимый в случае векторной функции избыточного спроса, индуцированной задачей максимизации полезности для одного потребителя.

Пусть $U(\mathbf{x})$ — функция полезности, определенная для всех $\mathbf{x} \in E^{r+1}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, и удовлетворяющая неравенству

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} > 0 \quad (9.5.9)$$

хотя бы для одного индекса i . (Это, по сути дела, означает, что если пренебречь бюджетными ограничениями, то не существует вектора потребления, способного насытить все желания потребителя.)

Индивидуальный потребитель выбирает вектор потребления, максимизирующий его функцию полезности с учетом его бюджетного ограничения. Говоря формально, мы постулируем существование единственного $\mathbf{x}^*(\mathbf{p})$, для которого

$$U(\mathbf{x}^*) = \max_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x})$$

при условии, что

$$\sum_{i=0}^r p_i x_i = \sum_{i=0}^r p_i x_i^0$$

и $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Здесь $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ изображает фиксированный вектор цен, а $\mathbf{x}^0 > \mathbf{0}$ интерпретируется как фиксированный вектор начальных владений. Максимизацию можно выполнить методом множителей Лагранжа. В результате мы получим необходимые условия

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) \leq \lambda p_i, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad (9.5.10)$$

где в i -м неравенстве имеет место знак равенства, если $x_i^* > 0$. Из предположения (9.5.9) следует, что $\lambda > 0$.

Определим для этой конструкции процесс регулирования цен посредством системы (9.4.14), где $\mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*(\mathbf{p})$. Теперь мы можем доказать квазиустойчивость этого процесса. С этой целью рассмотрим функцию $\varphi(\mathbf{p}(t)) = U(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}))$. Мы имеем

$$\varphi(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=0}^r \frac{\partial U}{\partial x_i}(\mathbf{x}^*) \frac{dx_i^*}{dt} \leq \lambda \sum_{i=0}^r p_i \frac{dx_i^*}{dt}, \quad (9.5.11)$$

так как либо $x_i^* > 0$ и в (9.5.10) имеет место равенство, либо $x_i^* = 0$ и тогда, очевидно, $dx_i^*/dt \geq 0$.

С помощью (9.4.14) и тождества

$$\sum_{i=0}^r p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = -x_j^* + x_j^0, \quad j=0, 1, \dots, r,$$

получающегося при дифференцировании бюджетного ограничения, мы можем свести (9.5.11) к

$$\varphi(t) \leq -\lambda \sum_{j=0}^r (x_j^0 - x_j^*) H_j(F_j(t)) \leq 0, \quad (9.5.12)$$

где имеет место строгое неравенство, если только не выполнено равенство $F_j(\mathbf{p}(t)) = 0$. Квазиустойчивость следует из неравенства (9.5.12) обычным образом.

Дальнейшие результаты об устойчивости читатель может найти в задачах 5—15 и в обсуждении их решений на стр. 412—413.

9.6*. Формулировка глобальной устойчивости в терминах разностных уравнений. В этом пункте мы опишем механизм регулирования цен во времени при помощи системы разностных уравнений. Эта система имеет вид

$$\mathbf{p}(t+1) = \max[\mathbf{0}, \mathbf{p}(t) + \rho \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))], \quad t=0, 1, 2, \dots, \quad (9.6.1)$$

где $\mathbf{p}(t)$ — вектор цен в момент времени t , $\mathbf{F}$ представляет собой функцию избыточного спроса, а ρ — фиксированная положительная постоянная.

Эта формулировка труднее поддается исследованию, чем формулировка в терминах дифференциальных уравнений. Тем не менее нам удастся довольно просто установить существование равновесного вектора цен. Кроме того, в условиях строгой валовой заменимости, когда вектор цен единствен, мы установим устойчивость в целом.

Как всегда, мы предполагаем для любого неотрицательного вектора цен справедливость закона Вальраса

$$\sum_{i=0}^r p_i F_i(p_0, p_1, \dots, p_r) = 0. \quad (9.6.2)$$

Исследуемая здесь система соответствует ненормированному процессу; в этом случае принято предполагать, что функции избыточного спроса — однородные функции нулевой степени.

Прежде всего, мы довольно просто установим существование равновесного вектора цен. Напомним, что равновесный вектор есть такой вектор цен $\mathbf{p}^* = (p_0^*, p_1^*, \dots, p_r^*)$, для которого

$$F_i(\mathbf{p}^*) \leq 0. \quad (9.6.3)$$

Нормируем все ненулевые векторы цен так, чтобы

$$\sum_{i=0}^r p_i = 1,$$

и обозначим множество всех нормированных векторов цен через $\mathcal{U}$. Отметим, что для любого $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$

$$\sum_{i=0}^r \max [0, p_i + \rho F_i(\mathbf{p})] = \lambda(\mathbf{p}) > 0.$$

В противном случае мы имели бы $p_i + \rho F_i(\mathbf{p}) \leq 0$ для всех i , и поэтому

$$\sum_{i=0}^r p_i^2 = \sum_{i=0}^r p_i^2 + \rho \sum_{i=0}^r p_i F_i(\mathbf{p}) \leq 0,$$

где первое равенство имеет место в силу закона Вальраса. Но тогда $p_i = 0$ для всех i , что противоречит предположению о том, что $\mathbf{p} \in \mathcal{U}$.

Определим теперь отображение $\mathbf{T}$ множества $\mathcal{U}$ в себя, как

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda(\mathbf{p})} \max [0, \mathbf{p} + \rho \mathbf{F}(\mathbf{p})]$$

(максимум здесь берется покомпонентно). Очевидно, что отображение $\mathbf{T}(\mathbf{p})$ непрерывно. Поэтому мы можем применить теорему Брауэра о неподвижной точке, из которой следует существование вектора $\bar{\mathbf{p}} \in \mathcal{U}$, для которого $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{T}(\bar{\mathbf{p}})$, т. е.

$$\lambda(\bar{\mathbf{p}}) \bar{\mathbf{p}} = \max [0, \bar{\mathbf{p}} + \rho \mathbf{F}(\bar{\mathbf{p}})].$$

Тогда

$$\lambda(\bar{\mathbf{p}}) \bar{p}_i \geq \bar{p}_i + \rho F_i(\bar{\mathbf{p}}), \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad (9.6.4)$$

где имеет место равенство для всех тех i , для которых $\bar{p}_i > 0$. Следовательно, умножая на $\bar{p}_i$ и складывая получающиеся уравнения, мы имеем

$$\lambda(\bar{\mathbf{p}}) \sum_{i=0}^r \bar{p}_i^2 = \sum_{i=0}^r \bar{p}_i^2 + \rho \sum_{i=0}^r \bar{p}_i F_i(\bar{\mathbf{p}}) = \sum_{i=0}^r \bar{p}_i^2.$$

Поэтому $\lambda(\bar{\mathbf{p}}) = 1$, и соотношения (9.6.4) показывают, что $\bar{\mathbf{p}}$ — вектор равновесия.

Установив существование равновесия, мы перейдем к изучению динамической устойчивости. Следующая теорема дает критерий устойчивости для системы с дискретным временем (9.6.1).

► **Теорема 9.6.1.** Пусть $\mathbf{p}^*$ — строго положительный равновесный вектор. Пусть векторная функция избыточного спроса $\mathbf{F}$ обладает свойством строгой валовой заменимости

в целом. Тогда существует такое положительное ρ_0 , что для всех $\rho < \rho_0$ система цен $\mathbf{p}(t)$, удовлетворяющая (9.6.1), сходится к равновесному вектору цен.

Замечание 9.6.1. Заключение этой теоремы можно интерпретировать следующим образом: если существенны только относительные цены, то процесс регулирования цен с дискретным временем, определяемый системой (9.6.1), глобально устойчив.

Доказательство теоремы 9.6.1. Рассмотрим норму

$$V(t) = \sum_{i=0}^r [p_i(t) - p_i^*]^2.$$

Непосредственный подсчет с использованием (9.6.1) показывает, что

$$\begin{aligned} V(t) - V(t+1) &= \sum_{i=0}^r [p_i^2(t) - p_i^2(t+1) - 2[p_i(t) - p_i(t+1)]p_i^*] \geq \\ &\geq \sum_{i=0}^r [p_i^2(t) - p_i^2(t+1)] + 2\rho \sum_{i=0}^r p_i^* F_i(\mathbf{p}(t)). \end{aligned} \quad (9.6.5)$$

Обозначим через R совокупность тех индексов из множества $\{1, 2, \dots, r\}$, для которых $p_i(t+1) = p_i(t) + \rho F_i(\mathbf{p}(t))$, а через R' — дополнительное множество индексов, для которых $p_i(t+1) = 0$. Отметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \in R} [p_i^2(t) - p_i^2(t+1)] &= \\ &= -\rho^2 \sum_{i \in R} F_i^2(\mathbf{p}(t)) - 2\rho \sum_{i \in R} p_i(t) F_i(\mathbf{p}(t)) = \\ &= -\rho^2 \sum_{i \in R} F_i^2(\mathbf{p}(t)) + 2\rho \sum_{i \in R'} p_i(t) F_i(\mathbf{p}(t)); \end{aligned}$$

последнее равенство является следствием закона Вальраса (9.6.2). Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r [p_i^2(t) - p_i^2(t+1)] &= \\ &= -\rho^2 \sum_{i=1}^r F_i^2(\mathbf{p}(t)) + \sum_{i \in R'} [p_i(t) + \rho F_i(\mathbf{p}(t))]^2 \geq -\rho^2 \sum_{i=1}^r F_i^2(\mathbf{p}(t)). \end{aligned}$$

Выберем ρ , удовлетворяющее неравенству

$$0 < \rho < \min_{\mathbf{p} \neq \mathbf{p}^*} \frac{2 \sum_{i=0}^r p_i^* F_i(\mathbf{p})}{\sum_{i=0}^r F_i^2(\mathbf{p})}. \quad (9.6.6)$$

Допустимость его проверяется следующим образом. Разложим числители и знаменатели правой части неравенства (9.6.6) в окрестности $\mathbf{p}^*$ и после упрощения получим

$$S(\mathbf{p}) = \frac{\sum_{j,k=0}^r p_j \left(\frac{\partial F_j(\mathbf{p}^*)}{\partial p_k} + \frac{\partial F_k(\mathbf{p}^*)}{\partial p_j} \right) p_k}{\sum_{j,k=0}^r p_k p_j \sum_{i=0}^r \frac{\partial F_i(\mathbf{p}^*)}{\partial p_j} \frac{\partial F_i(\mathbf{p}^*)}{\partial p_k}}$$

[см. (9.3.6)]. Дальнейшее разложение квадратичных форм, стоящих в числителе и знаменателе выражения для $S(\mathbf{p})$, покажет, что в силу строгой валовой заменимости

$$\inf_{\mathbf{p} \neq \lambda \mathbf{p}^*} S(\mathbf{p}) > 0.$$

Отметим далее, что в силу теоремы 9.4.2

$$\sum_{i=0}^r p_i^* F_i(\mathbf{p}) > 0, \sum_{i=0}^r F_i^2(\mathbf{p}) > 0$$

для всех $\mathbf{p} \neq \lambda \mathbf{p}^*$. Непрерывность и однородность $F_i(\mathbf{p})$, а также отграниченность $S(\mathbf{p})$ от нуля позволяют нам заключить о справедливости (9.6.6). Из (9.6.5) следует, что для любого выбора ρ , удовлетворяющего неравенству (9.6.6),

$$V(t) > V(t+1), \quad (9.6.7)$$

если только $\mathbf{p}(t) \neq \lambda \mathbf{p}^*$. Следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$$

существует, и всякая предельная точка $\mathbf{p}(t)$ является, как это было показано при доказательстве теоремы 9.3.4, некоторым кратным $\mathbf{p}^*$. Так как теперь сходимость $\mathbf{p}(t)$ устанавливается без труда, мы опускаем подробности; доказательство теоремы тем самым завершено.

9.7. Устойчивость и ожидания (модель I). Предыдущие модели описывали динамический процесс регулирования цен в ответ на изменения функций избыточного спроса, являющихся функциями только от текущих рыночных цен. В этом и в следующем пунктах мы исследуем влияние на динамическую устойчивость рыночной системы не только имеющихся цен, но и цен, ожидаемых в будущем.

Имея в виду эту цель, мы предлагаем записывать общую систему динамического равновесия в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{K}\mathbf{F}, \quad (9.7.1)$$

где $\mathbf{p}$ — вектор цен r -компонентного набора товаров, $\mathbf{K}$ представляет собой $r \times r$ -матрицу с постоянными элементами, определяющую быстроту реагирования цен на избыточный спрос, а $\mathbf{F}$, как обычно, обозначает вектор избыточного спроса. Здесь каждая компонента вектора $\mathbf{F}$ является, вообще говоря, функцией от вектора текущих цен $\mathbf{p}$ и вектора $\mathbf{p}^f$ цен, ожидаемых в будущем. В случае дискретного времени $\mathbf{p}^f$ является вектором цен, ожидаемых на следующем отрезке времени, а в случае непрерывного времени — вектором цен на следующий бесконечно малый промежуток времени.

В наших предыдущих рассмотрениях мы неявно предполагали, что $\mathbf{p}^f = \mathbf{p}$, т. е. что ожидания статичны. В соответствии с этим мы брали в качестве матрицы $\mathbf{K}$ по сути дела диагональную матрицу с положительными элементами. Здесь же, напротив, мы будем учитывать флуктуации текущих цен, допуская отклонения цен, ожидаемых в будущем, от текущих цен в соответствии с некоторым определяющим законом. Впоследствии мы покажем, что устойчивая динамическая система может амортизировать влияния некоторых экстраполяций изменений цен, а также соответствующих ожидаемых изменений цен в будущем и сохранить свою устойчивость. Влияния цен, ожидаемых в будущем, мы будем рассматривать лишь применительно к структуре локальной устойчивости.

В состоянии равновесия ($\mathbf{p} = \mathbf{p}^*$) обычно предполагают, что $\mathbf{p}^f = \mathbf{p}^*$, т. е. что ожидания и действительные цены совпадают. Следовательно, мы можем, используя тейлоровское разложение, аппроксимировать функцию $F_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^f) = F_i(p_1, \dots, p_r; p_1^f, \dots, p_r^f)$ вблизи равновесного вектора цен $\mathbf{p}^*$ линейным выражением

$$F_i = \sum_{j=1}^r a_{ij}(p_j - p_j^*) + \sum_{j=1}^r b_{ij}(p_j^f - p_j^*). \quad (9.7.2)$$

Таким образом, задачу обеспечения локальной устойчивости системы (9.7.1) можно свести к задаче об устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{K}(\mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{w}), \quad (9.7.3)$$

где $\mathbf{z}(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^*$ и $\mathbf{w}(t) = \mathbf{p}^f(t) - \mathbf{p}^*$. Доказательство этого утверждения, по существу, совпадает с рассуждением, приведенным на стр. 356.

Линейная система (9.7.3) содержит две функции $\mathbf{z}(t)$ и $\mathbf{w}(t)$. Поэтому для того, чтобы вполне определить динамику системы цен, необходимо указать зависимость $\mathbf{w}(t)$ от текущих цен. Простейшее из возможных предположений заключается в том, что изменения бу-

душей цены i -го товара вызваны изменениями его теперешней цены согласно соотношению

$$p_i^f = p_i + \eta_i \frac{dp_i}{dt}, \quad (9.7.4)$$

где η_i — некоторая постоянная. Если $\eta_i = 0$, то мы ожидаем, что текущие цены сохраняются. Если $\eta_i > 0$, то при образовании будущей цены к текущей цене добавляется некоторое кратное изменения цен; следовательно, ожидаемые цены можно охарактеризовать, как экстраполируемые. В случае $\eta_i < 0$ ожидаемые цены не меняются так резко, как фактические цены.

Используя векторные обозначения, соотношения (9.7.4) можно записать в виде

$$\mathbf{p}^f = \mathbf{p} + \boldsymbol{\eta} \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (9.7.5)$$

где $\boldsymbol{\eta}$ — диагональная матрица. Сразу же обобщая это, мы можем в качестве $\boldsymbol{\eta}$ взять произвольную матрицу с постоянными элементами. В обозначениях (9.7.3)

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\eta} \frac{dz(t)}{dt}. \quad (9.7.6)$$

Подставляя (9.7.6) в (9.7.3), мы получаем

$$\frac{dz}{dt} = [\mathbf{I} - \mathbf{KB}\boldsymbol{\eta}]^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{z}, \quad (9.7.7)$$

если только матрица $(\mathbf{I} - \mathbf{KB}\boldsymbol{\eta})^{-1}$ существует. В дальнейшем мы для удобства предположим, что эта обратная матрица вполне определена. В случае статических ожиданий ($\mathbf{p}^f = \mathbf{p}$) соответствующая динамическая система сводится к

$$\frac{dz}{dt} = \mathbf{K}(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{z}. \quad (9.7.8)$$

Теперь мы рассмотрим такие условия на матрицы, содержащиеся в системах (9.7.7) и (9.7.8), из которых будет следовать устойчивость или неустойчивость обеих этих систем сразу.

Поставленную выше задачу можно абстрактно сформулировать следующим образом.

Пусть $\mathbf{T}$ — устойчивая матрица (все ее собственные числа имеют отрицательные вещественные части). Представляют интерес два вопроса. Во-первых, при каких условиях на матрицу $\mathbf{Q}$ матрица $\mathbf{QT}$ снова будет устойчивой. Во-вторых, какими свойствами должны обладать матрицы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{Q}$, чтобы $\mathbf{T}$ и $\mathbf{QT}$ были устойчивы одновременно. Частичные ответы на эти вопросы даются теоремами 9.7.1 и 9.7.2 (см. также задачи 1 — 4).

► Теорема 9.7.1. Пусть T — устойчивая M -матрица (см. стр. 299), а Q — вещественная диагональная матрица. Тогда матрица QT устойчива в том и только в том случае, если все диагональные элементы матрицы Q строго положительны.

Доказательство. Достаточность. Условие теоремы утверждает, что все диагональные элементы матрицы Q строго положительны. Очевидно, QT является M -матрицей. Кроме того, $-(QT)^{-1} = -T^{-1}Q^{-1}$ сохраняет положительность [согласно свойству в) на стр. 300], и поэтому матрица QT устойчива.

Доказательство необходимости опирается на следующую лемму.

► Лемма 9.7.1. Пусть T — устойчивая M -матрица порядка r . Если D — невырожденная диагональная матрица, то матрица DT не имеет собственных чисел на мнимой оси.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $i\lambda$ — собственное число матрицы $Q = DT$. Очевидно, что $\lambda \neq 0$ ввиду невырожденности матрицы T . Следовательно, существует ненулевой вектор x , для которого

$$d_{kk} \sum_{j=1}^r t_{kj} x_j = i\lambda x_k \quad (k = 1, 2, \dots, r). \quad (9.7.9)$$

Прибавляя к матрице T единичную матрицу, умноженную на достаточно большое положительное число μ , мы можем обеспечить неотрицательность матрицы $S = T + \mu I$. Уравнение (9.7.9) переходит в

$$\sum_{j=1}^r S_{kj} x_j = \left(\mu + \frac{i\lambda}{d_{kk}} \right) x_k. \quad (9.7.10)$$

Беря модули и полагая $y_i = |x_i|$, мы получаем

$$Sy \geq \left(\min_k \left| \mu + \frac{i\lambda}{d_{kk}} \right| \right) y \geq \mu y$$

и $y \geq 0$. Из характеристики спектрального радиуса неотрицательных матриц, приведенной в следствии 8.2.1, вытекает, что существует собственное число $\lambda_0(S) \geq \mu$. Следовательно, матрица T имеет неотрицательное собственное число, что противоречит сделанному предположению.

Доказательство теоремы 9.7.1. Необходимость. Отметим сначала, что матрица Q невырожденная, так как матрица QT устойчива.

Введем вещественный параметр θ , $0 \leq \theta \leq 1$, и рассмотрим семейство матриц

$$U(\theta) = Q[\theta T - (1 - \theta)I].$$

При любом θ ($0 \leq \theta \leq 1$) выражение, заключенное в скобки, очевидно, представляет собой устойчивую M -матрицу; поэтому, согласно лемме, $U(\theta)$ не может иметь мнимых собственных чисел. Но собственные числа изменяются непрерывно, и, следовательно, при любом θ ($0 \leq \theta \leq 1$) они всегда лежат внутри левой половины комплексной плоскости, так как при $\theta = 1$ дело обстоит именно так. Используя этот факт для $\theta = 0$, мы заключаем, что все диагональные элементы матрицы Q положительны, что и требовалось.

► Теорема 9.7.2. Пусть S — симметричная матрица, а T — вещественная отрицательно квазиопределенная матрица. Тогда матрица ST устойчива в том и только в том случае, когда матрица S положительно определенная.

Замечание 9.7.1. Напомним читателю, что матрица T называется отрицательно квазиопределенной, если форма (x, Tx) при любом ненулевом вещественном векторе x отрицательна.

Вещественная отрицательно определенная матрица устойчива. Доказывается это следующим образом. Пусть

$$Tx = \lambda x, \quad (9.7.11)$$

где $x = x_1 + ix_2$ и $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, причем x_1 и x_2 — вещественные векторы, не равные одновременно нулю. Разделяя в (9.7.11) вещественную и мнимую части, мы получим

$$Tx_1 = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2, \quad Tx_2 = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1.$$

Следовательно,

$$(x_1, Tx_1) + (x_2, Tx_2) = \lambda_1 [(x_1, x_1) + (x_2, x_2)],$$

откуда мы заключаем, что $\lambda_1 < 0$.

Доказательство. Достаточность. Если матрица S положительно определенная, то $S^{1/2}TS^{1/2}$ будет вещественной отрицательно определенной и, следовательно, устойчивой матрицей, где матрица $S^{1/2}$ — вещественная положительно определенная. Но матрица $RS^{1/2}TS^{1/2}R^{-1} = ST$ устойчива при $R = S^{1/2}$, так как она получена из устойчивой матрицы при помощи преобразования подобия.

Необходимость. Мы покажем, что если S — неособенная симметричная, а T — вещественная отрицательно определенная матрица, то матрица ST не имеет чисто мнимых собственных чисел. Предположим с этой целью, что существует такой ненулевой вектор x , для которого $STx = \lambda x$. Домножим обе части на $\bar{x}S^{-1}$, где $\bar{x}$ — вектор, сопряженный к x :

$$(\bar{x}S^{-1}, STx) = (\bar{x}, Tx) = \lambda (\bar{x}, S^{-1}x). \quad (9.7.12)$$

Запишем $x = y + iz$ и $\lambda = \alpha + i\beta$, где y, z, α и β вещественны. Приравнявая в (9.7.12) вещественные части, мы получаем

$$(y, Ty) + (z, Tz) = \alpha [(y, S^{-1}y) + (z, S^{-1}z)]. \quad (9.7.13)$$

Левая часть строго отрицательна и поэтому $\alpha \neq 0$. Далее доказательство в точности следует доказательству теоремы 9.7.1. Детали мы опустим.

Экономический смысл теоремы 9.7.1 совершенно ясен. В свое время мы обсуждали соотношение между M -матрицами и валовыми заменителями. Неотрицательность внедиагональных элементов матрицы $T = A + B$ означает, что система не содержит дополнительных товаров. Если, кроме того, матрицы K, B и η диагональны, то теорема 9.7.1 утверждает, что модель без ожиданий устойчива в том и только в том случае, если все k_{ii} положительны. Кроме того, введение для той же матрицы $T = A + B$ коэффициентов ожидания не нарушает устойчивости тогда и только тогда, когда $k_{ii}b_{ii}\eta_{ii} < 1$ для всех i . В теореме 9.7.2 рассматривается другой случай, когда влияния доходов, по существу, симметричны. Здесь мы уже не требуем диагональности матриц K, B и η .

Дальнейшие результаты в духе этих теорем можно получить, применяя к матрицам A и T преобразования подобия (см. задачу 1).

9.8. Устойчивость и ожидания (модель II). Соотношение между ожидаемыми будущими ценами p^f и фактическими ценами мы выражали посредством равенства (9.7.4) или — в более общей форме — посредством равенства (9.7.5).

Другим таким соотношением, имеющим определенные экономические достоинства, может служить

$$\frac{dp_i^f}{dt} = \beta_i [p_i(t) - p_i^f(t)], \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (9.8.1)$$

При $\beta_i = 0$ изменения в текущих ценах не влияют на ожидаемые цены. Условием статических ожиданий будет теперь $\beta_i = +\infty$.

Для данного поведения $p_i(t)$ цен во времени уравнение (9.8.1) имеет решение

$$p_i^f(t) = p_i^f(0) e^{-\beta_i t} + e^{-\beta_i t} \int_0^t \beta_i p_i(u) e^{\beta_i u} du, \quad (9.8.2)$$

где $p_i^f(0)$ — начальное значение ожидаемой цены i -го товара. Если начало процесса расположено в достаточно отдаленном прошлом, то в (9.8.2) можно пренебречь членом, содержащим $p_i^f(0)$; следовательно, в качестве $p_i^f(t)$ можно взять экспоненциально взвешенное среднее прошлых цен. Поэтому уравнения (9.8.1) показывают, что

ожидаемая цена является надлежащим образом [в случае (9.8.2) — экспоненциально] взвешенным средним действительных прошлых цен.

Другое разумное истолкование, которое можно приписать Хиксу, заключается в следующем. Если мы будем мыслить себе время, как дискретную переменную, то понятие „эластичности ожиданий“ можно сформулировать в виде

$$\frac{p_i^f(t) - p_i^f(t-1)}{p_i(t-1) - p_i^f(t-1)} = \beta_i, \quad (9.8.3)$$

где цены выражены через логарифмы, а β_i — постоянная. При $\beta_i = 0$ изменения текущих цен не влияют на ожидаемые цены; при $\beta_i = 1$ в качестве ожидаемых уровней будущих цен переносятся вперед сами текущие цены. Величину β_i можно рассматривать как меру эластичности покупательских ожиданий между крайними значениями $\beta = 0$ и $\beta = 1$.

Если мы снимем предположение о том, что цены выражены в логарифмах, то уравнения (9.8.1) станут дифференциальными аналогами разностных уравнений (9.8.3).

Перейдем теперь к изучению локальной устойчивости системы (9.7.1) в терминах соотношения (9.8.1). Мы хотим сравнить условия устойчивости для системы без ожиданий:

$$\frac{dz}{dt} = K(A + B)z, \quad (9.8.4)$$

где K — диагональная матрица, а A и B такие же, как в (9.7.3), с условиями устойчивости для динамической системы с учетом ожидаемых будущих цен. Эта система может быть записана в виде

$$\frac{dz}{dt} = K(Az + Bw), \quad \frac{dw}{dt} = \beta z - \beta w, \quad (9.8.5)$$

где $z(t) = p(t) - p^*$, $w(t) = p^f(t) - p^*$, а β — диагональная матрица с диагональными элементами β_i . Матрица коэффициентов системы (9.8.5) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} KA & KB \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A} = KA$ есть матрица $\|k_{ii}a_{ij}\|$, а $\tilde{B} = KB$ — матрица $\|k_{ii}b_{ij}\|$. Матрица коэффициентов системы (9.8.4) имеет вид

$$D = K(A + B) = \tilde{A} + \tilde{B}.$$

Для упрощения наших рассуждений мы предположим, что все существующие товары являются валовыми заменителями друг для друга, и, кроме того, любой будущий товар является валовым заменителем для любого существующего товара. Иначе говоря, мы

предположим, что $a_{lj} \geq 0$ ($l \neq j$) и $b_{lj} \geq 0$ ($l, j = 1, 2, \dots, r$). Так как K и β — диагональные неотрицательные матрицы, мы сразу же убеждаемся, что C и D будут M -матрицами.

► Теорема 9.8.1. Система (9.8.5) с матрицей C устойчива в том и только в том случае, когда устойчива система (9.8.4) с матрицей D .

Замечание 9.8.1. Основное рассуждение, применяемое при доказательстве этой теоремы, основано на двух фактах, уже отмечавшихся ранее: а) M -матрица T устойчива тогда и только тогда, когда спектральный радиус положительной матрицы $S = T + \mu I$ меньше μ , где μ — настолько большое положительное число, что матрица $T + \mu I$ неотрицательна (см. стр. 300); б) спектральный радиус $\lambda_0(S)$ неотрицательной матрицы S можно охарактеризовать как точную верхнюю грань всех тех λ , для которых существует такой положительный вектор x , что $Sx \geq \lambda x$.

Доказательство теоремы 9.8.1. Пусть $U = C + \mu I_{2r}$ и $V = D + \mu I_r$, где μ достаточно велико, чтобы сделать U и V неотрицательными матрицами. (Разумеется, матрица U имеет порядок $2r$, а матрица V — порядок r .) Обозначим через $\lambda_0(U)$ и $\lambda_0(V)$ спектральные радиусы матриц U и V соответственно. Предположим, что μ таково, что $Vx \geq \mu x$, где $x = (x_1, \dots, x_r)$ и $x \geq 0$; это, разумеется, так, если только матрица D ненулевая. Определим $2r$ -мерный вектор y , полагая $y = (x_1, \dots, x_r; x_1, \dots, x_r)$. Тогда непосредственная проверка показывает, что $Uy \geq \mu y$ и, следовательно,

$$\lambda_0(U) \geq \lambda_0(V) \geq \mu. \quad (9.8.6)$$

Таким образом, если матрица C устойчива, то должна быть устойчивой и матрица D , так как в противном случае мы получим $\lambda_0(U) \geq \mu$, что противоречит предположению об устойчивости C . Рассмотрим, далее, такое μ , что

$$Uy' \geq \mu y' \quad (9.8.7)$$

для некоторого $y' \geq 0$. Последние r неравенств в (9.8.7) сводятся к соотношениям

$$\beta_i(y'_i - y'_{i+r}) \geq 0,$$

откуда $y'_i \geq y'_{i+r} \geq 0$. Положим $x' = (y'_1, \dots, y'_r)$. Ввиду неотрицательности матрицы U мы можем увеличить последние r компонент до значений y'_i ; тогда первые r неравенств из (9.8.7) перейдут в неравенства

$$Vx' = \tilde{A}x' + \tilde{B}x' + \mu Ix' \geq Uy' \geq \mu x'. \quad (9.8.8)$$

Очевидно, $x' \geq 0$, и поэтому

$$\lambda_0(V) \geq \lambda_0(U) \geq \mu. \quad (9.8.9)$$

Используя те же рассуждения, что и при анализе неравенств (9.8.6), мы можем заключить из (9.8.9), что если матрица D устойчива, то устойчива и матрица C . Доказательство теперь проведено полностью.

Можно привести доводы в пользу того, что устойчивость динамической системы в случае статических ожиданий является вполне правдоподобной, следовательно, по доказанной теореме вполне правдоподобной является и устойчивость в общем случае — вне зависимости от инерциальности системы или эластичности ожиданий.

9.9. Модель расширяющейся экономики фон Неймана. Как мы уже видели, соотношения равновесия для законов спроса и предложения сводятся математически к определенным системам уравнений. Тем самым задача заключается в выяснении существования экономически осмысленных решений этих систем. Для решения этой задачи приходится делать различного рода предположения относительно характера функций спроса и предложения. Теория такого рода, рассмотренная в гл. 8, изучает статику экономических процессов; она не проливает света на функционирование экономики во времени.

В настоящей главе (п. 9.2—9.7) мы описали динамический процесс регулирования цен и исследовали устойчивость системы относительно сходимости системы векторов цен к равновесному. Процесс регулирования цен можно рассматривать как одну из сторон „краткосрочной“ экономической динамики в том смысле, что за изменениями цен, расстраивающими ситуацию равновесия, следуют — в ответ на естественные колебания спроса и предложения — перерегулирования цен в сторону равновесия.

Мы можем взглянуть на динамику экономических процессов также и с точки зрения долгосрочной перспективы; именно, следует учитывать действительные количества товаров, произведенные и потребленные в каждый период, причем предполагается, что экономика функционирует эффективным образом в течение бесконечного промежутка времени. Вполне логично связать с экономическим процессом естественный рост производственных и потребительских возможностей; мы хотим определить темп этого роста. Этот процесс расширения известен под названием явления сбалансированного роста.

Мы начнем с описания классической модели расширяющейся экономики, предложенной фон Нейманом. Рассмотрим экономическую систему, в которой производится m товаров ($i = 1, \dots, m$). Пусть через $j = 1, \dots, n$ обозначены технологические процессы, которые осуществляются в системе. Если j -й процесс используется с единичной интенсивностью, то a_{ij} и b_{ij} означают соответственно

затраты и выпуск i -го товара в j -м процессе. Мы сделаем естественное предположение, что $a_{ij} \geq 0$, $b_{ij} \geq 0$. Пусть $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$.

Уровень интенсивности j -го процесса в момент времени t будет обозначаться через $y_j(t)$. Цену i -го товара мы обозначим через $p_i(t)$, а общее имеющееся в нашем распоряжении количество i -го товара — через $x_i(t)$.

Основные предположения, касающиеся этой экономической системы, заключаются в следующем:

$$(a) \quad x_i(t) \geq \sum_j a_{ij} y_j(t) \quad \text{для всех } i \text{ и } t.$$

Это очевидное ограничение утверждает, что количество каждого товара, используемое в любой конкретный момент, не должно превосходить наличного запаса этого товара к данному моменту.

$$(б) \quad x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_j (b_{ij} - a_{ij}) y_j(t) \quad \text{для всех } i \text{ и } t.$$

Это разностное уравнение является уравнением динамики нашей системы. Соответствующая формулировка в случае непрерывного времени потребовала бы замены уравнения (б) аналогичным дифференциальным уравнением, однако основные черты исследования при этом не изменились бы. Разумеется, начальные условия мы считаем заданными.

$$(в) \quad y_j(t) = y_j(t) y_j, \quad \text{где } y_j(t) = e^{\lambda t}.$$

Пропорции между интенсивностями процессов остаются неизменными; только общий выпуск возрастает во времени. Это предположение можно рассматривать как условие равновесия для экономики.

$$(г) \quad \sum_{i,j} p_i(t+1) b_{ij} y_j(t) - \sum_{i,j} p_i(t) a_{ij} y_j(t) \leq 0 \quad \text{для всех } y(t).$$

Система не приносит положительного дохода; она является замкнутой.

$$(д) \quad p_i(t) = p(t) p_i, \quad \text{где } p(t) = e^{-\mu t}.$$

Величина λ в предположении (в) является темпом расширения, а μ служит здесь коэффициентом скидки системы. С другой стороны, $e^{\mu t}$ можно рассматривать как скорость повышения заинтересованности в единице денег в зависимости от времени.

Теперь мы путем некоторых манипуляций с нашими предположениями выведем различные соотношения, которым удовлетворяют темп расширения и процент на капитал. Подставляя значения $p_i(t)$ и $y_j(t)$ в (г), мы получаем для всех y

$$\sum_{i,j} p_i e^{-\mu(t+1)} b_{ij} y_j e^{\lambda t} - \sum_{i,j} p_i e^{-\mu t} a_{ij} y_j e^{\lambda t} \leq 0.$$

или

$$e^{-\mu} \sum_{i,j} p_i b_{ij} y_j \leq \sum_{i,j} p_i a_{ij} y_j.$$

Следовательно,

$$e^{-\mu} \mathbf{pB} \leq \mathbf{pA}. \quad (9.9.1)$$

Подставим теперь значение $y(t)$ в (б). Имеем

$$x_i(t+1) = x_i(t) + \sum_j (b_{ij} - a_{ij}) y_j e^{\lambda t}.$$

Решение этого разностного уравнения первой степени дается формулой

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(0) + \frac{\sum_j (b_{ij} - a_{ij}) y_j}{1 - e^{\lambda}} + \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda} - 1} \sum_j (b_{ij} - a_{ij}) y_j = \\ &= c_0 + \frac{1}{e^{\lambda} - 1} e^{\lambda t} \sum_j (b_{ij} - a_{ij}) y_j. \end{aligned} \quad (9.9.2)$$

Используя этот результат в (а), мы получим

$$\begin{aligned} c_0 + \frac{1}{e^{\lambda} - 1} e^{\lambda t} \sum_j (b_{ij} - a_{ij}) y_j &\geq \sum_j a_{ij} y_j e^{\lambda t}, \\ e^{-\lambda t} (e^{\lambda} - 1) c_0 + \sum_j b_{ij} y_j &\geq e^{\lambda} \sum_j a_{ij} y_j. \end{aligned}$$

Так как это неравенство справедливо при всех t , мы можем, устремляя t к бесконечности, получить неравенство

$$\sum_j b_{ij} y_j \geq e^{\lambda} \sum_j a_{ij} y_j,$$

или

$$\mathbf{By} \geq e^{\lambda} \mathbf{Ay}. \quad (9.9.3)$$

В следующем параграфе мы, налагая дополнительные слабые условия положительности на матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, установим существование неотрицательных векторов $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{y}^0$, удовлетворяющих соотношениям (9.9.3) и (9.9.1), когда $\lambda = \mu > 0$. В этом случае мы будем говорить, что экономика подвергается сбалансированному росту, причем темп расширения и процент на капитал равны. По поводу других приложений этой модели мы отсылаем читателя к задачам 22 и 23.

9.10. Общая модель сбалансированного роста. В этом пункте мы сформулируем общую модель производства, охватывающую модель фон Неймана как частный случай. Мы докажем существование единственного темпа равномерного расширения и его совпадение

с процентом на капитал. Динамическая модель Леонтьева (см. п. 8.6) также может рассматриваться как частный случай настоящей модели; эти связи также будут нами указаны.

Рассмотрим экономику, в которой производятся n различных продуктов. Технология производства подчинена законам неубывающих маргинальных уровней трансформации и постоянства результата¹⁾ (т. е. множество производственных возможностей выпукло и представляет собой конус).

Технологические возможности производства описываются множеством преобразований T экономики, где T является множеством тех пар n -мерных векторов $\{x, y\}$, для которых производство выпуска $y = (y_1, \dots, y_n)$ при затратах $x = (x_1, \dots, x_n)$ технологически возможно в том и только в том случае, когда $\{x, y\} \in T$.

Предполагается, что множество преобразований T обладает следующими свойствами:

(T_1) T представляет собой замкнутый выпуклый конус, лежащий в неотрицательном ортанте $2n$ -мерного евклидова пространства.

(T_2) Из $\{x, y\} \in T$ и $x' \geq x$, $0 \leq y' \leq y$, вытекает, что $\{x', y'\} \in T$. Это предположение означает, что меньший выпуск при больших затратах, разумеется, возможен.

(T_3) Из $\{0, y\} \in T$ вытекает, что $y = 0$. Иначе говоря, невозможно произвести что-либо из ничего.

(T_4) Для любого $i = 1, \dots, n$ существует $\{x^i, y^i\} \in T$, в котором $y^i_i > 0$. Это значит, что любой продукт действительно можно произвести. В силу (T_1) это предположение эквивалентно следующему утверждению.

(T_4') Существует $\{x^0, y^0\} \in T$, для которого $y^0 > 0$.

Для возможного ненулевого соотношения затрат и выпуска $\{x, y\} \in T$ мы определим темп расширения $\lambda(x, y)$ следующим образом:

$$\lambda(x, y) = \max \{\lambda \mid y \geq \lambda x\}. \quad (9.10.1)$$

В силу (T_1) и (T_3) мы имеем

$$0 \leq \lambda(x, y) < \infty. \quad (9.10.2)$$

► Теорема 9.10.1. Существует $\{x^*, y^*\} \in T$, для которого

$$y^* = \lambda^* x^*, \quad \lambda^* = \lambda(x^*, y^*) \quad (x^* \geq 0) \quad (9.10.3)$$

и

$$\lambda^* \geq \lambda(x, y) \quad (9.10.4)$$

для любого $\{x, y\} \in T$, у которого $x \geq 0$.

¹⁾ См. сноску на стр. 305. — Прим. ред.

Доказательство. Положим

$$\lambda^* = \sup_{\substack{\{x, y\} \in T \\ x \geq 0}} \lambda(x, y). \quad (9.10.5)$$

Тогда $0 < \lambda^* < \infty$. Левое неравенство доказывается просто: беря $\{x^0, y^0\} \in T$, для которого $y^0 > 0$, мы получаем

$$\lambda^* \geq \lambda(x^0, y^0) > 0.$$

Докажем правое неравенство. Если λ^* бесконечно, то существует такая последовательность $\{x^v, y^v\} \in T$, что $y^v \geq 0$, $y^v \geq \lambda^v x^v$ и $\lim \lambda^v = \infty$. Нормируя y^v так, чтобы

$$\sum_{i=1}^n y_i^v = 1,$$

и беря предельную точку $\bar{y}$ последовательности y^v , мы приходим к существованию пары $\{0, \bar{y}\} \in T$, для которой $\bar{y} \geq 0$. Это противоречит гипотезе (T_3) .

Поскольку T представляет собой замкнутый конус, существует такая пара векторов $\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \in T$, что $\lambda^* = \lambda(\tilde{x}, \tilde{y})$, где λ^* определяется согласно (9.10.5). В силу предположения (T_2) мы можем найти пару $\{x^*, y^*\}$, удовлетворяющую (9.10.3) и (9.10.4). Это завершает доказательство теоремы.

Пара векторов $\{x^*, y^*\}$ называется *сбалансированным ростом*, а λ^* — *темпом* сбалансированного роста.

Как выясняется в следующей теореме, со сбалансированным ростом оказывается связанной также равновесная система цен.

► Теорема 9.10.2. Существует вектор $p^* \geq 0$, для которого

$$(p^*, y) \leq \lambda(p^*, x) \quad (9.10.6)$$

при всех $\{x, y\} \in T$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве E^n множество V , определяемое следующим образом:

$$V = \left\{ y - \lambda^* x \mid \{x, y\} \in T, \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \leq 1 \right\}.$$

В силу замкнутости и выпуклости T множество V также является замкнутым и выпуклым. Кроме того, из самого смысла λ^* ясно, что V не пересекается с внутренностью положительного ортанта O_n пространства E^n . Следовательно, существует проходящая через начало координат гиперплоскость, которая разделяет O_n и V (теорема Б.1.3).

Иначе говоря, существует такой ненулевой вектор $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*)$, что для всех $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in T$

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{y} - \lambda^* \mathbf{x}) \leq 0 \quad (9.10.7)$$

(нормировка здесь несущественна) и

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{z}) \geq 0 \quad (9.10.8)$$

для всех $\mathbf{z} \in O_n$. Из (9.10.8) сразу следует, что $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}$, а соотношение (9.10.7) в точности совпадает с утверждением теоремы.

Модель фон Неймана. Предложенную фон Нейманом модель расширяющейся экономики можно рассматривать как частный случай настоящей модели. Мы будем придерживаться обозначений предыдущего пункта. Пусть процессы занумерованы индексом j ($j = 1, \dots, n$). Предположим, что функционирование j -го процесса с единичной интенсивностью требует затрат продуктов в количествах $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ и дает выпуск $(b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj})$. Предположим, что

$$1) \ a_{ij} \geq 0, \ b_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Множество преобразований T задается теперь следующим образом:

$$T = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{A}\mathbf{z}, \mathbf{y} \leq \mathbf{B}\mathbf{z} \text{ для некоторого } \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)\},$$

где

$$\mathbf{A} = \|a_{ij}\|, \quad \mathbf{B} = \|b_{ij}\|, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Предположения (T_1) и (T_2) выполняются всегда. Предположение (T_3) эквивалентно следующему условию:

2) для всякого j существует хотя бы одно i такое, что $a_{ij} > 0$, (в каждом процессе затрачивается хотя бы один продукт).

Предположение (T_4) эквивалентно тому, что

3) для всякого i существует хотя бы одно j , такое, что $b_{ij} > 0$, (каждый продукт может быть произведен некоторым процессом).

Теорема 9.10.1 в сочетании с теоремой 9.10.2 дает следующую теорему.

► Теорема 9.10.3. Если матрица $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяют условиям 1) — 3), то существуют такие уровни интенсивности процессов $\mathbf{z}^*$ и система цен $\mathbf{p}^*$, что

$$\mathbf{z}^* \geq \mathbf{0}, \mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}, \mathbf{B}\mathbf{z}^* \geq \lambda^* \mathbf{A}\mathbf{z}^*, \mathbf{p}^* \mathbf{B} \leq \lambda^* \mathbf{p}^* \mathbf{A}.$$

Динамическая модель Леонтьева. Пусть, как и прежде, имеются m продуктов. Пусть $\mathbf{A}$ — матрица технологических коэффициентов; элемент a_{kj} матрицы $\mathbf{A}$ представляет количество продукта k , требующееся для производства одной единицы продукта j . Обозна-

чим через $\mathbf{B}$ матрицу капитальных коэффициентов, а b_{kj} можно интерпретировать, как количество продукта k , которое производитель должен иметь в наличии для производства одной единицы продукта j .

Вектор продуктов $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ в начале рассматриваемого периода времени даст к концу этого периода вектор $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ в том и только в том случае, когда для некоторого уровня интенсивности $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ мы будем иметь

$$\mathbf{y} \leq (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{z} + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{B}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \geq \mathbf{0}. \quad (9.10.9)$$

Здесь мы отождествили уровень интенсивности с выпуском. (Это сводится попросту к надлежащему выбору единиц измерения.)

Имеется внешний источник затрат (например, сырье или земля), так что запас продуктов с каждым периодом времени возрастает. Соотношения (9.10.9) выражают в известном смысле этот процесс роста в рамках естественных экономических ограничений, касающихся наличия ресурсов и возможности производить.

Соотношения (9.10.9) можно пояснить следующим образом. Наличный запас k -го продукта плюс выпуск k -го продукта в данный период времени выражается формулой $x_k + z_k$. За тот же период k -й продукт затрачивается в количестве $\sum_j a_{kj}z_j$; следовательно, для окончательного потребления остается $x_k + z_k - \sum_j a_{kj}z_j$. Капитальные ограничения $\mathbf{x} \geq \mathbf{B}\mathbf{z}$ не влияют на это количество, так как вложения в оборудование остаются капитальной статьей.

Для рассмотрения математических аспектов этой модели представляется удобным предположить существование вектора $\mathbf{z}^0 \geq \mathbf{0}$, для которого

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{z}^0 > \mathbf{0}. \quad (9.10.10)$$

Это предположение говорит о существовании вектора интенсивностей, при которых каждый продукт производится в избытке; оно весьма существенно для справедливости соотношений (9.10.12 а, б), которые могут и не выполняться, если мы не наложим условие (9.10.10). По поводу дальнейшего обсуждения существенности предположений такого рода см. стр. 302.

Далее мы будем предполагать, что для любого j существует такое l , что

$$b_{lj} > 0. \quad (9.10.11)$$

Множество преобразований T определяется в этом случае следующим образом:

$$T = \{[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \mid \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{z} + \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{B}\mathbf{z} \text{ для некоторого } \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}.$$

Если предположить, что соотношения (9.10.10) и (9.10.11) выполнены, то станет очевидным, что предположения $(T_1) - (T_4)$ удовле-

творяются. Легко также видеть, что из теорем 9.10.1 и 9.10.2 вытекает существование $\lambda^* > 1$, $p^* \geq 0$, $z^* \geq 0$, для которых

$$(I - A)z^* \geq (\lambda^* - 1)Bz^*, \quad (9.10.12a)$$

$$p^*(I - A) \leq (\lambda^* - 1)p^*B. \quad (9.10.12б)$$

Налагая дальнейшие условия на матрицу A , последние два неравенства можно превратить в равенства. Укажем одно такое обобщение. Будем говорить, что два индекса i и j *сообщаются*, и записывать это в виде $i \sim j$, если существует цепочка индексов $i_1, i_2, \dots, i_r$, для которых

$$a_{i_v i_{v+1}} > 0$$

($v = 1, \dots, r - 1$), где $i_1 = i$, $i_r = j$ (это отношение может быть нереклексивным). Если все индексы сообщаются, то соотношения (9.10.12) можно записать в виде равенств, и z^* и p^* будут строго положительными векторами. Докажем сначала, что $z^* > 0$. Пусть, напротив, $z_{i_0}^* = 0$ для некоторого i_0 . Исследуя i_0 -е уравнение из (9.10.12a), мы заключаем, что $z_i^* = 0$ для всех тех i , которые сообщаются с i_0 по цепям длины 1. Итерируя, находим, что $z_i^* = 0$ для всех i , сообщаемых с i_0 . Отсюда $z^* \equiv 0$, что противоречит построению (9.10.12a); следовательно, $z^* > 0$.

Отсюда следует, что в (9.10.12б) имеет место знак равенства. В противном случае мы имели бы

$$(p^*(I - A), z^*) < (\lambda^* - 1)(p^*B, z^*). \quad (9.10.13)$$

Но умножение обеих частей (9.10.12a) на p^* дает нам

$$(p^*(I - A), z^*) \geq (\lambda^* - 1)(p^*B, z^*), \quad (9.10.14)$$

что, очевидно, несовместимо с (9.10.13).

Так как в (9.10.12) имеет место знак равенства, мы можем, рассуждая аналогичным образом, доказать, что $p^* > 0$. Проводя симметричные рассуждения, получаем

$$(I - A)z^* = (\lambda^* - 1)Bz^*,$$

завершая тем самым доказательство. (Дальнейшие результаты этого рода см. в задачах 20 и 21.)

Эффективное производство. В любой модели, в которой множество преобразований T удовлетворяет предположениям $(T_1) - (T_4)$, эффективность производственного плана легко характеризуется следующим определением.

Говорят, что допустимый производственный план $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ *эффективен*, если $\{\bar{x}, \bar{y}\} \in T$, $\bar{x} \geq 0$ и не существует плана $\{x, y\} \in T$, отличного от $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ и такого, что $x \leq \bar{x}$, $y \leq \bar{y}$.

► Теорема 9.10.4. *Производственный план эффективен тогда и только тогда, когда существуют такие системы цен $\bar{p}$, $\bar{q}$ с положительными компонентами, что*

$$(\bar{q}, y) - (\bar{p}, x) \leq (\bar{q}, \bar{y}) - (\bar{p}, \bar{x}) \quad (9.10.15)$$

для всех $\{x, y\} \in T$.

Замечание 9.10.1. Стоящее в левой части выражение оценивает чистую прибыль, т. е. стоимость выпуска $(\bar{q}, y)$ за вычетом стоимости затрат $(\bar{p}, x)$ при системе цен $\{\bar{q}, \bar{p}\}$. Теорема утверждает, что ко всякому эффективному производственному плану применим — при некотором подходящем векторе цен — принцип максимизации прибыли.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве E^{2n} множество Γ , определяемое следующим образом:

$$\Gamma = (\{u, v\} \mid u = \lambda \bar{x} - x, \quad v = y - \lambda \bar{y}, \quad \{x, y\} \in T, \quad \lambda \geq 0).$$

Множество Γ представляет собой выпуклый замкнутый конус, задевающий неотрицательный ортант O_{2n} только в начале. Кроме того, множество Γ не может прикасаться в начале координат к положительному ортанту ни по какому направлению. В противном случае луч первого ортанта, идущий в этом направлении, целиком лежал бы в Γ , так как Γ — замкнутый конус. Однако в силу определения Γ это невозможно. Следовательно, можно найти гиперплоскость, проходящую через начало, не содержащую ни одного направления из O_{2n} и разделяющую Γ и O_{2n} . Обозначим компоненты нормали к этой гиперплоскости через $(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_n; \bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n)$. Так как эта гиперплоскость является опорной к O_{2n} , легко видеть, что $\bar{p}_i \geq 0$ и $\bar{q}_i \geq 0$. В действительности $\bar{p}_i > 0$ и $\bar{q}_i > 0$, так как гиперплоскость не содержит ни одного сегмента из O_{2n} . Наконец,

$$(\bar{p}, \bar{x} - x) + (\bar{q}, y - \bar{y}) \leq 0$$

для $\{x, y\} \in T$, так как гиперплоскость разделяет Γ и O_{2n} . Тем самым соотношение (9.10.15) установлено.

С другой стороны, если существуют системы цен $\bar{p} > 0$ и $\bar{q} > 0$, удовлетворяющие (9.10.15), то эффективность плана $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ очевидна.

9.11. Задачи.

1. Пусть D — диагональная матрица, а A — такая устойчивая матрица (т. е. вещественные части всех собственных чисел матрицы A отрицательны), что матрица DA устойчива тогда и только тогда,

когда все диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}$ строго положительны ($d_{ii} > 0$). Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{E}^{-1}$, где $\mathbf{E}$ — произвольная невырожденная диагональная матрица. Доказать, что матрица $\mathbf{C}$ устойчива и что матрица $\mathbf{D}\mathbf{C}$ устойчива в том и только в том случае, когда $d_{ii} > 0$ для всех i .

2. Пусть $\mathbf{A}$ — произвольная устойчивая матрица. Если $\mathbf{D}$ — диагональная матрица и матрица $\mathbf{D}\mathbf{A}$ устойчива, то хотя бы один характеристический корень матрицы $\mathbf{D}$ положителен.

3. Пусть матрица $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ такова, что $a_{ii} < 0$ и

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

для всех i . Показать, что $\mathbf{A}$ устойчива.

4. Пусть матрица $\mathbf{D} = \|d_{ij}\|$ такова, что $\text{sign}(d_{ij}) = \text{sign}(d_{ji})$ ($i \neq j$) и $\text{sign}(d_{ij}) = \text{sign}(d_{jk}) = \text{sign}(d_{ik})$ ($i \neq j \neq k$), если только $d_{ij}d_{jk} \geq 0$. Показать, что $\mathbf{D}$ есть $\tilde{M}$ -матрица.

Следующие две задачи относятся к нормированному процессу регулирования цен, а дальнейшие пять задач — к ненормированному процессу регулирования цен. Мы сохраняем обозначения п. 9.2.

5. Рассмотрим случай $n=2$ товаров. Показать, что в любой точке $\mathbf{p}^*$ устойчивого равновесия имеют место соотношения

$$\frac{\partial F_0}{\partial p_1}(\mathbf{p}^*) \geq 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial p_0}(\mathbf{p}^*) \geq 0.$$

6. Показать, что, каково бы ни было число товаров, невозможно разбить все товары (включая измеритель стоимости¹⁾) на два таких непустых множества R и S , что $\partial F_r / \partial p_s < 0$ для всех $r \in R, s \in S$ и для всех векторов цен $\mathbf{p}$.

В задачах 7—11 мы предполагаем, что функции избыточного спроса $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ непрерывно дифференцируемы при $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ и однородны нулевой степени.

7. Пусть $\mathbf{F}$ обладает свойством строгой валовой заменимости. Показать, что если $\mathbf{F}(\mathbf{p}^0) > \mathbf{0}$, то $\mathbf{F}[\mathbf{p}(t)] > \mathbf{0}$, где $\mathbf{p}(t) = \psi(t; \mathbf{p}^0)$.

8. Пусть для ненормированного процесса регулирования цен, описываемого системой (9.2.4), имеет место строгая валовая заменимость. Показать, что функция

$$V(t) = \max_{0 \leq i \leq n} \left| \frac{p_i(t)}{p_i^*} - 1 \right|$$

строго убывает, если только не выполнено равенство $p_i(t) = \lambda p_i^*$ при всех i и для некоторого положительного λ .

9. Показать, что в случае двух товаров функция

$$V(t) = [p_0(t) - p_0^*]^{2k} + [p_1(t) - p_1^*]^{2k}$$

¹⁾ См. сноску на стр. 354. — *Прим. перев.*

при любом целом положительном k строго убывает по t , если только $p_i(t) \neq \lambda p_i^*$ для $i=0, 1$ и некоторого положительного λ (предполагается строгая валовая заменимость).

10. Пусть для двух товаров имеет место строгая валовая заменимость. Показать, что

$$\sum_{i,j=0}^1 p_i^* \frac{\partial F_i}{\partial p_j}(\mathbf{p}) F_j(\mathbf{p}) < 0,$$

если только не выполнено равенство $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}^*$ ($\lambda > 0$).

11. В условиях задачи 10 показать, что

$$V(t) = \sum_{i=0}^1 [p_i(t) - p_i^*]^2$$

есть строго убывающая выпуклая функция t , где $\mathbf{p}(t) = \psi(t; \mathbf{p}^0)$ и $\mathbf{p}^0 \neq \lambda \mathbf{p}^*$.

12. Пусть функция $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ однородна, конечна внутри положительного ортанта I , но непрерывна в расширенном смысле (т. е. допускаются и бесконечные значения) в замыкании I с удаленным началом координат. Пусть, кроме того, производные $\partial F_i / \partial p_j$ ($i \neq j$) в этой же области строго положительны и непрерывны. Доказать, что если $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ и $p_k = 0$, то $F_k(\mathbf{p}) = \infty$.

13. Пусть в условиях задачи 12 функция $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ равномерно ограничена снизу и удовлетворяет закону Вальраса. Доказать, что существует строго положительный вектор равновесия.

14. Пусть для ненормированного процесса, описываемого системой (9.2.4), имеет место строгая валовая заменимость и пусть существует вектор равновесия $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$. Показать, что теорема 9.5.4 применима, если в качестве $\varphi(\mathbf{p})$ взять одну из следующих функций:

$$\text{а) } \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{p_i(t)}{p_i^*} \right\},$$

$$\text{б) } \sum_{i=1}^r \max[0, p_i(t) F_i[\mathbf{p}(t)]],$$

$$\text{в) } \max_{1 \leq i \leq r} \left\{ \frac{F_i[\mathbf{p}(t)]}{p_i(t)} \right\}.$$

15. Рассмотрим ненормированный процесс с двумя товарами, для которого выполняется закон Вальраса, а функции избыточного спроса — однородные нулевой степени. Пусть $F_1(p_1, 1) < 0$ для достаточно больших p_1 . Положим для $p_1, p_2 > 0$

$$\varphi(p_1, p_2) = - \int_0^{\frac{p_1}{p_2}} F_1(v, 1) dv.$$

Показать, что в этом случае применима теорема 9.5.4 и, следовательно, процесс (9.2.5) квазиустойчив.

16. Пусть F_i — функции избыточного спроса, а матрица $\|\partial F_i / \partial p_j\|$, вычисленная при равновесном векторе цен $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$, симметрична. Показать, что локальная устойчивость системы инвариантна относительно выбора измерителя стоимости¹⁾ $j = 0, 1, \dots, r$.

17. Доказать, что если в модели, описанной в п. 9.6, функция избыточного спроса $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ непрерывна, удовлетворяет слабой аксиоме выявленного предпочтения и однородна нулевой степени, то система

$$\mathbf{p}(t+1) = \max[0, \mathbf{p}(t) + \rho \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))], \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

с неотрицательным начальным вектором цен $\mathbf{p}(0)$ устойчива при достаточно малых положительных ρ .

18. Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{p})$ — функция избыточного спроса. Пусть $\mathbf{F}$ дифференцируема, однородна нулевой степени, удовлетворяет условию валовой заменимости

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} > 0 \quad (i \neq j, \mathbf{p} > \mathbf{0})$$

и обладает вектором равновесия $\mathbf{p}^* > \mathbf{0}$, для которого $\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{0}$. Рассмотрим последовательность векторов $\mathbf{p}(t)$, $t = 1, 2, \dots$, определяемую рекуррентными соотношениями:

$$F_i(p_1(t+1), \dots, p_{i-1}(t+1), p_i(t), \dots, p_r(t)) = 0, \\ t = 0, 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, r,$$

где $\mathbf{p}(0) > \mathbf{0}$. Показать, что последовательность $\mathbf{p}(t)$ является вполне определенной и что она сходится к некоторому вектору равновесия.

19. Рассмотрим один товар, выпуск которого в каждый период времени t делится на две части: потребление на следующий период $c(t+1)$ и вложения, необходимые для выпуска в следующий период $x(t+1)$. Предположим, что одна единица вложений дает в следующем периоде a единиц выпуска и что имеет место закон постоянства результата. Пусть в начальный момент $t=0$ в нашем распоряжении имеется K единиц товара. Доказать формулу

$$c(n) + x(n) \leq a^n K - \sum_{r=0}^{n-1} a^{n-r} c(r)$$

и поставить задачу максимизации $c(n)$ в виде задачи линейного программирования.

20. Показать, что неравенства (9.10.12а) — (9.10.12б) превращаются в равенства, если существует такой показатель степени n_0 , что $A^{n_0} > 0$.

¹⁾ См. сноску на стр. 354. — *Прим. перев.*

21. Показать, что неравенства (9.10.12а) — (9.10.12б) превращаются в равенства, если существует такой показатель степени n_0 , что $\mathbf{B}^{n_0} > \mathbf{0}$.

22. Рассмотреть описанную в п. 9.9 модель расширяющейся экономики фон Неймана. Доказать, что если $a_{ij} + b_{ij} > 0$ для всех $i, j = 1, \dots, n$, то

$$\sup_{\mu} e^{-\mu} = \inf_{\lambda} e^{-\lambda},$$

где $e^{-\mu}$ удовлетворяет неравенству (9.9.1) для некоторого вектора цен $\mathbf{p}$, а $e^{-\lambda}$ удовлетворяет неравенству (9.9.3) для некоторого вектора товаров $\mathbf{y}$.

23. Рассмотрим модель технологического производства, описываемую множеством пар векторов $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in T$, где векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$ удовлетворяют постулатам T1 — T4 (п. 9.10). Предположим, кроме того, что $x_i + y_i > 0$. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех нормированных векторов цен $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$ и положим для $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ и $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in T$

$$\varphi(\mathbf{p}; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n x_i p_i}{\sum_{i=1}^n y_i p_i}, & \sum_{i=1}^n y_i p_i > 0, \\ 0, & \sum_{i=1}^n y_i p_i = 0. \end{cases}$$

Показать, что существуют вектор $\mathbf{p}^0 \in \mathcal{P}$ и пара $\{\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\} \in T$, для которых

$$\varphi(\mathbf{p}; \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \geq \varphi(\mathbf{p}^0; \mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \geq \varphi(\mathbf{p}^0; \mathbf{x}, \mathbf{y})$$

при всех $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in T$ и $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$.

Комментарии и библиография к главе 9

9.1. Хороший обзор существа и проблематики экономики благосостояния можно найти в книге Самуэльсона [1]. Критический очерк, обсуждающий соотношения между экономикой благосостояния и теорией равновесия, включен в книгу Купманса [2]. Другим важным вкладом в теорию экономики благосостояния является статья Эрроу [2].

Основополагающие статьи Эрроу [2] и Дебрё [2] содержат детальное математическое рассмотрение связей между оптимумами Парето и теорией равновесия. Изложение Дебрё весьма абстрактно и использует бесконечномерные аналоги. Подход Эрроу геометричен и основан на широком использовании структурных теорем о выпуклых множествах. Здесь мы придерживаемся иного способа изложения, заключающегося в сведении соотношения

между данным оптимумом Парето и существованием состояния равновесия к векторной задаче максимизации, рассмотренной в п. 7.4.

Как Эрроу, так и Дебрё развивают характеризацию оптимумов Парето для более общего случая, когда функции — индикаторы полезности U_i — предполагаются квазивогнутыми. Доказательства этого пункта справедливы для функций U_i , подобных квазивогнутым (см. Эрроу [2]).

9.2. Устойчивость процесса регулирования цен изучалась в XIX столетии Вальрасом [1]. Устойчивость динамического процесса в современной форме изучалась Хиксом [1], Самуэльсоном [1], Метцлером [1], Аллэ [1] и другими авторами¹⁾.

В 1958 г. Эрроу и Гурвиц [3] сделали исчерпывающий обзор теории устойчивости и существенно обобщили имевшиеся к тому времени результаты. Эта работа была в основном перекрыта работой Эрроу, Блока и Гурвица [1], в которой были получены значительно более сильные результаты. В нашей формулировке многое основано на изложении этих авторов, а также на некоторых изящных уточнениях и обобщениях, полученных Удзавой.

Формулировку процесса регулирования цен с дискретным временем (см. п. 9.6) предложил Удзава.

9.3. Пункт а) теоремы 9.3.1 установлен впервые Эрроу и Гурвицем [3], предложившими, однако, весьма сложное доказательство его справедливости. Хан [1] дал гораздо более простое доказательство. Наше доказательство еще проще. Пункт б) той же теоремы, по-видимому, является новым.

Теорема 9.3.2 является новой.

Понятие валовых заменителей и дополнительных товаров введены Мозаком [1] и Метцлером [1].

Соотношения между M -матрицами и $\tilde{M}$ -матрицами выяснены Моришимой [1].

Теорема 9.3.4 представляет собой применение к „локальной“ ситуации одного более общего результата, сформулированного Эрроу, Блоком и Гурвицем [1].

9.4. Теоремы 9.4.1 и 9.4.2 принадлежат Эрроу, Блоку и Гурвицу [1]. Изящные результаты теорем 9.4.3 и 9.4.4 получены Удзавой. Более слабый вариант теоремы 9.4.3 содержится в цитированной выше статье.

9.5. Теорема 9.5.1 нова; она является двойственной по отношению к теореме 9.5.2, принадлежащей Эрроу, Блоку и Гурвицу [1]. Теорема 9.5.3 представляет собой небольшое обобщение теоремы 4 из работы Эрроу, Блока и Гурвица [1]. Понятие квазиустойчивости берет свое начало от Удзавы. Это понятие позволяет выработать единый подход к проблеме выяснения устойчивости при разнообразных предположениях относительно структуры процесса регулирования цен.

9.6. Описываемая в этом пункте модель была предложена Удзавой [2]. Он установил существование вектора равновесия; мы следуем его доказательству. Удзава показал, что нормированный процесс с дискретным временем устойчив, если всюду выполняется слабая аксиома выявленного предпочтения. Теорема 9.6.1 устанавливает тот же факт для ненормированного процесса с дискретным временем при наличии строгой валовой заменимости.

9.7. Изложение этого пункта следует работам Энтховена и Эрроу [1] и Эрроу и Мак-Мануса [1].

9.8. Материал этого параграфа взят из статьи Эрроу и Нерлава [1]. Однако мы даем новое и более непосредственное доказательство теоремы 9.8.1.

9.9. Модель расширяющейся экономики была построена фон Нейманом [2] в качестве достаточно общей формулировки динамики производства и потребления. Ее решение было тесно связано с развитием теории игр. К со-

¹⁾ По этому поводу см. также работы Мак-Кензи [2], Негиси [1], Ньюмана [1]. — *Прим. ред.*

жалению, в своем первоначальном исследовании фон Нейман был вынужден предположить, что $a_{ij} + b_{ij} > 0$ для всех i и j , т. е. что всякий товар либо потребляется, либо производится. Это предположение не так легко обосновать с экономической точки зрения. Впоследствии Кемени, Моргенштерн и Томпсон [1] и Гейл [2] существенно ослабили это предположение и все же смогли получить количественное совпадение между темпом роста и процентом на капитал.

Другие обобщения были предложены Джорджеску-Регеном [1] и Никайдо [2]. Последняя модель является нелинейной.

Другой вариант сбалансированного роста дали Солоу и Самуэльсон [1]. Нейссер предложил интерпретацию этой модели, а Сьютс [1] привел несложное математическое доказательство.

Моришима [2] рассматривает теорию сбалансированного роста в терминах динамических моделей Леонтьева.

9.10. Изучаемая здесь общая модель сбалансированного роста была предложена Гейлом [2]. Наше изложение является упрощением оригинального.

9.11. Задачи 5, 6 и 8 основаны на работе Эрроу и Гурвица [3]. Задачи 12 и 13 принадлежат Эрроу, Блоку и Гурвицу [1]. Задачи 14—18 предложены Удзавой.

Решения задач к главам 5—9

Глава 5

Задача 2. Обозначим через x, y, z суммарные количества сырой нефти, используемые в трех способах обработки. Задача сведется к максимизации выражения $32x + 15y + 12z$ при условиях $y \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, а ограничения допустимости примут вид

$$\begin{aligned}x + 2y + 2z &\leq 10, \\2x + y + 2z &\leq 15.\end{aligned}$$

Решением будет $x = 15/2, y = 0, z = 0$; максимальная прибыль составит 240.

Задача 4. $x_1 = n, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$.

Задача 8. Из неравенства $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ следует, что вектор $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ будет допустимым для задачи I. Теперь следует использовать теорему существования (теорема 5.4.2).

Задача 11. Задачу можно поставить математически следующим образом: максимизировать $\sum_i \beta_i x_i$ при условиях $x_i \geq 0$ и $\sum_i \alpha_i x_i \leq M$. Положим

$$\frac{\beta_{i_0}}{\alpha_{i_0}} = \max_i \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

Решение имеет вид $x_{i_0} = M/\alpha_{i_0}, x_j = 0$ для всех $j \neq i_0$.

Задача 12. Упорядочим a_i и b_i следующим образом: $a_{\mu_1} < \dots < a_{\mu_n}$ и $b_{\nu_1} > \dots > b_{\nu_n}$. Тогда искомым минимум равен

$$\sum_{i=1}^n a_{\mu_i} b_{\nu_i}.$$

(Этот факт известен под названием неравенства Чебышева.)

Задача 16. Рассмотрим множество $\Gamma = \{(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{B}) \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Из определения λ_0 следует, что Γ не пересекается с внутренностью положительного ортанта. Согласно лемме Б.1.3, существует такой вектор $\mathbf{y}^0 \geq \mathbf{0}$, что $(\mathbf{y}^0, (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{B}) \mathbf{x}) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ или $\lambda_0 \mathbf{y}^0 \mathbf{B} \geq \mathbf{y}^0 \mathbf{A}$. Отсюда $\mu_0 \leq \lambda_0$, что и требовалось.

Задача 18. Вогнутость $v(\mathbf{b})$ как функции от $\mathbf{b}$ показывается легко. Предположим далее, что $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}\}$ есть седловая точка функции $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$, а $\{\bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}} + \delta \mathbf{y}\}$ — седловая точка функции $\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})$. Тогда

$$(\mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}) + (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x})) \leq (\mathbf{c}, \bar{\mathbf{x}}) + (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}),$$

и поэтому

$$\Delta v = (\mathbf{c}, \delta \mathbf{x}) \leq (\bar{\mathbf{y}}, \mathbf{A} \delta \mathbf{x}).$$

Но из соотношений $A\bar{x} + A\delta x \leq b + \Delta b$ и $(\bar{y}, A\bar{x}) = (\bar{y}, b)$ [уравнение (5.3.10)] следует, что $(\bar{y}, A\delta x) \leq (\bar{y}, \Delta b)$. Окончательно мы получаем неравенство $\Delta v \leq (\bar{y}, \Delta b)$; требуемое заключение получается из него путем подходящего выбора Δb .

Задача 19. Требуемый результат вытекает из следующей цепочки легко доказываемых эквивалентных утверждений:

$$1) \quad x \geq 0, \quad (c, x) \geq 0;$$

$$2) \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad \sum_{i \in I} c_i x_i \geq \sum_{k \in K} (-c_k) x_k;$$

3) существуют такие числа α_{ik} , что

$$c_i x_i \geq \sum_{k \in K} \alpha_{ik} \quad \text{для } i \in I,$$

$$-c_k x_k = \sum_{i \in I} \alpha_{ik} \quad \text{для } k \in K$$

(доказывается индукцией по числу элементов множеств I и K);

4) существуют такие числа γ_i , что

$$x_i = \gamma_i + \sum_{k \in K} \frac{\alpha_{ik}}{c_i} \quad \text{для } i \in I,$$

$$x_k = \sum_{i \in I} \frac{\alpha_{ik}}{-c_k} \quad \text{для } k \in K;$$

$$5) \quad x = \sum_{i \in I} \gamma_i \alpha_i + \sum_{\substack{i \in I \\ k \in K}} \alpha_{ik} \gamma_{ik} + \sum_{j \in J} x_j \beta_j,$$

где все γ_i , α_{ik} и x_j неотрицательны.

Задача 20. В силу теоремы 5.3.1 и уравнения (5.3.10) справедливы следующие соотношения:

$$(c, x_0 + \delta x_0) + (y_0, b - A(x_0 + \delta x_0)) \leq (c, x_0), \quad (y_0, b) = (y, Ax_0),$$

$$(c + \delta c, x_0) + (y_0 + \delta y_0, b + \delta b - (A + \delta A)x_0) \leq (c + \delta c, x_0 + \delta x_0),$$

$$(y_0 + \delta y_0, b + \delta b) = (y_0 + \delta y_0, (A + \delta A)(x_0 + \delta x_0)).$$

Комбинируя эти соотношения, мы получаем первое неравенство задачи. Второе неравенство получается при использовании другой части неравенств, характеризующих седловую точку.

Задача 21. Доказательство аналогично доказательству леммы 5.3.1.

Задача 22. Ср. с задачами В" п. 5.11.

Задача 25. Задача заключается в минимизации

$$c = \sum_{i=1}^n z_i + \lambda X$$

при условиях $z_i \geq t_i - X$ и $0 \leq z_i \leq r_i$. Решение существует только при $r_i \geq t_i - X$ (это условие мы предполагаем выполненным). При фиксирован-

ном X выражение c достигает минимума, если $z_i = \max \{0, t_i - X\}$ ($i = 1, \dots, n$); в этом случае

$$c(X) = \sum_{k=1}^n \max \{0, t_k - X\} + \lambda X.$$

Предположим для определенности, что $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_n$. Если $t_m > X \geq t_{m+1}$, то

$$c(X) = \sum_{k=1}^m t_k + (\lambda - m) X.$$

Это выражение достигает минимума при

$$X = \begin{cases} t_m, & \lambda - m < 0, \\ t_{m+1}, & \lambda - m \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$c(X) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m t_k + (\lambda - m) t_{m+1}, & \lambda - m \geq 0, \\ \sum_{k=1}^m t_k + (\lambda - m) t_m, & \lambda - m < 0. \end{cases}$$

Пусть $[\lambda] = m_0$, где $m_0 \leq \lambda < m_0 + 1$; тогда оптимум $X = t_{m_0+1}$ и

$$z_i = \begin{cases} t_i - t_{m_0+1}, & i \leq m_0, \\ 0, & i > m_0. \end{cases}$$

Глава 6

Задача 2. Использовать процесс A с интенсивностью 0,25 и процесс B с интенсивностью 1, 0; процесс C не использовать.

Задача 4. Использовать лемму 6.1.1.

Задача 6. Рассмотрим соотношение $zA = 0$, где вектор z имеет вид

$$z = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Отсюда $x_i = -y_j$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$. Следовательно, ядро матрицы A одномерно и ранг A равен $n + m - 1$.

Задача 8.

	$0 \leq \lambda < 1$	$1 \leq \lambda < 2$	$\lambda \geq 2$
x	10	1	0
z_1	0	1	2
z_2	0	5	5
z_3	0	3	4

Задача 10. См. Прагер [2].

Задача 11. Отправить 75 единиц.

Задача 13. Ср. с моделью, изображенной на рис. 6.5. Положим c_{ij} равными 1 или 0 в зависимости от того, является ли пара (ij) „хорошей“ или „плохой“. Если a_i и b_j выбраны достаточно большими, то ограничения на пропускную способность не будут существенными.

Задача 14. Пусть p — узел с входящими в него дугами $A_1, \dots, A_r$ и выходящими из него дугами $B_1, \dots, B_s$; ограничение его пропускной способности составляет c . Заменяем этот узел двумя такими узлами p и p' , что дуги $A_1, \dots, A_r$ направлены в p , а дуги $B_1, \dots, B_s$ направлены из p' ; добавим направленную дугу от p к p' , имеющую пропускную способность c .

Задача 16. Соотношение $\mathbf{x}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ имеет место в том и только в том случае, когда $x_i = x_j$ для всех $i, j = 1, \dots, n$. Следовательно, ядро матрицы $\mathbf{A}$ одномерно, и поэтому ее ранг равен $n - 1$.

Задача 19. В силу леммы 6.1.1 каждая крайняя точка $\mathbf{x} \in X$ имеет ровно m положительных координат, и обратно. Теперь требуемый результат вытекает из следующего утверждения: сумма $\sum_i \delta(x_i)$ по множеству всех крайних точек из X постоянна.

Задача 20. Требуемый результат вытекает из вогнутости $\varphi(\mathbf{x})$.

Задача 21. См. Гросс [3].

Глава 7

Задача 1. В теореме 7.1.1 положить $X = E^m$.

Задача 2. В силу вогнутости функции g мы имеем

$$g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}^0) + (g_{\mathbf{x}^0}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$$

(согласно свойству 7 п. Б. 4). Теперь если $\mathbf{x}^0$ максимизирует $(g_{\mathbf{x}^0}, \mathbf{x})$ при условиях $\mathbf{x} \geq 0$, $f(\mathbf{x}) \geq 0$, то для всех $\mathbf{x}$, удовлетворяющих этим условиям, мы будем иметь $(g_{\mathbf{x}^0}, \mathbf{x}) \leq (g_{\mathbf{x}^0}, \mathbf{x}^0)$ и, следовательно, $g(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}^0)$. С другой стороны, если $g(\mathbf{x}^0) \geq g(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$, подчиненных ограничениям $\mathbf{x} \geq 0$, $f(\mathbf{x}) \geq 0$, то вектор $\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$, $0 \leq t \leq 1$, также удовлетворяет этим ограничениям. Максимум функции $I(t) = g(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))$, $0 \leq t \leq 1$, достигается при $t = 0$. Ввиду вогнутости $I(t)$ это может случиться в том и только в том случае, когда $I'(t) \leq 0$, т. е. $(g_{\mathbf{x}^0}, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \leq 0$, а это и требовалось.

Задача 3. По теореме 7.1.1

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}) + (\mathbf{u}^0, \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x})) \leq (\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) + (\mathbf{u}^0, \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)) \leq (\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) + (\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^0))$$

для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{u} \geq 0$. Следовательно, $(\mathbf{u}^0, \mathbf{v} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)) = 0$ и, таким образом, $(\mathbf{p}, \mathbf{x}) - (\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x})) \leq (\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) - (\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x}^0))$. Отметим, что функция $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ однородна; следовательно, для $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^0$, где λ — произвольный положительный скаляр, мы имеем $(\mathbf{p}, \mathbf{x}^0) = (\mathbf{u}^0, \mathbf{F}(\mathbf{x}^0)) = (\mathbf{u}^0, \mathbf{v})$.

Задача 4. Теорема 7.1.1 показывает, что вектор x^* оптимален в квадратичной задаче тогда и только тогда, когда для некоторого $u^* \geq 0$

$$\begin{aligned} c - \epsilon x^* - u^* A &\leq 0, \\ (c - \epsilon x^* - u^* A, x^*) &= 0, \\ Ax^* &\leq b, \quad x^* \geq 0, \\ (u^*, b - Ax^*) &= 0. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует, что вектор x^* оптимален для задачи максимизации $(c - \epsilon x^*, x)$ при условиях $Ax \leq b, x \geq 0$. Если ϵ достаточно мало, то x^* будет оптимальным и для исходной задачи линейного программирования (по теореме 5.3.1).

Задача 5. Для фиксированного n оптимальный вектор $x^{(n)}$ определяется формулой $x_i^{(n)} = T/n$ и

$$u(n) = \sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)}) = n f\left(\frac{T}{n}\right).$$

Значение n , максимизирующее $u(n)$, определяется из условия $u'(n) = 0$ или, что эквивалентно, из следующего условия:

$$\frac{T}{n} f'\left(\frac{T}{n}\right) = f\left(\frac{T}{n}\right).$$

Задача 6. Ввиду вогнутости функции f оптимум расположен в одной из крайних точек. Поэтому $\min_i \sum_i f(x_i) = f(T)$.

Задача 7. Использовать решение задачи 5, удостоверившись в том, что нужные ограничения выполнены.

Задача 9. Согласно теореме 7.1.1, вектор x^* оптимален для первой задачи в том и только в том случае, когда для некоторого $u^* \geq 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} a - Ax^* &= u^* B, \\ Bx^* &\leq b, \\ (u^*, b - Bx^*) &= 0. \end{aligned}$$

Эти условия эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} x^* &= A^{-1}a - A^{-1}B^T u^*, \\ BA^{-1}a - b - BA^{-1}B^T u^* &\leq 0, \\ (BA^{-1}a - b - BA^{-1}B^T u^*, u^*) &= 0. \end{aligned}$$

Эти последние условия равносильны тому, что u^* максимизирует

$$(BA^{-1}a - b, u) - \frac{1}{2}(u, BA^{-1}B^T u)$$

при условии $u \geq 0$ — снова в силу теоремы 7.1.1.

Задача 10. См. задачу 17 к гл. 5.

Задача 11. Использовать теорему 7.4.1.

Задача 12. Предположим противное; тогда при любом $x \in X$ одна из компонент $F(x)$ будет неположительной. Обозначим через H образ в пространстве E^n вектор-функции $F(x)$, когда x пробегает X . Так как F выпукла, то выпуклая оболочка множества H не пересекается с внутренностью первого ортанта. Следовательно, существует разделяющая гиперплоскость u и $(u, F(x)) \leq 0$ для всех $x \in X$, что противоречит условию.

Задача 13. Положим $g(x) = (c, x) - \frac{1}{2}(x, Ax)$. Тогда $x_i^{(v+1)}$ максимизирует $g(x_1^{(v+1)}, \dots, x_i^{(v+1)}, x_i, x_{i+1}^{(v)}, \dots, x_n^{(v)})$ при условии $x_i \geq 0$. Поэтому

$$g(x_1^{(v+1)}, \dots, x_{i-1}^{(v+1)}, x_i^{(v+1)}, x_{i+1}^{(v)}, \dots, x_n^{(v)}) \geq g(x_1^{(v+1)}, \dots, x_{i-1}^{(v+1)}, x_i^{(v)}, x_{i+1}^{(v)}, \dots, x_n^{(v)}),$$

причем равенство имеет место только в случае $x_i^{(v+1)} = x_i^{(v)}$. Таким образом, $g(x_1^{(v+1)}, \dots, x_n^{(v+1)}) \geq g(x_1^{(v)}, \dots, x_n^{(v)})$ со строгим неравенством, если только $(x_1^{(v)}, \dots, x_n^{(v)})$ не есть точка максимума функции $g(x)$. Но множество $\{x \mid g(x) \geq g(x^{(1)})\}$ ограничено; последовательность $g(x^{(1)}), g(x^{(2)}), \dots$ также ограничена. Поэтому последовательность $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ сходится к единственному оптимуму.

Задача 16. Существует такой вектор x^0 , что $c = \sup_{\alpha} f_{\alpha}(x^0) < \infty$ в том и только в том случае, когда $\{c, x^0\} \in [f_{\alpha}, C_{\alpha}]$ при всех α . Последнее в свою очередь эквивалентно тому, что

$$\sup_{\xi \in \Gamma_{\alpha}} [(x^0, \xi) - \varphi_{\alpha}(\xi)] = f_{\alpha}(x^0) \leq c.$$

Задача 18. Положим $f(x) = \min_y (x, Ay)$ и $g(y) = \max_x (x, Ay)$, где x и y пробегают множества, определяемые обычным образом. Затем следует применить теорему 7.9.4.

Задача 20. Обозначим через t_{α} множество единичных векторов, проходящих через начало координат, ортогональных к гиперплоскостям, ограничивающим O_{α} и направленных в O_{α} . Пусть p_{α} — конечные точки векторов t_{α} на единичной сфере. Из условия следует, что начало координат лежит внутри выпуклой оболочки точек p_{α} . Применить теорему 7.9.4.

Задача 22. Рассмотреть множество открытых полупространств, дополнительных к данным замкнутым подпространствам M_{α} , и применить результат задачи 21.

Задача 23. Следует отождествить лучи g_{α} с точками p_{α} , в которых они прокалывают единичную сферу с центром в начале координат. Из условия следует, что начало координат лежит внутри выпуклой оболочки точек p_{α} . Применить теорему 7.9.4.

Задача 24. Вектор $p \in S$ мы будем обозначать через $(x_1, \dots, x_n)$, а вектор $p' \in S'$ — через $(y_1, \dots, y_n)$. Векторы из E^{n+1} будут обозначаться через $a = (a_0, a_1, \dots, a_n)$. Положим

$$H_p = \{a \mid a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n < 0\},$$

$$H_{p'} = \{a \mid a_0 + a_1 y_1 + \dots + a_n y_n > 0\}.$$

Мы породили, таким образом, конечное семейство полупространств в E^{n+1} ; любые $n+2$ из них соответствуют $n+2$ точкам из $S \cup S'$. Согласно предположению, они пересекаются. Остается применить следствие 7.9.1.

Задача 25. Применить метод задачи 24 и воспользоваться теоремой 7.9.4.

Глава 8

Задача 1.

$$p(t) = \left(p(0) + \frac{\alpha - \beta}{a - b} \right) \exp [-(a - b)t/a] - \frac{\alpha - \beta}{a - b}.$$

Если $a > b$, то $p(t)$ сходится; если $a = b$, то $p(t)$ равно постоянной; наконец, при $a < b$ $p(t)$ расходится.

Задача 4. $Y(t) = cY(t) + v\dot{Y}(t) + A_0 e^{rt}$.

Тогда

$$Y(t) = \frac{A_0/v}{\frac{1-c}{v} - r} e^{rt} + ke^{\frac{(1-c)t}{v}}.$$

Задача 6. $Y(t) = c_1 Y(t-1) + c_2 Y(t-2) + v(Y(t-1) - Y(t-2)) + A$. Положим $\bar{Y} = A/(1 - c_1 - c_2)$. Тогда $Y(t) = \bar{Y} + k_1 \lambda_1^t + k_2 \lambda_2^t$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения $x^2 - (c_1 + v)x + (v - c_2) = 0$. Если встретятся кратные или комплексные корни, то вид решения соответствующим образом видоизменяется.

Задача 8. (Доказательство по индукции.) Рассмотрим уравнение $D(I - C) = E$, где $c_{11} \neq 1$ и $d_{11} = 1$, $d_{j1} = c_{j1}/(1 - c_{11})$ при $j = 2, \dots, n$ и $d_{ij} = \delta_{ij}$ в остальных случаях. Тогда

$$E = \begin{pmatrix} 1 - c_{11} & -c_{12} & \dots & -c_{1n} \\ 0 & 1 - \tilde{c}_{22} & \dots & -\tilde{c}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\tilde{c}_{n2} & \dots & 1 - \tilde{c}_{nn} \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij} + \frac{c_{i1}c_{1j}}{1 - c_{11}}, \quad i, j = 2, \dots, n.$$

Отметим, что

$$\sum_{i=2}^n |\tilde{c}_{ij}| \leq 1.$$

Поэтому из индуктивного предположения следует, что

$$\begin{aligned} \det(I - C) &= (1 - c_{11}) \det(I - \tilde{C}) \geq (1 - |c_{11}|) \prod_{j=2}^n \left(1 - \sum_{i=2}^n |\tilde{c}_{ij}| \right) \geq \\ &\geq \left(1 - \sum_{i=1}^n |c_{i1}| \right) \prod_{j=2}^n \left(1 - \sum_{i=1}^n |c_{ij}| \right). \end{aligned}$$

Видоизменение этого рассуждения для случая $c_{11} = 1$ тривиально.

Задача 10. Пусть вектор $x^0 > 0$ определяется соотношениями $Ax^0 = \lambda_0(A)x^0$ и $Ay = \mu y$, где y — вещественный вектор и μ вещественно. Если k -я компонента вектора y равна нулю, то $A_{kk}|y| \geq |\mu||y|$, где A_{kk} — матрица, полученная вычеркиванием k -й строки и k -го столбца. По следствию 8.2.1 мы получим $\lambda_0(A) \geq \lambda_0(A_{kk}) \geq |\mu| \geq \mu$. Если k -я компонента вектора y отлична от нуля, определим такое a , чтобы $ay_k + x_k^0 = 0$. В силу линейной независимости векторов y и x имеем $ay + x^0 \neq 0$. Теперь $A_{kk}(ay + x^0) = A(ay + x^0) \geq \mu(ay + x^0)$, откуда в силу произвольности k заключение теоремы вытекает так же, как и выше.

Задача 11. См. Гантмахер [1], гл. 13.

Задача 13. Предположим для определенности, что первый столбец b матрицы $B(\lambda)$ неотрицателен и состоит не сплошь из нулей. Так как $(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I$, то мы имеем $(\lambda I - A)b \geq 0$. Согласно теореме 8.2.1, существует такой вектор $y^0 > 0$, что $y^0 A = \lambda_0(A)y^0$; следовательно, $\lambda(y^0, b) > \lambda_0(A)(y^0, b)$ и $\lambda > \lambda_0(A)$, что и следовало доказать.

Задача 15. Пусть λ — собственное число с наибольшей вещественной частью. Тогда $xV = \lambda x$ для некоторого $x \geq 0$. Поэтому $0 < (x, Vz) = = \lambda(x, z)$. Так как $(x, z) \leq 0$, мы имеем $\lambda < 0$.

Задача 17. Предположим противное. Тогда множество $\Gamma \subset E^{2n}$, определяемое как

$$\Gamma = \left\{ \left(\begin{pmatrix} I & -C \\ C^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \left\| \begin{pmatrix} C^T & 0 \\ 0 & -C \\ I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \right\| \right\},$$

не имеет общих точек с внутренностью положительного ортанта. Заключительная часть рассуждения проводится стандартным образом.

Задача 18. Пусть $\{p^*, x_i^*, y_j^*\}$ — состояние равновесия. Тогда

$$(p^*, y_j^*) = \max_{y_j \in Y_j} (p^*, y_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как Y_j есть конус, мы заключаем, что $(p^*, y_j^*) = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$, а это и требовалось.

Задача 19. а) Это утверждение легко доказывается геометрически.

б) Пусть $p^1 = \lambda p^0$, $M^1 = \lambda M^0$, $\lambda > 0$ и $x^0 = f(p^0, M^0)$, $x^1 = f(p^1, M^1)$. Тогда $(p^1, x^0) = \lambda(p^0, x^0) = \lambda M^0 = M^1 = (p^1, x^1)$. Если $x^0 \neq x^1$, то по слабой аксиоме выявленного предпочтения $(p^0, x^0) < (p^0, x^1)$. Но $(p^0, x^0) = M^0$ и

$$(p^0, x^1) = \frac{1}{\lambda}(p^1, x^1) = \frac{1}{\lambda}M^1 = M^0.$$

Получено противоречие.

Глава 9

Задача 1. Матрица DC устойчива $\gtrsim E^{-1}DCE = E^{-1}DEA$ устойчива (матрицы D и E коммутируют, так как обе они диагональны) $\gtrsim$ все диагональные элементы матрицы $E^{-1}DE$ положительны $\gtrsim d_{ii} > 0$.

Задача 4. Разобьем множество $\{1, \dots, n\}$ в соответствии с отношением эквивалентности

$$i \sim j \Leftrightarrow \text{sign } d_{ij} > 0.$$

Тогда из $i \sim j$ следует $j \sim i$ и из $i \sim j, j \sim k$ следует $i \sim k$.

Задача 7. Положим

$$\lambda(t) = \min_{1 \leq i \leq r} \frac{p_i(t)}{p_i^*},$$

где $\mathbf{p}^*$ — строго положительный равновесный вектор. Тогда

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} \geq 0$$

и, следовательно, $\lambda(t) \geq \lambda(0)$. См. также доказательство теоремы 9.4.3.

Задача 8. Для соответствующего индекса i

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} \leq \begin{cases} \frac{1}{p_i^*} \frac{dp_i^*}{dt} & \text{при } V(t) = -1 + \frac{p_i(t)}{p_i^*} \\ -\frac{1}{p_i^*} \frac{dp_i^*}{dt} & \text{при } V(t) = 1 - \frac{p_i(t)}{p_i^*} \end{cases} = \begin{cases} \frac{F_i(t)}{p_i^*}, \\ -\frac{F_i(t)}{p_i^*}. \end{cases}$$

Если $p_i(t) > p_i^*$, то из утверждения (I) в доказательстве теоремы 9.4.3 следует, что $F_i(t) \leq 0$ с равенством только в точке равновесия, так как

последовательность $\frac{p_j(t)}{p_j^*}, j=0, 1, \dots, n$, достигает максимума при значении

$j=i$. Аналогично если i таково, что $V(t) = -(p_i(t) - p_i^*)$, то i является

индексом, при котором $\frac{p_j(t)}{p_j^*}, j=0, 1, \dots, n$, достигает минимума, и

поэтому $F_i(t) \geq 0$ с равенством только в случае, когда $\mathbf{p}(t)$ — равновесный вектор. В каждом из этих случаев мы получаем

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{V(t+h) - V(t)}{h} \leq 0,$$

и доказательство завершается так же, как и в теореме 9.4.3.

Задача 12. Рассмотрим вектор $\mathbf{p}^0 \geq 0$ вида $\mathbf{p}^0 = (0, p_2^0, p_3^0, \dots, p_r^0)$.

Покажем, что $F_1(\mathbf{p}^0) = \infty$. Пусть $\mathbf{p}_\lambda = (\lambda, p_2^0, p_3^0, \dots, p_r^0)$, где $\lambda > 0$. Из тождества Эйлера (однородность)

$$\lambda \frac{\partial F_1}{\partial p_1}(\mathbf{p}_\lambda) = - \sum_{k=2}^r p_k^0 \frac{\partial F_1}{\partial p_k}(\mathbf{p}_\lambda) \leq -c < 0$$

или

$$\lambda \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} \leq -c < 0$$

для всех $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Интегрируя это соотношение от ε до λ_0 , получаем

$$F_1(p_\varepsilon) > F_1(p_{\lambda_0}) - c \log \varepsilon + c \log \lambda_0.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ мы приходим к требуемому результату.

Задача 13. Ограничимся рассмотрением множества Δ всех векторов p , удовлетворяющих условиям $p_i \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

Рассмотрим функции $g_k(p) = e^{-F_k(p)}$ для $p \in \Delta$, $k = 1, \dots, r$. В силу результата задачи 12 $g_k(p)$ непрерывны на Δ и $g_k(p) = 0$, если только $p_k = 0$ (и обратно). Положим

$$h_k(p) = \max_{1 \leq j \leq r} \{g_j(p)\} - g_k(p).$$

Предположим, что не существует таких $p \in \Delta$, для которых $h_k(p) = 0$ ($k = 1, \dots, r$). В этом случае рассмотрим отображение множества Δ в границу Δ , определяемое следующим образом:

$$p_k \rightarrow \frac{h_k(p)}{\sum_{i=1}^r h_i(p)}.$$

В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке (п. С.2) существует неподвижная точка p^* , имеющая по меньшей мере одну нулевую координату. Если $h_{k_0}(p^*) = p_{k_0}^* = 0$, то $g_{k_0}(p^*) = 0$ и

$$\max_{1 \leq j \leq r} g_j(p^*) = 0.$$

Поэтому $p^* = 0$, что бессмысленно. Следовательно, существует выбор p^* , при котором $g_1(p^*) = g_2(p^*) = \dots = g_r(p^*) \neq 0$. Отсюда $F_1(p^*) = F_2(p^*) = \dots = F_r(p^*) \neq \infty$, что в силу закона Вальраса сводится к утверждениям $F(p^*) = 0$ и $p^* > 0$.

Задача 16. Не умаляя общности, можно предположить, что $p^* = (1, \dots, 1)$. Положим

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right)_{p^*}, \quad i, j = 0, 1, \dots, r.$$

Пусть система

$$\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^r a_{ij} p_j, \quad i = 1, \dots, r,$$

устойчива (нулевая компонента означает измеритель стоимости). Так как матрица $\|a_{ij}\|$ симметрична, она будет отрицательно определенной. Рассмотрим в качестве измерителя стоимости другой товар, скажем, с номером r .

В силу однородности

$$a_{i0} = - \sum_{j=1}^r a_{ij}, \quad i = 1, \dots, r,$$

а так как измеритель стоимости есть величина постоянная, то

$$a_{00} = - \sum_{i=1}^r a_{i0} = \sum_{i,j=1}^r a_{ij}.$$

Теперь, производя несложные преобразования, мы убеждаемся, что для любого вектора $x = (x_0, \dots, x_{r-1}) \neq 0$

$$\sum_{i,j=0}^{r-1} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^r a_{ij} x'_i x'_j,$$

где $x'_i = x_0 - x_i$, $i = 1, \dots, r-1$, и $x'_r = x_0$. Следовательно, матрица $\|a_{ij}\|_0^{r-1}$ устойчива.

Задача 18. Положим

$$\lambda(t) = \min_{1 \leq i \leq r} \frac{p_i(t)}{p_i^*},$$

$$\Lambda(t) = \max_{1 \leq i \leq r} \frac{p_i(t)}{p_i^*}.$$

Тогда $-\lambda(t)$ и $\Lambda(t)$ представляют собой невозрастающие функции (строго невозрастающие, если $p(t)$ не есть равновесный вектор). Начиная с этого места, рассуждения аналогичны доказательству теоремы 9.4.3.

Задача 19. Соотношение выпуска и потребления в двух последовательных промежутках времени подчинено закону $x(t) + c(t) \leq ax(t-1)$. Итерируя, получаем

$$\begin{aligned} a^{n-t}x(t) + a^{n-t}c(t) &\leq a^{n-(t-1)}x(t-1) \\ a^n x(0) + a^n c(0) &\leq a^n K. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c(n) + x(n) \leq a^n K - \sum_{t=0}^{n-1} a^{n-t} c(t).$$

Формулировка в виде задачи линейного программирования: максимизировать $c(n)$ при условиях

$$a^t K - \sum_{v=0}^t a^{n-v} c(v) \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, n,$$

и $c(v) \geq 0$ при всех v .

Задача 20. В этом случае $z^* > 0$ и $p^* > 0$.

Часть III

**ТЕОРИЯ
БЕСКОНЕЧНЫХ ИГР**

ГЛАВА 10

ПРИРОДА И СТРУКТУРА БЕСКОНЕЧНЫХ ИГР

По своему характеру эта глава является описательной; цель ее состоит в том, чтобы ознакомить читателя в общих чертах с понятиями и методами теории бесконечных игр. Содержание ее является существенным для дальнейшего, однако необходимости в детальном ее изучении нет, поскольку формальный вывод обсуждаемых здесь результатов и разбор частных случаев можно найти в гл. 11—17.

10.1. Введение. В гл. 1 мы определили игру как тройку $\{X, Y, K\}$, где X — пространство стратегий игрока I, Y — пространство стратегий игрока II, а K — определенная на $X \times Y$ функция, значения которой интерпретируются как выигрыш игрока I. Этим определением можно воспользоваться и в теории бесконечных игр; единственное различие состоит здесь в том, что все перечисленные компоненты для бесконечной игры имеют более сложную структуру. Во всех случаях мы будем требовать, чтобы X и Y были выпуклыми множествами, а вещественная функция $K(x, y)$ была выпуклой по y и вогнутой по x . В большинстве примеров функция K является фактически билинейной.

В гл. 1 мы подчеркнули, что множества X и Y должны быть такими, чтобы их можно было понимать как подмножества конечномерных евклидовых пространств. Это всегда соблюдалось в случае матричных игр, где множество X состояло из всех векторов $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, которые лежали в пересечении положительного ортанта пространства E^n и гиперплоскости $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = 1$; множество Y определялось аналогично.

Представляется естественным обобщение теории игр на тот случай, когда пространства стратегий X и Y являются бесконечномерными. В этом случае мы должны различать две категории игр: либо (1) множества X и Y имеют достаточно простую структуру, так что их можно отождествить с подмножествами того или иного классического пространства функций, либо (2) множества X и Y таковыми не являются. Всюду в гл. 10—17 мы рассматриваем игры лишь первой категории. Игры второй категории будут рассмотрены в следующей книге.

Игры первой категории подразделяются на два основных типа: (а) X является совокупностью вероятностных мер, определенных на области, лежащей в n -мерном евклидовом пространстве; (б) X является множеством n -мерных векторов, каждая компонента которых оказывается функцией, определенной на некотором заданном множестве из E^n ; значения этих функций лежат между 0 и 1. Примеры игр каждого из этих типов описаны в п. 10.3 и 10.4.

Каждый раз, говоря об игре, мы подразумеваем, что пространства стратегий являются исчерпывающими, т. е. что мы принимаем во внимание все способы действий игроков, как хорошие, так и плохие. Читатель сможет убедиться в том, что в каждом частном случае применения теории игр сконструированная формальная игра полностью описывает исследуемую конфликтную ситуацию.

Как и в случае матричных игр, для того чтобы можно было дать естественную интерпретацию игре и обрисовать рациональное поведение каждого из противников, необходимо¹⁾, чтобы

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y). \quad (10.1.1)$$

Общее значение обеих частей этого равенства называется „значением“ игры. Из (10.1.1) следует, что существуют стратегии $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, которые удовлетворяют неравенствам

$$K(x, y_0) \leq K(x_0, y_0) \leq K(x_0, y) \quad (10.1.2)$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Доказательство этого утверждения очень просто и напоминает доказательство теоремы 1.3.1.

Каждая пара стратегий x_0, y_0 , удовлетворяющая неравенствам (10.1.2), называется *решением* игры, а сами стратегии x_0 и y_0 — соответственно *оптимальными* стратегиями игроков I и II. Из соотношения (10.1.2) вытекает, что если игрок I использует стратегию x_0 , то он может обеспечить себе получение выигрыша не меньшего, чем $v = K(x_0, y_0)$, независимо от стратегии, примененной игроком II; игрок II со своей стороны может, используя стратегию y_0 , помешать игроку I получить выигрыш больший, чем v . Если же игрок II применяет неоптимальную стратегию, то игрок I разумным выбором стратегии может, вообще говоря, обеспечить получение выигрыша большего, чем v . Поэтому, если игрок II не глуп или не желает быть безмерно щедрым (что к тому же противоречит конфликтности ситуации), он будет играть в общем оптимально. Поэтому, как и в случае матричной игры, число v характеризует в конечном итоге средний выигрыш игрока I, если действия обоих игроков разумны.

¹⁾ С формальной точки зрения необходимым и достаточным условием является равенство $\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y)$. Его выполнение эквивалентно также существованию $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$, удовлетворяющих соотношению (10.1.2). — *Прим. ред.*

В теории бесконечных игр вопрос о справедливости соотношения (10.1.1) является серьезным и требует тех или иных предположений о непрерывности функции $K(x, y)$ и компактности (в определенном смысле) по крайней мере одного из пространств X или Y . Достаточно, например, потребовать, чтобы функция $K(x, y)$ была по обоим переменным непрерывной, а множество X компактным. Читателю, желающему рассмотреть абстрактную постановку этой проблемы, следует ознакомиться с замечаниями в конце этой главы (см. также задачи 1—3). Далее мы всюду будем предполагать, что для рассматриваемого класса игр имеет место соотношение (10.1.1), если явно не оговорено противное. На деле в большинстве случаев мы будем проверять справедливость неравенств (10.1.2) и уже отсюда будет для рассматриваемых нами игр вытекать справедливость (10.1.1).

Если условия на X , Y и K слегка ослабить, то иногда можно доказать лишь более слабое соотношение, а именно

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y) = v. \quad (10.1.3)$$

По существу, это эквивалентно существованию ϵ -оптимальных стратегий для произвольного положительного числа ϵ . Стратегии x_0 и y_0 называются ϵ -оптимальными, если

$$K(x_0, y) \geq v - \epsilon \quad \text{для всех } y \in Y$$

и

$$K(x, y_0) \leq v + \epsilon \quad \text{для всех } x \in X.$$

В большинстве представляющих интерес случаев из справедливости (10.1.3) вытекает справедливость (10.1.2).

В этой главе, как и в гл. 1, мы даем определение игры непосредственно в терминах полных пространств стратегий, а не путем предварительного введения чистых стратегий. Тем не менее для многих классов игр предпочтительнее (да и естественнее) выделить множество чистых стратегий, выпуклой оболочкой которых является множество всех стратегий. В частности, для игр, разыгрываемых на единичном квадрате, уместнее именно второе (см. п. 10.2).

Выше мы определили игру как тройку $\{X, Y, K\}$. Переходя от чистых к смешанным стратегиям, мы можем расширить множество X до множества $\tilde{X}$, состоящего из всех регулярных вероятностных мер, определенных на борелевской алгебре, содержащей все открытые подмножества множества X . Аналогично по Y строится $\tilde{Y}$. Положим для любых $\mu \in \tilde{X}$ и $\nu \in \tilde{Y}$

$$K(\mu, \nu) = \int_X \int_Y K(x, y) d\mu(x) d\nu(y).$$

Функция K должна быть измеримой относительно этой борелевской алгебры.

Точки исходного множества X можно отождествить с вырожденными вероятностными мерами, вся масса которых полностью сосредоточена в одной точке x . Такая мера будет обозначаться через μ_x . Таким образом,

$$\mu_x(B) = \begin{cases} 0 & \text{при } B \not\supset \{x\}, \\ 1 & \text{при } B \supset \{x\}, \end{cases}$$

где B — произвольное измеримое подмножество множества X . Символу ν_y припишем аналогичное значение. Такой процесс расширения множества X соответствует процессу погружения пространства чистых стратегий в пространство смешанных стратегий. Однако если для игры $\{X, Y, K\}$ уже имеет место равенство (10.1.1), то это расширение не является существенным. В этом случае любая пара $\{x_0, y_0\}$ стратегий, оптимальных для исходной игры, является оптимальной и для расширенной игры, и значения этих игр равны. В самом деле, если

$$K(x_0, y) \geq v \quad \text{и} \quad K(x, y_0) \leq v \quad (10.1.4)$$

соответственно для всех y и x , то для $v \in Y$ и $\mu \in X$, интегрируя неравенства (10.1.4), мы получим

$$K(\mu_{x_0}, \nu) \geq v \quad \text{и} \quad K(\mu, \nu_{y_0}) \leq v$$

для всех $\nu \in \tilde{Y}$ и $\mu \in \tilde{X}$.

По отношению к фактически разыгрываемой игре сказанное можно интерпретировать следующим образом. Для того чтобы реализовать стратегию $\mu \in \tilde{X}$, мы выбираем $x \in X$, используя рандомизацию с помощью вероятностной меры μ , и применяем x в разыгрываемой игре. Приведенные выше аргументы показывают, что такие приемы рандомизации не могут обеспечить в среднем больших результатов, чем оптимальная стратегия $x_0 \in X$.

Итак, подведем итоги: при задании игры пространства стратегий X и Y обычно берутся как описания всевозможных способов действия. Если при этом выполнено (10.1.1), то никакое дальнейшее расширение понятия стратегии, как, например, введение понятия смешанной стратегии, ничего не изменяет.

В заключение этого параграфа сформулируем следующее полезное свойство оптимальных стратегий.

► **Лемма 10.1.1.** *Множество $X^0(Y^0)$ оптимальных стратегий игрока I (II) выпукло.*

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из выпуклости множества X и вогнутости функции $K(x, y)$ по x . Точнее, если x_1 и x_2 принадлежат X^0 , то

$$K(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, y) \geq \lambda K(x_1, y) + (1 - \lambda) K(x_2, y) \geq v$$

для всех u , $0 \leq \lambda \leq 1$ и, следовательно, точка $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ принадлежит множеству X^0 .

10.2. Игры на единичном квадрате. Одним из простейших непрерывных аналогов конечных матричных игр является класс игр, разыгрываемых на единичном квадрате. В этих играх тройка $\{X, Y, K\}$ состоит из ядра $K(\xi, \eta)$, являющегося функцией двух переменных ξ и η , каждая из которых имеет областью значений замкнутый интервал $[0, 1]$, и пространств стратегий X и Y , состоящих соответственно из всех функций распределения $x(\xi)$ и $y(\eta)$. (Читателю следует обратиться к приложению В.3, где изучаются распределения на вещественной прямой.) Выигрыш игрока I, если он выбирает стратегию x , а игрок II — стратегию y , равен

$$K(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta). \quad (10.2.1)$$

Стратегии

$$x_{\xi_0}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < \xi_0, \\ 1 & \text{при } \xi \geq \xi_0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y_{\eta_0}(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta < \eta_0, \\ 1 & \text{при } \eta \geq \eta_0 \end{cases}$$

называются „чистыми стратегиями“. Таким образом, в этом примере чистые стратегии каждого из игроков отождествляются с точками единичного интервала вещественной прямой. (Для вырожденного распределения, представляющего чистую стратегию, в условиях которой выбирается только число γ , мы будем иногда упускать обозначение I_γ .) Общая стратегия $x(\xi) \in X$ является вероятностной смесью¹⁾ чистых. Функция $K(x, y)$ представляет собой ожидаемый выигрыш игрока I при использовании чистых стратегий ξ и η , где ξ рандомизировано в соответствии с x , а η не зависит от ξ и рандомизировано в соответствии с y .

Часто мы будем применять для простоты следующие обозначения: $K(x, \eta)$ вместо $K(x, y_\eta)$; $K(\xi, y)$ вместо $K(x_\xi, y)$ и $K(\xi, \eta)$ вместо $K(x_\xi, y_\eta)$. Иными словами, $K(x, \eta)$ есть ожидаемый выигрыш игрока I, если он выберет стратегию x , в то время как игрок II использует чистую стратегию y_η и т. д.

Между матричными играми и играми на единичном квадрате можно установить известную аналогию. В матричных играх каждый игрок имеет конечное число чистых стратегий, тогда как в рассматриваемых играх множеством чистых стратегий игрока является одномерный континуум, который обычно понимается как единичный

¹⁾ Мы позволили себе перевести буквально выразительный оборот probability mixture. — *Прим. ред.*

интервал. В обоих случаях полные пространства стратегий порождаются чистыми стратегиями: они состоят из всех вероятностных смесей чистых стратегий. Ясно, что за счет увеличения размерности и мощности пространства чистых стратегий могут быть получены еще более сложные игры. Применение игр общего вида, в которых пространства чистых стратегий являются n -мерными единичными кубами, рассмотрено в пунктах 12.4 и 13.4.

Как указывалось в п. 10.1, существование оптимальных стратегий в бесконечных играх и разумная интерпретация этих игр зависят от выполнения соотношения (10.1.1). Если $K(\xi, \eta)$ непрерывная по обоим переменным функция, и $0 \leq \xi, \eta \leq 1$, то можно показать, что соотношение (10.1.1) выполнено. Как уже указывалось, это условие в дальнейшем будет всегда считаться выполненным.

Целью этой и последующих глав является нахождение путей вычисления оптимальных стратегий обоих игроков в произвольной игре на единичном квадрате. Почти столь же важным и необходимым является описание зависимости свойств решений вида игры. В последующем обсуждении отмечаются те существенные трудности, с которыми приходится встречаться при анализе игр на единичном квадрате.

Фиксируем произвольные стратегии x_0 и y_0 соответственно игроков I и II. Тогда на единичном квадрате существует такое непрерывное ядро $K(\xi, \eta)$, что x_0 и y_0 являются единственными оптимальными стратегиями в этой игре. Это ядро $K(\xi, \eta)$ можно сконструировать и как аналитическую функцию от каждой из своих переменных. Для иллюстрации в качестве x_0 и y_0 можно взять известное распределение Кантора (см. п. 15.1); даже в этом случае существует такая рациональная и непрерывная для $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ функция $K(\xi, \eta)$, что x_0 и y_0 будут единственными оптимальными стратегиями.

В силу таинственной природы оптимальных стратегий для казалось бы вполне благопристойных ядер возникают существенные затруднения при всякой попытке сколько-нибудь просто охарактеризовать решения, связанные с этим ядром. Поэтому более правильным, по-видимому, является исследование частных классов ядер, которые естественным образом возникают при изучении примеров, и концентрация усилий на выявлении свойств этих решений, зависящих от природы ядра. С математической точки зрения эта задача носит классификационный характер. В самом деле, мы пытаемся связать предположения о частных характеристиках ядра с видом решения. В следующем пункте мы опишем ряд частных классов непрерывных ядер на единичном квадрате вместе с некоторыми результатами относительно них.

Прежде всего введем для общих бесконечных игр на единичном квадрате подходящую терминологию и установим некоторые простые факты. Все определения сформулированы здесь применительно к стра-

тегии x ; соответствующая система обозначений и терминология применима и к стратегии y .

Для любого распределения f на вещественной прямой (в частности, для элементов множеств X и Y) *спектром* меры f называется дополнение наибольшего открытого множества, на котором мера f равна нулю¹⁾ (см. приложение В.3). Понятно, что если ξ принадлежит спектру $f(\xi)$, то для каждого открытого интервала $I_{a,b}$, содержащего ξ , должно быть $f(b) - f(a) > 0$.

Чистая стратегия ξ называется *«существенной»*, если существует оптимальная стратегия x , в которой ξ используется (т. е. ξ принадлежит спектру x).

Стратегия x называется *стратегией конечного типа*, если она представима в виде выпуклой комбинации конечного числа чистых стратегий, т. е. если ее спектр состоит из конечного числа точек. В этом случае стратегия x представима в виде

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\xi_i}, \quad \text{где } \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Чистые стратегии $\xi_1, \dots, \xi_n$, с помощью которых образована стратегия x , называются *«существенными»* для этой стратегии соответственно с *весами* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Стратегия конечного типа реализуется посредством выбора с вероятностью λ_j ($j=1, \dots, n$) числа j между 1 и n и последующим указанием чистой стратегии ξ_j . Игры, которые имеют оптимальные стратегии конечного типа, представляют интерес из-за их простого вида.

Другим часто встречающимся классом стратегий является класс вполне смешанных стратегий. Стратегия называется *вполне смешанной*, если ее спектр полностью совпадает с единичным интервалом. Например, если распределение x имеет плотность, которая положительна на всем единичном интервале, то x — вполне смешанная стратегия.

Следующая лемма окажется полезной в дальнейшем.

► **Лемма 10.2.1.** Пусть x_0 и y_0 оптимальны. Если точка η_0 принадлежит спектру y_0 , то $K(x_0, \eta_0) = v$, где v — значение игры. (Эта лемма является непосредственным аналогом леммы 2.1.2.)

Доказательство. Поскольку стратегия x_0 оптимальна, мы имеем $K(x_0, \eta) \geq v$ для $0 \leq \eta \leq 1$. Если бы $K(x_0, \eta_0)$ было больше v , то и в некоторой окрестности точки η_0 также выполнялось бы

¹⁾ То есть спектром является наименьшее замкнутое множество, вне которого функция f равна нулю. — *Прим. перев.*

строгое неравенство (напомним, что, по предположению, функция $K(\xi, \eta)$ непрерывна по обоим переменным). Но поскольку точка η_0 принадлежит спектру y_0 , интервал, содержащий точку η_0 , имеет положительную относительно y_0 меру. Отсюда, интегрируя $K(x_0, \eta)$ по dy_0 , мы получим $K(x_0, y_0) > v$, что противоречит оптимальности y_0 . Аналогичный результат справедлив и для другого игрока.

Стратегия $\tilde{x}$ называется *устойчивой*¹⁾, если $K(\tilde{x}, \eta) = c$ для $0 \leq \eta \leq 1$ и некоторой константы c . Из леммы 10.2.1 мы получаем

► Следствие 10.2.1. Если x^0 — вполне смешанная оптимальная стратегия, то каждая оптимальная стратегия игрока II устойчива.

► Следствие 10.2.2. Если каждая точка ξ из единичного интервала является существенной чистой стратегией игрока I, то каждая оптимальная стратегия игрока II устойчива.

Говорят, что игра с ядром $K(\xi, \eta)$ симметрична, если $K(\eta, \xi) = -K(\xi, \eta)$. Это понятие является точным аналогом понятия симметричной матричной игры. Более того, совпадают и основные свойства симметричных игр: их значения равны нулю, а множества оптимальных стратегий для обоих игроков совпадают. Поскольку эти утверждения устанавливаются в нашем случае точно так же, как это было сделано для матричных игр, формальные детали мы опускаем.

Наконец, еще одно определение: пара чистых стратегий $\{\xi^0, \eta^0\}$ называется *седловой точкой игры*²⁾, если

$$K(\xi^0, \eta) \geq K(\xi^0, \eta^0) \geq K(\xi, \eta^0) \quad \text{для } 0 \leq \xi, \eta \leq 1.$$

10.3. Классы игр на единичном квадрате. В этом пункте мы опишем структуру некоторых важных классов игр на единичном квадрате и укажем некоторые характеристики каждого класса. Эти характеристики окажутся полезными при определении решений игр из данного класса. Иллюстрируя широкое распространение этих игр, мы приведем примеры из политики, военной тактики и деловой жизни.

Доказательства всех утверждений, относящихся к классам этих игр, можно найти в гл. 10—15.

Игры с вырожденными ядрами. Некоторые бесконечные игры на единичном квадрате можно свести к конечным играм. Это может быть сделано, если ядро $K(\xi, \eta)$ имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} r_i(\xi) s_j(\eta),$$

¹⁾ Синоним: уравнивающая стратегия. — Прим. ред.

²⁾ Синоним: ситуация равновесия. — Прим. ред.

где $r_i(\xi)$ и $s_j(\eta)$ — непрерывные функции. Такая игра называется *вырожденной*. Непосредственное вычисление показывает, что

$$K(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} \int_0^1 r_i(\xi) dx(\xi) \int_0^1 s_j(\eta) dy(\eta) = \sum_{i,j} a_{ij} r_i s_j, \quad (10.3.1)$$

где векторы $r = (r_1, \dots, r_n)$ и $s = (s_1, \dots, s_m)$ определяются очевидным образом. Следовательно, если при определении образа действий руководствоваться возрастанием выигрыша, то вырожденная игра с ядром (10.3.1) может быть переопределена как тройка $\{R, S, A\}$. Здесь множество R состоит из всех таких векторов $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, что

$$r_i = \int_0^1 r_i(\xi) dx(\xi)$$

для $x \in X$; аналогично определяется множество S , состоящее из всех векторов

$$s = (s_1, \dots, s_m),$$

для которых

$$s_j = \int_0^1 s_j(\eta) dy(\eta)$$

для $y \in Y$, а элементы матрицы A суть a_{ij} . При заданных r и s выигрыш игрока I равен $(r, As) = A(r, s)$. Хотя нескольким различным элементам множества X может соответствовать одна и та же точка множества R , в силу (10.3.1) эти элементы множества X могут влиять на выигрыш только через значения компонент вектора r . Поэтому все элементы $x \in X$, соответствующие одному и тому же вектору r , обеспечивают игроку I один и тот же выигрыш. Заметим, наконец, что множества R и S выпуклы, ограничены и замкнуты, поскольку $r_i(\xi)$ и $s_j(\eta)$ являются непрерывными замкнутыми функциями.

Применяя к игре $\{R, S, A\}$ общую теорему о минимаксе из п. 1.5, мы заключаем, что существуют такие r^0 и s^0 (не обязательно единственные), что

$$A(r^0, s) \geq A(r^0, s^0) \geq A(r, s^0)$$

для всех $r \in R$ и $s \in S$. Рассмотрим отображение из X в E^n с помощью преобразования $Ux = \left\{ \int r_i(\xi) dx(\xi) \right\}$. Любая точка $x^0 \in X$, образом которой при преобразовании U является точка r^0 , оказывается решением игры $\{X, Y, K\}$. Аналогично оптимальными стратегиями игрока II будут те точки $y^0 \in Y$, образы которых при линейном

преобразовании $Vy = \left\{ \int s_j(\eta) dy(\eta) \right\}$ совпадают с точкой s^0 . Справедливо и обратное: любые оптимальные стратегии $\{x^0, y^0\}$ вырожденной игры $\{X, Y, K\}$ приводят к оптимальным стратегиям $\{r^0, s^0\}$ для преобразованной игры $\{R, S, A\}$.

Следовательно, решение вырожденной игры эквивалентно нахождению всех решений связанной с ней матричной игры, если мы можем определить прообразы заданных точек r и s соответственно при преобразованиях U и V . Этот вопрос изучается в следующей главе.

Важной вырожденной игрой является игра с ядром

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} \xi^i \eta^j \quad (0 \leq \xi \leq 1; 0 \leq \eta \leq 1).$$

Поскольку любую игру с непрерывным ядром, определенным на единичном квадрате, можно равномерно аппроксимировать играми с полиномиальными ядрами, соответствующие оптимальные стратегии будут сходиться к некоторым предельным стратегиям, которые окажутся оптимальными для исходной игры (см. теорему 11.3.1). Однако процесс предельного перехода в общем случае оказывается довольно сложным, и поэтому полиномиальные игры не очень полезны при изучении природы решений непрерывных игр общего вида на единичном квадрате. Тем не менее полиномиальные игры интересуют нас здесь по двум причинам. Во-первых, можно провести довольно полный анализ свойств решений таких игр, и этот анализ помогает найти подход к вырожденным играм общего вида. Во-вторых, можно указать хорошо разработанный вычислительный процесс для нахождения решений полиномиальных игр (см. п. 11.2 и задачи 1—3 гл. 11).

В гл. 11 будет показано, что в вырожденных играх оба игрока обладают оптимальными стратегиями конечного типа. Более того, можно установить существование решений, в которых число элементов спектра ограничено в зависимости от числа членов в представлении ядра $K(\xi, \eta)$. В случае полиномиальных игр можно высказать и более точные утверждения относительно спектров оптимальных стратегий для обоих игроков.

Игры с выпуклым ядром. Выпуклым называется ядро, для которого при всех ξ и η из единичного интервала имеет место неравенство

$$\frac{\partial^2 K(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \geq 0.$$

В играх с выпуклым ядром для игрока II существует чистая оптимальная стратегия, а игрок I имеет оптимальную стратегию, спектр которой состоит не более, чем из двух точек. Поскольку последнее утверждение содержит достаточно много информации о структуре оптимальных стратегий, игры этого типа решаются легко (см. п. 12.2).

Аналогичные результаты могут быть получены для ядер, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{\partial^r K(\xi, \eta)}{\partial \eta^r} \geq 0$$

для некоторого r , а также для игр, в которых ξ изменяется на компактном связном множестве $R \subset E^n$, η изменяется на выпуклом компактном множестве $S \subset E^m$, а ядро $K(\xi, \eta)$, непрерывное по обоим переменным, является выпуклой функцией η при всех значениях ξ . Читателю следует иметь в виду, что поскольку S — m -мерное множество, мы говорим здесь о выпуклых функциях многих переменных (см. приложение Б.4).

Опишем теперь задачу, которая приводит к игре этого типа. Моделью является военно-тактическая задача об обороне некоторого участка. Пусть игрок II обороняет n объектов $T_1, \dots, T_n$, относительные „ценности“ которых равны $k_1, \dots, k_n$. Упорядочим объекты так, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$; т. е. объект 1 является самым важным, объект 2 — следующим по важности и т. д. Пусть суммарные силы обороняющихся равны D . Чистой стратегией игрока II является набор n неотрицательных чисел $(\eta_1, \dots, \eta_n)$, удовлетворяющих условию $\sum \eta_i = D$, где η_i означает часть сил, предназначенных для защиты объекта T_i . Пусть игрок I является нападающим; обозначим суммарные его силы через A . Чистой стратегией игрока I будет вектор $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ с $\xi_i \geq 0$ и $\sum \xi_i = A$, причем i -я компонента этого вектора означает часть сил, атакующих объект T_i .

Мы предполагаем, что результат атаки на объект T_i пропорционален разности $\xi_i - \eta_i$, если силы атакующего превосходят силы защищающего; в остальных случаях результат атаки равен нулю. Итак,

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n k_i \max(0, \xi_i - \eta_i). \quad (10.3.2)$$

Эта функция выпукла по каждой из переменных ξ и η и непрерывна по совокупности этих переменных; ξ и η принимают значения из симплексов соответственно с вершинами $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ и $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, где

$$\mathbf{d}_1 = (D, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{d}_2 = (0, D, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{d}_n = (0, 0, \dots, D)$$

и аналогично

$$\mathbf{a}_1 = (A, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{a}_n = (0, \dots, 0, A).$$

Этот пример можно интерпретировать также и в терминах политической кампании с двумя партиями, каждая из которых пытается

решить вопрос, в какие из нескольких имеющихся участков вкладывать деньги, отпущенные на эту кампанию. Этот пример рассматривается детально в гл. 12, где приводится его полное решение.

Теорема, на которой основан анализ этого примера, состоит в том, что в обобщенной выпуклой игре — игре, в которой ядро $K(\xi, \eta)$ выпукло по η , переменные ξ, η изменяются соответственно в R и S и множество S n -мерно — игрок II имеет оптимальную чистую стратегию, а игрок I — оптимальную стратегию конечного типа со спектром, состоящим не более чем из $n + 1$ точек.

Игры с выбором момента времени. Игры с выбором момента времени являются играми, в которых выбор чистой стратегии представляет собой выбор момента времени для совершения определенного действия.

Предположим, например, что две большие компании типа „Книга — почтой“ намереваются издать свои ежегодные каталоги. Когда именно следует выпустить каталог — это важный вопрос. Компания, которая первая выступит со своим каталогом, получает возможность опередить своего конкурента. С другой стороны, компания, которая ждет дольше, может нажить капитал на недостатках каталога своего конкурента.

Или предположим, что две борющиеся политические партии пытаются решить, когда выпустить свои агитационные брошюры. Некоторые люди поддаются первому влиянию, а потом уже не изменяют своих мнений. На поведение других оказывает влияние главным образом то, что до них дошло в последний момент.

Следующая задача о выборе момента времени является обычной задачей в деле книгоиздательства. Две конкурирующие компании пытаются подписать договор с будущим автором. Момент времени, т. е. время появления представителя издательства с контрактом и различными обещаниями, представляет собой чистую стратегию. Слишком ранняя встреча может оказаться неудачной, так как автор еще не продвинется к тому времени достаточно далеко в своей работе, чтобы вопрос о ее опубликовании стал для него актуальным. С другой стороны, предложение может запоздать: конкурент может к этому времени уже договориться с автором. Правильный психологический момент является хорошо известным и неоднократно обсуждавшимся понятием в этой игре.

Читатель может легко придумать множество других примеров игр с выбором момента времени. Такие игры не обязательно включают одно возможное действие (как в приведенных примерах), а могут содержать несколько повторных действий.

С математической точки зрения игра с выбором момента времени описывается как игра, определенная на единичном квадрате, ядро

которой обладает следующими свойствами:

$$(1) K(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta), & \text{если } \xi < \eta, \\ \Phi(\xi), & \text{если } \xi = \eta, \\ M(\xi, \eta), & \text{если } \xi > \eta. \end{cases} \quad (10.3.3)$$

(2) Каждая из функций $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ непрерывна по совокупности переменных ξ и η .

(3) $L(\xi, \eta)$ монотонно возрастает по ξ для каждого η ,

$M(\xi, \eta)$ монотонно возрастает по ξ для каждого η ,

$L(\xi, \eta)$ монотонно убывает по η для каждого ξ ,

$M(\xi, \eta)$ монотонно убывает по η для каждого ξ .

Переменные ξ и η следует рассматривать как моменты времени, в которые действуют противники. Тот факт, что их значения ограничены единичным интервалом, является условием нормализации и реальных ограничений на модель не накладывает. Монотонность функций $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ и разрыв ядра при $\xi = \eta$ можно интерпретировать так: если игрок II собирается действовать в фиксированный момент времени η , то игрок I улучшает свои шансы на успех, выжидая, сколько возможно, при условии, что он действует все же раньше игрока II. Если игрок I дожидается того момента, когда совершит действие игрок II, то он может и проиграть, если игрок II действует успешно. Этим, в сущности, и объясняется разрыв при $\xi = \eta$. Как только игрок II совершил свое действие, шансы на успех игрока I возрастают со временем. Это выражается монотонностью $M(\xi, \eta)$ как функции ξ . Аналогичные рассуждения применимы и к игроку II, так как он извлекает пользу всякий раз, когда уменьшается выигрыш игрока I.

Здесь мы впервые встречаемся с ядром $K(\xi, \eta)$, которое может иметь разрыв на диагонали квадрата, где оно определено. Это допустимо, так как при помощи абстрактной теории игр можно доказать, что ядра, обладающие разрывами только на диагонали, удовлетворяют неравенству

$$\sup_x \inf_y \int \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) = \inf_y \sup_x \int \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta). \quad (10.3.4)$$

Если (10.3.4) выполняется, то в игре существуют ϵ -оптимальные стратегии, и обратно. Во всех рассмотренных конкретных случаях ϵ -оптимальные стратегии будут указываться явно; таким образом, справедливость соотношения (10.3.4) будет установлена непосредственно. Более того, в большинстве случаев мы сможем заменить в (10.3.4) $\sup$ на $\max$, а $\inf$ на $\min$.

Такие игры имеют не только практическое значение, но представляют также и теоретический интерес, так как их можно полностью проанализировать и найти для них оптимальные стратегии.

Оказывается, что оптимальные стратегии состоят здесь из скачков и части, имеющей плотность. Та часть, которая имеет плотность, получается с помощью решения стандартной задачи на отыскание собственных значений линейного интегрального уравнения, т. е. выражается рядом Неймана (см. гл. 13, где разбирается этот вопрос). Часто ядро имеет вырожденную форму, которая позволяет заменить интегральное уравнение более просто решаемой системой дифференциальных уравнений. Почти во всех случаях оптимальные стратегии единственны, что упрощает их нахождение.

Существует два класса игр с выбором момента времени. В первом из них, более простом, $L(\xi, \eta)$ является функцией только ξ , а $M(\xi, \eta)$ — функцией только η . Мы будем говорить о такой игре как об игре с выбором момента времени в условиях „полной информации“, т. е. в обстановке, когда действия каждого из игроков, а также последствия этих действий немедленно становятся известными противнику. Пример с каталогами компаний „Книга — почтой“ можно по очевидным соображениям рассматривать как игру с полной информацией.

Примеры матричных игр с полной информацией показывают, что в этих случаях существуют оптимальные чистые стратегии. Рандомизация чистых стратегий возникает главным образом из-за неопределенностей, окружающих игрока: если в модели присутствует какая-либо неопределенность, то оптимальные стратегии почти всегда оказываются смешанными. В силу этих эвристических замечаний еще одно оправдание названия „игры с выбором момента времени с полной информацией“ состоит в том, что игры этого класса обычно обладают оптимальными чистыми стратегиями.

Класс II состоит из всех игр с выбором момента времени, не принадлежащих классу I, т. е. играми, в которых L , M или обе эти функции явно зависят как от ξ , так и от η . В таких играх действия игрока неизвестны его противнику. Так называемые бесшумные дуэли являются примерами игр этого типа (см. гл. 13); другим примером является описанная выше конкуренция между двумя издательствами. Оптимальные стратегии для игр этого класса обычно представляют собой фактическую рандомизацию чистых стратегий.

Глава 13 содержит полный анализ игр с выбором момента времени класса II и обсуждение некоторых интересных примеров, иллюстрирующих решение таких игр. Глава 14 посвящена главным образом изучению игр с выбором момента времени класса I. Кроме того, в этой главе имеется введение в теорию игр с выбором моментов времени, допускающих несколько действий. Методы интегральных уравнений, которые используются для решения игр с выбором момента времени, применяются к ядрам вида (10.3.3), причем предполагается, что ядра непрерывны всюду на единичном квадрате, за исключением разрыва первой производной вдоль главной диагонали (п. 14.5).

Колоколообразные игры. Следующая игра является „колоколообразной“. Подводная лодка Π пытается избежать попадания глубинной бомбы, сброшенной с самолета Σ . В течение всего времени, предшествующего сбрасыванию бомбы, подводная лодка (игрок Π) может занять любую позицию в интервале $-a \leq \eta \leq a$, где a — заданная положительная постоянная. Игрок I (самолет) знает возможные местоположения подводной лодки. Если Π занимает место η , а Σ сбрасывает бомбу в ξ , то мы предполагаем, что нанесенный ущерб пропорционален функции ошибки $e^{-b(\xi-\eta)^2}$ (b — положительная постоянная). После соответствующей нормировки игру можно сформулировать как непрерывную игру на единичном квадрате, для которой

$$K(\xi, \eta) = e^{-\lambda(\xi-\eta)^2},$$

где λ — параметр, зависящий от постоянных b и a . Игрок Π выбирает η , игрок I выбирает ξ , а функция выигрыша K дана выше.

Ядро K называется колоколообразным, если $K(\xi, \eta) = \Phi(\xi - \eta)$, а функция Φ имеет следующие свойства:

(1) $\Phi(u)$ — аналитическая функция, определенная для всех вещественных u ;

(2) для любого n и любого множества значений ξ_i и η_i , таких, что $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$ и $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n$, определитель матрицы $\|\Phi(\xi_i - \eta_j)\|$ положителен;

$$(3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u) du < \infty.$$

Функция $\Phi(u) = e^{-\lambda u^2}$ этим условиям удовлетворяет (см. п. 15.2).

Мы можем доказать, что колоколообразные игры обладают единственными оптимальными стратегиями конечного типа (см. гл. 15). В случае $\Phi(u) = e^{-\lambda u^2}$ оптимальные стратегии можно полностью вычислить по рекурсивной схеме, где λ является переменным параметром.

Различные игры. Отдельные результаты, связанные с предположениями о ядре, можно получить и для других игр. Двумя такими классами игр, заслуживающими здесь упоминания, являются *аналитические игры* и *игры, инвариантные по отношению к группам преобразований*.

Если $K(\xi, \eta)$ является аналитической функцией каждой из переменных и подчиняется некоторым свойствам возрастания, то в игре с ядром K существуют оптимальные стратегии конечного типа. В общем случае, однако, распознать свойства решений игр с аналитическими ядрами очень трудно. Чтобы продемонстрировать эту трудность, достаточно напомнить еще раз (см. также п. 16.1) утвер-

ждение о том, что любые две стратегии x и y можно рассматривать как единственное решение для некоторого аналитического ядра. Правда, можно сказать, что такие игры, характеризуемые одним лишь свойством аналитичности ядра, не составляют, естественно, очерченного класса, и неудивительно, что для них не существует единой специфической теории, которая была бы достаточно изящна. Этот довод представляется вполне серьезным. В самом деле, есть основания верить, что для наличия связи между решением и ядром должна существовать физическая модель, отражающая свойства ядра достаточно естественным способом. Это справедливо, во всяком случае, для выпуклых игр, для игр с выбором момента времени и для колоколообразных игр.

В отличие от аналитических игр игры, инвариантные относительно группы преобразований, часто решаются легко. Примерами таких игр являются игры с ядрами вида $K(\xi, \eta) = \Phi(\xi - \eta)$, где Φ — периодическая функция с периодом 1. Легко заметить, что оптимальной стратегией для каждого игрока в этом случае является равномерное распределение $d\xi$ (п. 15.5). Пусть игра построена таким образом, что группа преобразований, определенных на ядре, индуцирует группу преобразований на пространствах стратегий таким образом, что выигрыши не изменяются. В этом случае мы вправе надеяться, что оптимальные стратегии также инвариантны относительно элементов групп таких преобразований. Эвристические рассуждения показывают, что операции, изменяющие наименования стратегий, не должны влиять на решение такой игры. В примере, приведенном выше, подходящей группой преобразований является группа сдвигов вдоль вещественной оси, а единственным распределением, инвариантным относительно всех смещений по модулю 1, является равномерное распределение.

Теория инвариантов для групп преобразований и вопросы принятия решений являются основными в задачах, включающих статистический анализ; эти вопросы, однако, выходят за рамки настоящей книги. В п. 15.5 мы отметим несколько простых приложений понятий инвариантности к теории игр.

Другие поучительные примеры различных игр читатель сможет найти в задачах этой главы и гл. 15.

10.4. Бесконечные игры, у которых пространства стратегий являются известными функциональными пространствами. В двух предыдущих пунктах мы рассматривали различные классы игр, определенных на единичном квадрате, для которых пространства стратегий X и Y отождествлялись с множеством вероятностных распределений на единичном интервале. В этом пункте мы приведем несколько типичных примеров игр, в которых пространствами стратегий являются подмножества известных функциональных пространств, но

которые нельзя рассматривать, как игры, разыгрываемые на единичном квадрате.

*Дуэль снайпера с пулеметчиком*¹⁾. Снайпер С, располагающий одним выстрелом, стремится уничтожить пулеметчика П. Так как С может выстрелить только один раз, его стратегия состоит в выборе момента времени для этого выстрела. Пусть $a(t)$ — меткость снайпера, т. е. вероятность того, что П будет уничтожен, если С стреляет в момент (или на расстоянии) t (переменная t нормирована так, что она изменяется в сегменте $[0, 1]$). Смешанной стратегией С (игрок I) является вероятностное распределение на $[0, 1]$. В этой модели мы предполагаем, что как только С выстрелил, успешно или нет, он сразу же скрывается (если он в состоянии это сделать), и дуэль заканчивается.

Пулеметчик вооружен пулеметом и, защищаясь, пытается уничтожить снайпера. Стратегия П определяется функцией $p(t)$, измеряющей интенсивность, с которой стреляют из пулемета в момент t . Мы предполагаем, что боеприпасы П, если он стреляет с максимальной плотностью, иссякнут за период $\delta < 1$. Следовательно, нерандомизированные стратегии $p(t)$ для П состоят из всех функций, удовлетворяющих ограничениям

$$0 \leq p(t) \leq 1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 p(t) dt = \delta. \quad (10.4.1)$$

Меткость пулеметчика $r(t)$ непрерывна и монотонна, причем $r(0) = 0$, $r(1) = 1$. Функция r измеряет меткость в том смысле, что если П стреляет с интенсивностью $p(t)$ в течение малого интервала времени $[t, t+h]$, то вероятность того, что С будет уничтожен, равна $p(t)r(t)h + o(h)$.

Предположим, что $\varphi(t, p)$ — вероятность того, что С выживет к тому моменту t , когда П решил стрелять с интенсивностью $p(t)$. Ясно, что

$$\varphi(t+h, p) = \varphi(t, p)[1 - p(t)r(t)h] + o(h)$$

для малых положительных h и, следовательно,

$$\frac{\varphi(t+h, p) - \varphi(t, p)}{h} = -\varphi(t, p)p(t)r(t) + o(1).$$

В пределе мы находим, что $\varphi(t, p)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'(t, p) = -\varphi(t, p)r(t)p(t)$$

¹⁾ В оригинале эта игра называется дуэлью истребителя с бомбардировщиком. — *Прим. ред.*

с начальным условием $\varphi(0, p) = 1$. Решением этого уравнения является

$$\varphi(t, p) = \exp \left[- \int_0^t p(u) r(u) du \right]. \quad (10.4.2)$$

Функция выигрыша для игры $K(\xi, p)$, когда С применяет чистую стратегию ξ (момент единственного выстрела), а П применяет стратегию η , вычисляется следующим образом.

Положим выигрыш С равным α , если С уничтожает П, — β , если П уничтожает С, и нулю, если ни один из противников не уничтожен. Тогда ядро, рассматриваемое как ожидаемый выигрыш С (игрока I), равно

$$K(\xi, p) = \alpha a(\xi) \varphi(\xi, p) - \beta [1 - \varphi(\xi, p)]. \quad (10.4.3)$$

Выигрыш игрока I в условиях его смешанной стратегии x и выбора p игроком II получается усреднением (10.4.3) относительно меры $x(\xi)$:

$$K(x, p) = \int_0^1 K(\xi, p) dx(\xi). \quad (10.4.4)$$

Итак, мы можем рассматривать эту игру как тройку $\{X, Y, K\}$, где X — пространство вероятностных распределений на единичном интервале, Y состоит из всех p , удовлетворяющих (10.4.1), а K вычисляется по формуле (10.4.4.)

Формальное различие между этой игрой и обычной игрой на единичном квадрате очевидно. Пространство стратегий Y в этом случае имеет иной характер и требует новых методов анализа. Для определения вида оптимальной стратегии С мы впервые в этой книге используем классическую лемму Неймана — Пирсона (см. п. 16.4), являющуюся фундаментальной теоремой статистики. Применение леммы Неймана — Пирсона в данном случае является естественным ввиду ограничений (10.4.1).

В гл. 16 мы рассмотрим решение этой задачи и нескольких ее вариантов, в том числе дуэли двух пулеметчиков.

Покер. Большое количество примеров нетривиальных игр дают салонные игры. В частности, варианты покера являются неисощимым источником интересных и требующих искусства игровых моделей. Модели покера, помимо своего значения для теории игр, интересны благодаря явному сходству с задачами статистической теории испытания гипотез.

Модели покера вообще можно описать следующим образом. Стратегии игроков I и II отождествляются с вектор-функциями

$$\varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)) \quad (0 \leq \varphi_i(\xi) \leq 1)$$

и

$$\psi(\eta) = (\psi_1(\eta), \dots, \psi_m(\eta)) \quad (0 \leq \psi_j(\eta) \leq 1).$$

Эти векторы могут быть подчинены дополнительным линейным ограничениям. Мы предполагаем, что ξ и η являются случайными величинами соответственно с функциями распределения F и G , которые игроками I и II держатся в тайне. Стратегия φ игрока I есть функция наблюдения ξ и возможных действий игрока II; стратегия ψ игрока II есть функция наблюдения η и возможных действий игрока I. Функция выигрыша имеет вид

$$K(\varphi, \psi) = \int \int P(\xi, \eta; \varphi(\xi), \psi(\eta)) dF(\xi) dG(\eta),$$

где P — функция, определенная моделью.

В качестве множества раскладов, которые могут быть сданы игроку, обычно в моделях берется единичный интервал. Каждый расклад считается равновероятным; поэтому операция сдачи расклада игроку может считаться эквивалентной выбору случайного числа из единичного интервала в соответствии с равномерным распределением. Естественно, расклад ξ_1 считается хуже расклада ξ_2 тогда и только тогда, когда $\xi_1 < \xi_2$. Игра осуществляется следующим образом: игроки I и II выбирают из единичного интервала точки (извлекают из колоды расклады) соответственно ξ и η согласно равномерному распределению (что соответствует равной вероятности всех возможных раскладов). Предварительно оба игрока ставят по единице. Игрок I, зная свой расклад ξ , действует первым и имеет возможность или спасовать сразу, теряя таким образом ставку в пользу игрока II, или поставить любую из фиксированных заранее величин $a_1, a_2, \dots, a_n$, где $1 < a_1 < \dots < a_n$. Игрок II должен отвечать, либо сразу пасуя, либо же уравнивая ставку. В первом случае игрок I выигрывает ставку игрока II. Если игрок II уравнивает ставку, то расклады ξ и η сравниваются, и игрок с лучшим раскладом выигрывает банк. Если $\xi = \eta$, то никаких платежей не производится.

Стратегия игрока I может быть описана как вектор-функция

$$\varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)),$$

где $\varphi_i(\xi)$ обозначает вероятность того, что он поставит a_i , если его расклад есть ξ . Функции $\varphi_i(\xi)$ должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \leq 1.$$

Вероятность того, что игрок I сразу спасует, равна

$$1 - \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi).$$

Стратегия игрока II может быть представлена вектором

$$\psi(\eta) = (\psi_1(\eta), \dots, \psi_n(\eta)),$$

где $\psi_i(\eta)$ обозначает вероятность уравнивать ставку a_i , если он имеет расклад η . Вероятность того, что игрок II спасует после того, как игрок I поставил a_i , равна $1 - \psi_i(\eta)$. Каждая функция $\psi_i(\eta)$ подчинена только условию $0 \leq \psi_i(\eta) \leq 1$.

Если игрок I применяет стратегию φ , а игрок II применяет стратегию ψ , то ожидаемый выигрыш игрока I обозначается $K(\varphi, \psi)$. Перечисляя все возможности, мы находим, что

$$K(\varphi, \psi) = (-1) \int_0^1 \left(1 - \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \right) d\xi + \\ + \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) (1 - \psi_i(\eta)) d\xi d\eta + \sum_{i=1}^n (a_i + 1) \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где

$$L(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi > \eta, \\ 0, & \text{если } \xi = \eta, \\ -1, & \text{если } \xi < \eta. \end{cases}$$

Выполнение соотношения (10.1.1) для таких игр легко доказывается привлечением соответствующих абстрактных теорем о минимаксе. Важнее то, что, несмотря на сложный вид модели, существует конструктивный метод, который приводит к точным оптимальным стратегиям для каждого игрока. Глава 17 посвящена разработке этого метода и решению нескольких интересных и важных примеров.

10.5. Как решать бесконечные игры. Решение игр напоминает решение дифференциальных уравнений; здесь необходимо сочетание хорошей догадки (интуиции), искусного владения техникой преобразований и способности использования специфических свойств задачи.

Всякий раз, когда это возможно, следует использовать все наиболее характерные свойства рассматриваемого ядра. Например, в полиномиальных играх для ограничения размера спектра решений очень полезно подробно знать структуру пространств моментов. Рассмотрим в качестве иллюстрации ядро

$$K(\xi, \eta) = \xi\eta^2 - \xi^2 + 2\xi\eta - \eta^2.$$

Из теории следует, что для обоих игроков существуют решения, спектр которых либо состоит из точек 0 и 1, либо состоит из единственной точки, лежащей внутри единичного интервала (см. п. 11.8). Воспользовавшись этими фактами, мы после несложных выкладок получаем оптимальные стратегии

$$x^0(\xi) = x_{1/3}(\xi), \quad y^0(\eta) = \frac{7}{9} y_0(\eta) + \frac{2}{9} y_1(\eta)$$

и значение игры, равное $-1/9$. Тот же самый ответ можно было бы получить, используя теорию выпуклых игр (точнее говоря, в этом случае надо использовать соответствующий ее аналог — теорию вогнутых игр).

В играх с выбором момента времени, в выпуклых играх, в колоколообразных играх уже сама теория указывает путь определения оптимальных стратегий. Этот путь не является столь же формальным, как способы решения конечных игр или задач линейного программирования. Зачастую вычисления сводятся к решению интегральных или дифференциальных уравнений, которые можно решать с использованием, если это необходимо, методов численного анализа. Именно так и следует интерпретировать слова „способ решения“ в нашем контексте. Остается еще добавить, что соответствующий вычислительный процесс почти всегда можно существенно ускорить, воспользовавшись специфическими свойствами ядра.

Часто задача ставится так: что делать с ядрами, о виде решения которых априори ничего не известно. Одна возможность состоит в использовании для угадывания вида решения тех или иных аналогий. Затем соответствующие преобразования и модификации предполагаемого решения, возможно, помогут подойти к истинному решению. Этот метод мы проиллюстрируем с помощью следующего примера.

Для колоколообразных игр в нашем распоряжении имеется содержательная теория. Поскольку для таких игр существуют решения конечного типа, мы можем написать некоторую систему уравнений, из которой рекуррентным образом можно найти решение игры (см. п. 15. 2).

Отвлечемся на минуту в сторону и попытаемся решить игру с ядром

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{1 + \lambda(\xi - \eta)^2}.$$

Это ядро не совсем удовлетворяет условиям, наложенным на колоколообразные игры; однако график функции $1/(1 + \lambda u^2)$ очень похож на график функции $e^{-\lambda u^2}$. Следовательно, для этой игры можно провести аналогию с колоколообразными играми. Это дает нам оптимальные стратегии

$$x^0(\xi) = x_{1/2}(\xi) \quad \text{и} \quad y^0(\eta) = \frac{1}{2} y_0(\eta) + \frac{1}{2} y_1(\eta)$$

для $0 \leq \lambda \leq 4/3$. Для $\lambda = 2$ можно показать аналогично, что спектры оптимальных стратегий каждого из игроков состоят из двух точек. Для остальных значений λ анализ протекает точно так же, как и в случае колоколообразных игр.

Если нет подходящего аналога, то можно попытаться искать оптимальную стратегию x^0 , для которой $K(x^0, y) = c$ тождественно для всех $y \in Y$. Стратегия x^0 , обладающая таким свойством, называется *устойчивой*¹⁾. (Это совпадает с понятием устойчивой стратегии, введенным в связи с оптимальными стратегиями для игр на единичном квадрате.) Если уравнение $K(x^0, y) = c$ имеет решение $x^0 \in X$, а уравнение $K(x, y^0) = b$ имеет решение $y^0 \in Y$, то легко показать, что x^0, y^0 суть оптимальные стратегии и поэтому $b = c$. Такой прием обнаружения стратегий, которые тождественно дают v , применим значительно чаще, чем это можно было бы ожидать. Приведем один пример, где этот прием позволяет найти решение.

Предположим, что

$$K(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)^k (1+\eta)^k (1-\xi\eta)}{(1+\xi\eta)^{k+1}} \quad (0 \leq \xi, \eta \leq 1, k > 0). \quad (10.5.1)$$

Попытаемся отыскать стратегию $x(\xi)$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) = c \quad (0 \leq \eta \leq 1) \quad (10.5.2)$$

для некоторой константы c .

Используя разложение ядра в бесконечный степенной ряд, равенство (10.5.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1+\xi)^k \left[\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{r+k}{r} \xi^r \eta^r \right] (1-\xi\eta) dx(\xi) = \\ = c \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n+k+1}{n} \eta^n. \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

Положим

$$a_r = \int_0^1 (1+\xi)^k \xi^r dx(\xi) \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

Сравнение коэффициентов при η^n в обеих частях равенства (10.5.3) приводит к соотношению

$$a_n \left[\binom{n+k}{n} + \binom{n+k-1}{n-1} \right] = c \binom{n+k-1}{n},$$

или

$$a_n = c \frac{k}{2n+k}.$$

¹⁾ См. примечание ¹⁾ на стр. 424. — *Прим. ред.*

Но

$$\int_0^1 \xi^{n\xi^{(k/2)-1}} d\xi = \frac{2}{2n+k}.$$

Следовательно, полагая

$$dx_0(\xi) = M \frac{\xi^{(k/2)-1}}{(1+\xi)^k} d\xi,$$

где M — нормирующая постоянная, мы добьемся выполнения равенства (10.5.2) для соответствующей константы c . В силу симметрии $dy_0(\eta)$ определяется точно так же, как $dx_0(\xi)$, поэтому, как и выше, мы пишем

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dy_0(\eta) = c.$$

Отсюда следует, что $dx_0(\xi)$ и $dy_0(\eta)$, имеющие указанный вид, суть устойчивые стратегии и, следовательно, оптимальны (см. также задачу 10).

Схема нахождения устойчивых стратегий играет большую роль в теории игр с выбором момента времени. Для таких игр не требуются стратегии, которые устойчивы всюду; вместо них можно попытаться найти *частично устойчивые* стратегии, т. е. стратегии, устойчивые в некоторых подинтервалах значений ξ и η . Ввиду того, что существенной характеристикой в играх с выбором момента времени является монотонность их ядер, требование частичной устойчивости стратегий оказывается достаточным для нахождения оптимальных стратегий. Идея отыскания частично устойчивых стратегий оказывается полезной и во многих других случаях (см. задачи гл. 13).

Укажем, наконец, еще один метод нахождения решения, опирающийся на идею неподвижной точки. Для произвольной пары x^*, y^* рассмотрим задачи отыскания экстремумов

$$\max_{x \in X} K(x, y^*), \quad \min_{y \in Y} K(x^*, y) \quad (10.5.4)$$

и обозначим через X_{y^*} (аналогично Y_{x^*}) множество всех стратегий $x(y)$, на которых достигается максимум или минимум (10.5.4). Если $x^* \in X_{y^*}$ и $y^* \in Y_{x^*}$, то в силу (10.1.2) стратегии x^* и y^* оптимальны.

Как это ни удивительно, но столь простая идея использования неподвижной точки часто может оказаться весьма эффективным средством при решении определенного класса игр. Операции максимизации в (10.5.4) приводят к последовательным соотношениям, которые могут пролить свет на природу решения. В частности, этот подход оказывается полезным при решении салонных игр, в которых использование многовекового опыта позволяет догадываться о виде

решения. Используя стратегии, найденные таким образом, в качестве начальных значений x^* и y^* в (10.5.4), можно путем небольшого изменения этих значений получить пару точек x_0 и y_0 , которые окажутся неподвижными и, следовательно, будут оптимальными стратегиями (см. гл. 17).

В заключение этой главы мы настоятельно рекомендуем читателю попытаться решить задачи, помещенные в конце каждой из глав 10—17. Набить руку в исследовании игр можно, лишь испытывая свои силы на решении большого числа конкретных игровых задач.

10.6. Задачи.

1. Пусть $K(\xi, \eta)$ — непрерывная функция, определенная на единичном квадрате. Через K_n обозначим $(n+1) \times (n+1)$ -матрицу, (i, j) -компонента которой для $i, j = 0, 1, \dots, n$ равна $K(i/n, j/n)$. Пусть оптимальными стратегиями в игре с матрицей K_n будут $\lambda^n = (\lambda_0^n, \dots, \lambda_n^n)$ и $\mu^n = (\mu_0^n, \dots, \mu_n^n)$, а v^n — значение игры. Показать, что существует такая сходящаяся к нулю последовательность ε_n , что

$$\int K(\xi, \eta) d\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i^n x_{i/n}(\xi)\right) \geq v_n - \varepsilon_n \quad \text{для } 0 \leq \eta \leq 1$$

и

$$\int K(\xi, \eta) d\left(\sum_{j=0}^n \mu_j^n y_{j/n}(\eta)\right) \leq v_n - \varepsilon_n \quad \text{для } 0 \leq \xi \leq 1.$$

2. Обозначим через $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ множества вероятностных распределений на интервалах $0 \leq \xi \leq 1$ и $0 \leq \eta \leq 1$. Используя результаты задачи 1, показать, что из непрерывности ядра $K(\xi, \eta)$ вытекает

$$\sup_{x \in \mathcal{F}} \inf_{y \in \mathcal{G}} \int \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) = \inf_{y \in \mathcal{G}} \sup_{x \in \mathcal{F}} \int \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta).$$

3. Используя теорему Хелли (п. В.3), показать, что $\sup$ и $\inf$ в задаче 2 можно заменить на $\max$ и $\min$; при этом непрерывная игра с непрерывным ядром $K(\xi, \eta)$ имеет значение и оптимальные стратегии.

4. Пусть

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} -\frac{1}{\xi^2}, & \xi > \eta, \\ 0, & \xi = \eta, \\ \frac{1}{\eta^2}, & \xi < \eta. \end{cases}$$

Показать, что если игра с этим ядром K разыгрывается на замкнутом единичном квадрате, то $\{0, 0\}$ оказывается седловой точкой.

Доказать также, что если игра разыгрывается на открытом единичном квадрате, то она не обладает значением, поскольку

$$\sup_x \inf_{\eta} \int K(\xi, \eta) dx(\xi) \geq +1$$

и

$$\inf_y \sup_{\xi} \int K(\xi, \eta) dy(\eta) \leq -1.$$

5. Пусть

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} -1, & \xi = 1 \text{ и } 0 \leq \eta < 1, \\ 1, & 0 \leq \eta < \xi < 1, \\ 0, & \xi = \eta \\ -1, & 0 \leq \xi < \eta < 1, \\ 1, & \eta = 1 \text{ и } 0 \leq \xi < 1. \end{cases}$$

Показать, что игра с ядром $K(\xi, \eta)$ не имеет значения.

6. Показать, что игра с ядром

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} -1, & \xi < \eta < \xi + 1/2, \\ 0, & \xi = \eta \text{ или } \eta = \xi + 1/2, \\ 1 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

не обладает значением.

Доказать, что

$$\sup_x \inf_y K(x, y) = 1/3, \quad \text{а} \quad \inf_y \sup_x K(x, y) = 3/7.$$

7. Пусть $\mathbf{K} = \|K_{ij}\|$ — некоторая $(n+1) \times (n+1)$ -матрица с единственными оптимальными стратегиями $(\lambda_0^0, \dots, \lambda_n^0)$ и $(\mu_0^0, \dots, \mu_n^0)$. Обозначим через $K(\xi, \eta)$ линейную в каждом квадрате

$$\frac{i}{n} \leq \xi \leq \frac{i+1}{n}, \quad \frac{j}{n} \leq \eta \leq \frac{j+1}{n}$$

функцию от ξ и η , причем $K(i/n, j/n) = K_{ij}$ для всех i и j . Показать, что стратегии

$$x^0 = \sum_{i=0}^n \lambda_i^0 x_{i/n}(\xi) \quad \text{и} \quad y^0 = \sum_{j=0}^n \mu_j^0 y_{j/n}(\eta)$$

оптимальны для непрерывной игры с ядром $K(\xi, \eta)$, определенным на единичном квадрате.

8. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$L_{ij}(\xi, \eta) = \varepsilon \left[\left(\xi - \frac{i}{n} - \frac{1}{2n} \right)^2 - \left(\eta - \frac{j}{n} - \frac{1}{2n} \right)^2 \right].$$

Положим $K^*(\xi, \eta) = K(\xi, \eta) + L_{ij}(\xi, \eta)$ для

$$\frac{i}{n} \leq \xi \leq \frac{i+1}{n}, \quad \frac{j}{n} \leq \eta \leq \frac{j+1}{n},$$

где $K(\xi, \eta)$ взято из задачи 7. Показать, что *единственными* оптимальными стратегиями в игре с ядром $K^*(\xi, \eta)$, определенным на единичном квадрате, являются стратегии x^0 и y^0 из задачи 7.

9. Пусть $K(\xi, \eta)$ — произвольная непрерывная функция, определенная на единичном квадрате. Показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция $K_\varepsilon(\xi, \eta)$, что $|K(\xi, \eta) - K_\varepsilon(\xi, \eta)| < \varepsilon$ и оптимальные стратегии для ядра $K_\varepsilon(\xi, \eta)$ единственны.

Указание: использовать результат задачи 8.

10. Игра с ядром

$$\frac{(1+\xi)^a (1+\eta)^b}{(1+\xi\eta)^c},$$

определенным на единичном квадрате, имеет оптимальную устойчивую стратегию с плотностью

$$K \frac{\xi^m (1-\xi)^n}{(1+\xi)^p},$$

где K, m, n, p — некоторые постоянные. Выразить эти постоянные через a, b и c . Предположить, что $c > a, b$.

11. Решить игру с ядром

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \xi + \eta < 1, \\ \lambda, & 1 < \xi + \eta < \frac{3}{2}, \\ 1, & \frac{3}{2} < \xi + \eta \leq 2 \end{cases}$$

в следующих двух случаях:

(а) $K(\xi, \eta) = \lambda$, если $\xi + \eta = 1$, и

$K(\xi, \eta) = 1$, если $\xi + \eta = 3/2$,

(б) $K(\xi, \eta) = \lambda$, если $\xi + \eta = 1$ и $\xi + \eta = 3/2$.

12. Обозначим через B произвольное положительное число. Пусть интервалы $[0, B+1]$ и $[0, B]$ являются пространствами чистых стратегий соответственно для игроков I и II. Для $0 < \theta < 1$ положим

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 - \theta, & \xi \leq \eta, \\ 1, & \eta < \xi \leq \eta + 1, \\ 0, & \eta + 1 < \xi. \end{cases}$$

Найти пару оптимальных стратегий и показать, что значение игры равно $(1 - \theta)/(1 - \theta^{n+1})$, где n — наибольшее целое число, не превосходящее B .

Указание: для игрока I существует устойчивая стратегия.

Комментарии и библиография к главе 10

10.1. В то время как теория конечных дискретных игр возникла в начале XX века (в работах Бореля), возраст бесконечных игр не превосходит двадцати лет. Классическая работа фон Неймана и Моргенштерна [1], вышедшая в 1944 г., стимулировала энергичную деятельность среди математиков по изучению всех типов игр, конечных и бесконечных. Почти одновременно с этой работой были опубликованы первые результаты Вальда [6] (см. фон Нейман и Моргенштерн [1]) по теории статистических решений. Важность теории игр для статистической теории и практики неоспорима. Более того, процессы мышления в теории игр и теории статистических решений настолько близки, что статистики или математики, интересующиеся одной из этих теорий, естественно, обращаются к обеим теориям. Основу этих теорий составляет общая теорема о минимаксе.

Самое раннее доказательство теоремы о минимаксе для бесконечных игр принадлежит Виллю [1], который изучал игры с непрерывными ядрами, определенными на единичном квадрате. Он был также первым, кто дал контрпример, показавший, что теорема о минимаксе в общем случае ограниченного ядра несправедлива.

Теорема о минимаксе как абстрактный результат для функционалов и линейных операций, определенных на подмножествах из абстрактного линейного топологического пространства, изучалась Карлином в 1948 г. в корпорации РЭНД. Результаты этой работы были опубликованы в 1950 г. Карлином [1]. В основе этих результатов лежало предположение о выпуклости и компактности пространств стратегий относительно подходящей топологии. Вальд [5] независимо и одновременно сформулировал другие достаточные условия, обеспечивающие справедливость теоремы о минимаксе. Условия Вальда получены из статистических соображений. В дальнейшем появилось много абстрактных обобщений этих результатов. Упомянем в этой связи Фань Цзи [1, 2], Гликсберга [2], Бержа [1], Сайона [1] и др. (см. также Карлин [1], [3] и ссылки на стр. 48—50). Все эти работы касались игр, которые мы отнесли к играм первой категории. Флеминг [1] и Гросс (не опубликовано) изучали теорему о минимаксе для игр второй категории.

Из книг, отражающих некоторые аспекты бесконечных игр, можно указать на работы Мак-Кинси [1], Блекуэла и Гиршика [1], гл. 1 и 2, и Льюса и Райфы [1]. Основная масса статей, посвященных бесконечным играм, содержится в сборниках [9, 10, 11] по теории игр¹⁾.

10.2. Отдельные примеры бесконечных игр можно найти в книге Кемени, Моргенштерна и Томпсона [1], там же приведен пример упрощенного покера (см. также Вилль [1]). Однако основополагающие первые работы по играм, разыгрываемым на единичном квадрате, были выполнены математиками, являвшимися сотрудниками и консультантами корпорации РЭНД.

Интенсивная работа по теории игр, проведенная в корпорации РЭНД в конце 40-х и начале 50-х годов, имела большой выход в области стати-

¹⁾ Русские переводы большинства перечисленных статей см. в сборнике „Бесконечные антагонистические игры“, Физматгиз, 1963. — *Прим. ред.*

стики, математической экономики, линейного программирования, задач многошаговых решений и т. д. и значительно ускорила их развитие. Большая часть работ по теории бесконечных игр, сделанных после 1952 г., посвящена решению частных задач.

Общие результаты типа описанных в этой главе нельзя приписать какому-либо одному лицу; их следует рассматривать как результат осуществления программы корпорации РЭНД.

10.3. Теорема о минимаксе изучена уже достаточно хорошо. Время от времени обнаруживаются новые классы игр, обладающих свойством минимакса, но все эти результаты лишь углубляют понятия выпуклости и компактности, которые составляют основу теоремы. Менее понятной является пока что связь между видом ядра и видом решений игры; в настоящее время эта проблема является, пожалуй, основной проблемой, стоящей перед специалистами по теории игр. Некоторые попытки классификации игр и решений представлены в гл. 11—17.

Полный исторический обзор по различным типам игр, рассматриваемых в последующих семи главах, содержится в замечаниях в конце каждой главы. Здесь мы лишь сжато перечислим некоторые из основных фактов, касающихся типов игр, описанных в этом пункте.

Теория игр с вырожденными ядрами (в частности, с полиномиальными ядрами) рассмотрена Дрешером, Карлином и Шепли [1]. Конечные выпуклые игры всесторонне рассмотрены в работе Дрешера и Карлина [1].

Свойства игр с выпуклыми ядрами изучены Бонненбластом, Карлином и Шепли [1].

Примеры игр с выбором момента времени впервые были предложены и рассмотрены Блекуэлом и Гиршиком [1]. Частные примеры изучались также Шепли [2], Белзером [1], Гликсбергом [1] и другими. Позднее Шифман показал, как решать общую симметричную игру с выбором момента времени, а Карлин [2] решил игру с выбором момента времени с одним действием у каждого игрока при отсутствии симметрии.

Теория колоколообразных игр обязана своей разработкой Карлину [5]. Аналитические игры рассмотрели Гликсберг и Гросс [2]. Понятие игры, инвариантной по отношению к группе преобразований, является результатом развития теории статистических решений.

10.4. Дуэль снайпера с пулеметчиком¹⁾ была частично изучена Блекуэлом и Шифманом. В гл. 16 дано полное решение этой игры.

Различные варианты моделей покера привлекали внимание многочисленных авторов — вполне возможно из-за того, что покер представляет собой прекрасную разрядку азартности — извечного побуждения человеческой природы. Отметим работы Джиллиса, Мейберри и фон Неймана [1] и Беллмана [2] (см. также Карлин и Рестрепо [1]).

10.5. Использование устойчивых стратегий для определения решений идет от Гиршика, который использовал эту технику главным образом для решения игр с выбором момента времени.

Методы моментов, использованные при рассмотрении в этом параграфе примера рациональной игры, можно приписать Гроссу (сообщено в частной беседе).

Метод неподвижной точки является, по существу, применением в теории игр теоремы Какутани.

10.6. Задача 4 предложена Шепли. Задача 6 предложена Сайоном и Вулфом [1]. Браун [3] рассматривал задачу 12.

¹⁾ В оригинале эта игра называется дуэлью истребителя с бомбардировщиком. — *Прим. ред.*

ВЫРОЖДЕННЫЕ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

Класс игр, ядра которых являются полиномами

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} \xi^i \eta^j,$$

можно рассматривать как простейший класс бесконечных игр. Поскольку всякая непрерывная игра на единичном квадрате может быть аппроксимирована полиномиальными играми, естественно ожидать, что исследование структуры решений полиномиальных игр прольет свет и на структуру решений непрерывной игры общего вида на единичном квадрате. К сожалению, некоторые специфические свойства полиномиальных игр на непрерывные игры общего вида не переносятся. Вместе с тем теорию полиномиальных игр можно распространить на класс всех вырожденных игр.

Существует очень мало реальных ситуаций, которые адекватно описываются вырожденными играми. Такие игры интересны главным образом из-за того, что мы знаем довольно много об их решениях.

Вырожденная игра является, по существу, конечной игрой (см. гл. 1), которая разыгрывается следующим образом: игрок I выбирает точку $\mathbf{r}$ из множества $R \subseteq E^n$, а игрок II — точку $\mathbf{s}$ из множества $S \subseteq E^m$. Выигрыш игрока I является функцией $A(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, линейной по обоим переменным. В п. 11.1 мы покажем, что каждая вырожденная игра сводится к конечной игре этого типа. Для исследования вырожденных игр необходимы более глубокие знания о структуре выпуклых множеств в конечномерном евклидовом пространстве.

Поэтому в п. 11.6 и 11.7 изучаются размерности граней выпуклых множеств и теория двойственности для выпуклых конусов; полученные в этих параграфах результаты используются затем для выяснения вида решений вырожденных игр. Указаны также некоторые вычислительные методы.

11.1. Конечные выпуклые игры общего вида. Этот и следующий пункты посвящены теории конечных выпуклых игр. Затем эта теория используется для анализа вырожденных игр (см. также п. 10.3).

Мы начинаем с описания того, что понимается под конечной выпуклой игрой.

Рассмотрим $(n \times m)$ -матрицу $\|a_{ij}\|$. Игрок I в качестве стратегии выбирает точку $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ из множества $R \subset E^n$, а игрок II — точку $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_m)$ из множества $S \subset E^m$. Выигрыш игрока I определяется формулой

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} r_i s_j.$$

Предполагается, что множества R и S замкнуты, ограничены и выпуклы. В дальнейшем такую игру мы будем называть *конечной выпуклой игрой*, определяемой тройкой $\{R, S, A\}$. В частности, матричная игра (гл. I) является конечной выпуклой игрой.

Другой важный класс конечных игр определяется следующим образом. Рассмотрим матричную игру, в которой стратегии, кроме обычных ограничений, удовлетворяют еще некоторым дополнительным условиям выпуклости. В этом случае выбор стратегии уже не будет соответствовать выбору точки из симплекса Δ (т. е. из множества всех таких векторов $\mathbf{x}$, что $x_i \geq 0$ и $\sum x_i = 1$); теперь выбор должен быть сделан из некоторого выпуклого замкнутого подмножества $R \subset \Delta$. Если ограничения определяются линейными неравенствами, то R будет выпуклым многогранным подмножеством из Δ . В этом случае оказывается возможным так перенумеровать вершины нового многогранника, что новая выпуклая игра преобразуется в обычную матричную игру. Но обычно это существенно увеличивает размер матрицы и делает ее недоступной для вычислений.

Другой важный класс конечных выпуклых игр составляют игры на единичном квадрате с вырожденными ядрами, т. е. игры с ядрами вида

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} r_i(\xi) s_j(\eta), \quad (11.1.1)$$

где $r_i(\xi)$ и $s_j(\eta)$ — непрерывные функции. Если мы положим

$$r_i = \int_0^1 r_i(\xi) dx(\xi), \quad s_j = \int_0^1 s_j(\eta) dy(\eta), \quad (11.1.2)$$

где x и y — стратегии, то выигрыш запишется в виде

$$K(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i,j} a_{ij} r_i(\xi) s_j(\eta) dx(\xi) dy(\eta) = \sum_{i,j} a_{ij} r_i s_j. \quad (11.1.3)$$

Очевидно, эта игра является игрой вида $\{R, S, A\}$. Здесь множества R и S можно отождествить с множествами всех точек, координаты которых определяются соотношениями (11.1.2), когда x и y

пробегают множества всевозможных распределений (стратегий). Мы будем в этом случае рассматривать множества R и S соответственно как конечномерные пространства моментов функций $\{r_i(\xi)\}$ и $\{s_j(\eta)\}$, поскольку числа r_i будут классическими моментами x , если $r_i(\xi)$ являются степенями ξ^i . В общем случае r_i можно рассматривать как обобщенные моменты, относящиеся к функциям $r_i(\xi)$. Итак, вырожденная игра может рассматриваться как конечная выпуклая игра $\{R, S, A\}$, где R и S — пространства обобщенных моментов, а выигрыш вычисляется в соответствии с (11.1.3). Множества R и S можно охарактеризовать более просто, как указано в следующей теореме.

► Теорема 11.1.1. *Множество R моментов r_i , определяемых формулой (11.1.2), является выпуклым множеством, натянутым на кривую C , параметрическим представлением которой является уравнение $r_i = \{r_i(\xi)\}$ для $0 \leq \xi \leq 1$ и $i = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Пусть D — выпуклое множество, натянутое на кривую C (т. е. выпуклая оболочка C).

(I) Предположим, что $r^0 \in R$, но $r^0 \notin D$. Так как $r_i(\xi)$ — непрерывные функции, а множество D — замкнуто и выпукло, существует гиперплоскость h , строго отделяющая r^0 от D . Иными словами, при некотором фиксированном $\delta > 0$ для $0 \leq \xi \leq 1$

$$\sum_{i=1}^n h_i r_i^0 - \sum_{i=1}^n h_i r_i(\xi) \geq \delta. \quad (11.1.4)$$

Поскольку $r^0 \in R$, существует такая функция распределения $x(\xi)$, что

$$\int_0^1 r_i(\xi) dx(\xi) = r_i^0.$$

Интегрируя (11.1.4) по переменной $x(\xi)$, мы получаем

$$\sum h_i r_i^0 \int_0^1 dx(\xi) - \sum h_i \int_0^1 r_i(\xi) dx(\xi) \geq \delta \int_0^1 dx(\xi),$$

или

$$\sum h_i r_i^0 - \sum h_i r_i^0 \geq \delta > 0,$$

что абсурдно. Следовательно, точка r^0 должна принадлежать множеству D .

(II) Пусть $r^0 \in D$. Тогда

$$r_i^0 = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k r_i(\xi_k), \quad \alpha_k \geq 0, \quad \sum \alpha_k = 1$$

(лемма Б.2.1). Если через x_{ξ_k} обозначить вырожденное распределение, полностью сосредоточенное в точке ξ_k , то

$$x(\xi) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_{\xi_k}$$

является распределением с дискретным спектром, который совпадает с множеством точек ξ_k . Кроме того,

$$\int_0^1 r_i(\xi) dx(\xi) = \sum_{k=1}^{n+1} r_i(\xi_k) \alpha_k = r_i^0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Следовательно, $D \subset R$ и потому $R = D$.

Для полиномиальных игр

$$r_i(\xi) = \xi^i \quad (i = 0, 1, \dots, n); \quad s_j(\eta) = \eta^j \quad (j = 0, 1, \dots, m),$$

а C означает кривую, описываемую параметрическими уравнениями $x_i = \xi^i$.

В дальнейших пунктах этой главы мы будем заниматься изучением свойств решений конечных выпуклых игр.

11.2. Метод неподвижной точки для конечных выпуклых игр.

Пара стратегий r^0 и s^0 оптимальна соответственно для игроков I и II, если

$$\max_{r \in R} A(r, s^0) = \min_{s \in S} A(r^0, s) = v = A(r^0, s^0). \quad (11.2.1)$$

Выполнение соотношения (11.2.1) для конечных выпуклых игр можно установить двумя путями. Один путь основан на свойствах выпуклых множеств, и в частности на том, что два непересекающихся выпуклых множества могут быть разделены гиперплоскостью. Эта идея лежит в основе построения теории сопряженных конусов, излагаемой в п. 11.4. Второй метод основан на теореме Какутани о неподвижной точке (см. приложение В.2). Именно в духе теоремы о неподвижной точке будет описан метод получения оптимальных стратегий в конечных выпуклых играх.

Оптимальные стратегии можно рассматривать как обобщенные неподвижные точки отображения, описываемого следующим образом: для $r^0 \in R$ определяем $S(r^0) \subset S$, как множество тех точек, на которых достигается минимум

$$\min_{s \in S} A(r^0, s).$$

Множество $S(r^0)$ будет, очевидно, выпуклым, поскольку оно либо является пересечением некоторой гиперплоскости с границей мно-

жества S , либо совпадает с S (так как функция $A(\mathbf{r}^0, \mathbf{s})$ на S линейна). Пусть $\mathbf{s}^0 \in S$; обозначим через $R(\mathbf{s}^0)$ множество тех точек из множества R , на которых достигается максимум

$$\max_{\mathbf{r} \in R} A(\mathbf{r}, \mathbf{s}^0).$$

Множество $R(\mathbf{s}^0)$ назовем образом точки $\mathbf{s}^0$. Если $\mathbf{r}^0 \in R(\mathbf{s}^0)$ и $\mathbf{s}^0 \in S(\mathbf{r}^0)$, то точки $\mathbf{r}^0$ и $\mathbf{s}^0$ удовлетворяют равенствам (11.2.1) и, следовательно, являются оптимальными стратегиями. Понятно, что если R^0 и S^0 — множества оптимальных стратегий игроков, то каждая точка R^0 является образом каждой точки множества S^0 , а каждая точка S^0 — образ каждой точки множества R^0 .

Мы можем также представить решения как неподвижные точки в многозначном отображении F , которое точке $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}$ из произведения пространств $R \otimes S$ ставит в соответствие непустое множество $\{R(\mathbf{s}), S(\mathbf{r})\} = F(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ из $R \otimes S$, где $R(\mathbf{s})$ и $S(\mathbf{r})$ — множества, определенные выше. Точка $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}$ называется неподвижной точкой отображения, если точка $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}$ содержится в своем образе $F(\mathbf{r}, \mathbf{s})$.

Утверждение о том, что существуют обобщенные неподвижные точки отображения F , оказывается в точности переформулировкой основной теоремы о минимаксе. Использование специфических свойств отображения $F(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ позволит не только описывать множества решений, но и построить вычислительный процесс получения решений.

При анализе конечной выпуклой игры выигрыш удобно записывать двояко:

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_{ij} r_i s_j = \sum_{j=1}^m f_j(\mathbf{r}) s_j + f_0(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n g_i(\mathbf{s}) r_i + g_0(\mathbf{s}). \quad (11.2.2)$$

Здесь $f_j(\mathbf{r})$ и $g_i(\mathbf{s})$ — линейные функции переменных $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$, принимающих значения соответственно из множеств R и S . Проще всего выявить свойства отображения $A(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ в том случае, когда переменные $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$ разделены.

Прежде чем перейти к описанию системы отображений, дадим геометрическую интерпретацию двух общих практически важных типов оптимальных стратегий: (1) оптимальные стратегии, являющиеся внутренними точками множеств R и S ; (2) оптимальные стратегии, обеспечивающие каждому игроку выигрыш, тождественно равный v , независимо от стратегий, используемых его противником.

Эти два типа стратегий взаимосвязаны. Предположив, что игрок I имеет внутреннюю оптимальную стратегию $\mathbf{r}^0$, рассмотрим некоторую оптимальную стратегию $\mathbf{s}^0$ игрока II. Ввиду линейности по $\mathbf{r}$ функции $A(\mathbf{r}, \mathbf{s}^0)$ точка $\mathbf{s}^0$ отображается на множество $R(\mathbf{s}^0)$, не содержащее внутренних точек R , если только функции $g_i(\mathbf{s}^0)$ не равны

нулю для всех l . Следовательно, каждая оптимальная стратегия игрока II лежит на пересечении плоскостей $g_l(s) = 0$ и дает тождественно v . Внутреннее решение r^0 для игрока I не должно занимать особого положения по отношению к плоскостям $f_j(r) = 0$. Однако оптимальная стратегия r^0 приводит независимо от стратегии игрока II к выигрышу v в том и только том случае, когда она лежит на пересечении всех плоскостей $f_l(r) = 0$.

Численное нахождение неподвижных точек. Отображение, рассмотренное при доказательстве теоремы о минимаксе для конечных выпуклых игр, можно использовать для построения алгоритма фактического нахождения решений для игр этого класса. Сущность этого метода состоит в прослеживании изменения образов $S(r)$ и $R(s)$ до тех пор, пока не будет найдена неподвижная точка. Для конечных выпуклых игр, в которых оба множества R и S двумерны, этот прием оказывается особенно эффективным. Процедура состоит в разбиении пространства R на конечное число выпуклых подмножеств $R_1, \dots, R_\alpha$ гиперплоскостями $f_j(r) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) и границами множества S и в аналогичном разбиении пространства S на конечное число выпуклых подмножеств $S_1, S_2, \dots, S_\beta$ гиперплоскостями $g_l(s) = 0$ ($l = 1, \dots, n$) и границами множества R . Разбиение множества R таково, что каждое его подмножество R_i отображается на часть границы множества S , а каждое подмножество S_j отображается на часть границы R . Подмножества R_i могут пересекаться, но их объединение дает все пространство стратегий R . Из предыдущего следует, что R^0 и S^0 являются неподвижными точками при отображении $R_1, R_2, \dots, R_\alpha$ на S и соответственно $S_1, S_2, \dots, S_\beta$ на R ; часто для некоторого i будет выполняться равенство $R_i = R^0$, а для некоторого j — равенство $S_j = S^0$. Иногда множество R^0 совпадает с множеством точек $r \in R$, определяемых соотношениями $f_{i_1}(r) = f_{i_2}(r) = \dots = f_{i_k}(r)$ и $f_l(r) = 0$ ($l \neq i_v$) для того или иного множества индексов i_v . Аналогичные положения справедливы и для множества S^0 .

Проиллюстрируем этот метод двумя примерами. В первом из них игра имеет конечное число чистых стратегий, а во втором рассматривается игра с континуумом чистых стратегий и вырожденным ядром выигрыша.

Пример 1. Рассмотрим игру, в которой игрок I выбирает стратегию из многогранного выпуклого двумерного множества R , определенного в трехмерном пространстве соотношениями

$$\frac{1}{10} < r_1 < \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{20} \leq r_2 \leq \frac{1}{2}, \quad r_3 \geq \frac{6}{5} \left(1 - \frac{20}{9} r_1\right),$$

$$r_1 + r_2 + r_3 = 1,$$

а игрок II выбирает стратегию из множества S , определяемого соотношениями

$$\frac{1}{10} \leq s_2 \leq 2s_1, \quad s_3 \geq \frac{1}{6}, \quad s_1 + s_2 + s_3 = 1.$$

Пусть матрица выигрышей имеет вид

$$\|a_{ij}\| = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 3 & 39 & 30 \\ 33 & 9 & 0 \\ 28 & 4 & 25 \end{vmatrix}, \quad \text{при этом } A(r, s) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 r_i s_j a_{ij}.$$

Воспользовавшись равенствами $r_1 + r_2 + r_3 = 1$ и $s_1 + s_2 + s_3 = 1$, мы можем исключить переменные r_3 и s_3 . Тогда исследование можно провести в терминах оставшихся переменных r_1, r_2 и s_1, s_2 , подчи-

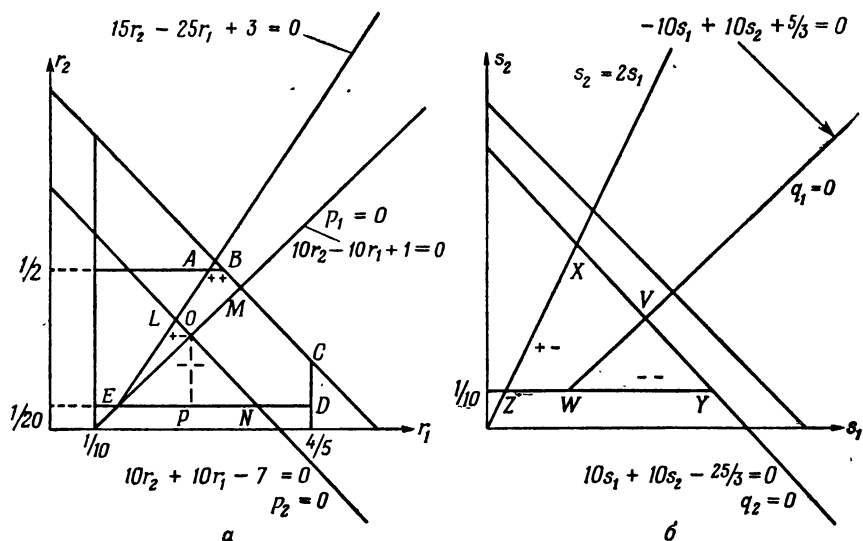


Рис. 17.

ненных соответствующим ограничениям. Множество R оказывается пятиугольником $ABCDE$, а множество S — треугольником XYZ (см. рис. 17).

Непосредственное вычисление с заменой r_3 на $1 - r_1 - r_2$ и s_3 на $1 - s_1 - s_2$ дает нам

$$\begin{aligned} A(r, s) &= (10r_2 - 10r_1 + 1)s_1 + (10r_2 + 10r_1 - 7)s_2 + \\ &+ \frac{1}{3}(5r_1 - 25r_2 + 25) = \left(-10s_1 + 10s_2 + \frac{5}{3}\right)r_1 + \\ &+ \left(10s_1 + 10s_2 - \frac{25}{3}\right)r_2 + \left(s_1 - 7s_2 + \frac{25}{3}\right) = \\ &= p_1s_1 + p_2s_2 + p_3 = q_1r_1 + q_2r_2 + q_3. \end{aligned}$$

Функция выигрыша разбивает пространство стратегий R на четыре области ($OMCDN$ и т. д.), а пространство стратегий S — на две. В области VWY $q_1 \leq 0$, $q_2 \leq 0$.

Отобразим каждую из четырех областей множества R с помощью преобразования $\min_S A$ на множество S , а каждую из двух областей множества S с помощью преобразования $\max_R A$ на множество R .

Рассмотрим, например, точку $r^* \in R$, принадлежащую $OLABM$ (область $++$) и исследуем $A(r^*, s)$ как функцию $s \in S$. Поскольку функция $A(r^*, s)$ линейна по s и имеет положительные коэффициенты, она в некоторой точке $Z \in S$ достигает минимума. Обозначим эту точку через s^* и рассмотрим функцию $A(r, s^*)$, которая является линейной функцией вида $q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3$, где $q_1 > 0$ и $q_2 < 0$. Максимум этой функции для $\{r_1, r_2\} \in R$ достигается при r_1 настолько большим, насколько это возможно, и r_2 настолько малом, насколько это возможно в области R . Обоим этим условиям удовлетворяет единственная точка $D \in R$. Отсюда следует, что точки области $++$ не могут оказаться неподвижными. Аналогично легко видеть, что точки области ELO (область $+ -$) отображаются на подмножество ZX , образом которого в свою очередь является точка D . Следовательно, по тем же причинам ни одна из внутренних точек области ELO не будет оптимальной.

Просматривая по очереди все области множества R , мы придем, наконец, к неподвижным точкам множеств R и S . Легко проверить, что только точки прямой OP и точка V являются единственными неподвижными точками. Например, точка O отображается на все множество S , а V — на все множество R . Точки прямой OP являются именно теми точками, для которых функция $A(r, s)$ линейна по s_1 и s_2 с равными отрицательными коэффициентами. Образом этих точек является прямая XY . Окончательно решение имеет вид

$$r_1 = \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{20} \leq r_2 \leq \frac{3}{10}$$

для игрока I и

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{3}, \quad s_3 = \frac{1}{6}$$

для игрока II; значение игры равно 6,5.

Пример 2. В качестве примера бесконечной игры (того типа, для которого данный метод особенно хорошо приспособлен) рассмотрим вырожденную игру с функцией выигрыша

$$\begin{aligned} K(\xi, \eta) = & \eta^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} \xi + \sin \frac{\pi}{2} \xi - 1 \right) + \\ & + \frac{4}{3} \eta \left(\cos \frac{\pi}{2} \xi - 3 \sin \frac{\pi}{2} \xi \right) + \\ & + \frac{1}{3} \left(5 \sin \frac{\pi}{2} \xi - 3 \cos \frac{\pi}{2} \xi \right). \end{aligned}$$

Эта игра эквивалентна в силу теоремы 11.1.1 конечной выпуклой игре, в которой множество R является выпуклой оболочкой кривой

$$r_1(\xi) = \sin \frac{\pi}{2} \xi \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad r_2(\xi) = \cos \frac{\pi}{2} \xi \quad (0 \leq \xi \leq 1),$$

а S — выпуклой оболочкой кривой

$$s_1(\eta) = \eta \quad (0 \leq \eta \leq 1), \quad s_2(\eta) = \eta^2 \quad (0 \leq \eta \leq 1).$$

Функция выигрыша принимает вид

$$K(r, s) = A(r, s) = s_2(r_1 + r_2 - 1) + \frac{4}{3}s_1(r_2 - 3r_1) + \frac{1}{3}(5r_1 - 3r_2).$$

Выпуклым множеством R для игрока I является фигура $ACBA$ на рис. 18, а выпуклым множеством S для игрока II — фигура $XYMX$.

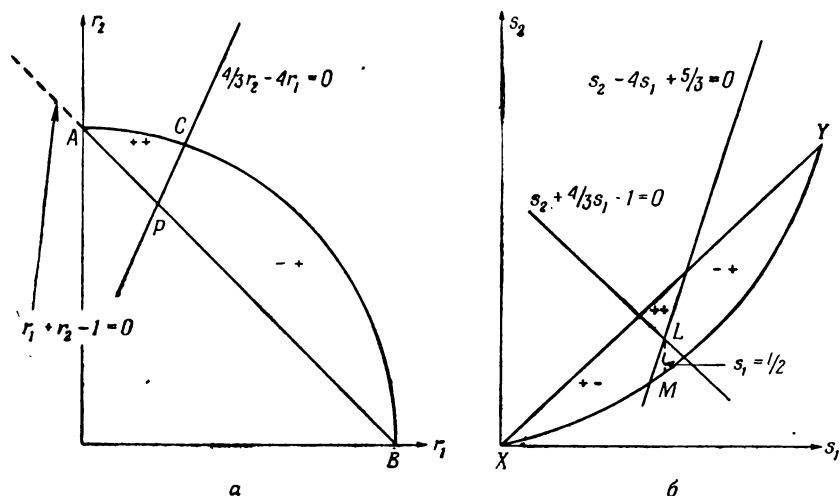


Рис. 18.

Записывая функцию выигрыша двумя различными способами, мы получаем разбиение пространства стратегий игрока I на две области, а пространства стратегий игрока II на четыре области. Заметим, что в отображаемых областях точка P отображается на все множество S и, в частности, на прямую LM .

Аналогично прямая LM отображается на прямую AB и, в частности, на точку P . Поэтому P и LM представляют собой неподвижные точки, т. е. дают нам решения игры. Значение игры равно $-1/3$.

11.3. Соотношения между размерностями для конечных выпуклых игр. В следующей теореме устанавливается свойство непрерывности множеств решений для конечных выпуклых игр. Этот

результат потребуется нам при дальнейшем изучении множеств оптимальных стратегий.

► Теорема 11.3.1. *Множество оптимальных стратегий (т. е. множество решений) конечной выпуклой игры является полунепрерывной сверху функцией матрицы выигрышей A . (По поводу определения полунепрерывности сверху отображения точки на множество см. приложение В.2.) Если пространства стратегий R_n сходятся к R , то множество решений полунепрерывно сверху.* (Говорят, что последовательность множеств R_n сходится к R , если каждая точка множества R является предельной точкой последовательностей точек множеств R_n , а других предельных точек для этих последовательностей не существует.)

Доказательство. Обозначим через G открытое множество, содержащее множество оптимальных стратегий $\tilde{R}$ игрока I в игре с функцией выигрыша $A = A(r, s)$. Предположим, что каждый элемент матрицы A изменен не более чем на ϵ . Обозначим через A_ϵ полученную матрицу, а через R_ϵ — множество оптимальных стратегий игрока I. Мы утверждаем, что для достаточно малых ϵ будет справедливо включение $R_\epsilon \subset G$. Чтобы доказать это, предположим противное: существует сходящаяся к нулю последовательность $\{\epsilon_n\}$, для которой R_{ϵ_n} не содержится в G . Пусть $r_n \in R_{\epsilon_n}$, но $r_n \notin G$. Поскольку множество R компактно, мы можем предположить, что $r_n \rightarrow r$ при $n \rightarrow \infty$, где $r \in R$, но $r \notin G$. Кроме того, нетрудно установить, что предельная точка оптимальных стратегий для игры с матрицей A_{ϵ_n} является оптимальной стратегией в игре с матрицей A . Но $r \notin G$ и, следовательно, $r \notin \tilde{R}$. Таким образом, получено противоречие.

Вторая половина теоремы устанавливается аналогично.

Конечные выпуклые игры с единственными решениями. Выведем теперь соотношения между размерностями для конечных выпуклых игр с единственными решениями. Эти соотношения являются распространением теорем о структуре множеств решений матричных игр (см. гл. 3) на конечные выпуклые игры, в которых пространства стратегий обоих игроков являются многогранниками. В этом пункте будет показано, что наиболее подходящей характеристикой многогранной грани, содержащей оптимальную стратегию, является именно ее размерность (а не число вершин).

При анализе используется отображение, при котором рассматривается образ множества $S(r)$ для каждого $r \in R$ и образ множества $R(s)$ для каждого $s \in S$.

Пусть r^0, s^0 — единственное решение игры с функцией выигрыша $A(r, s)$ при пространствах стратегий $\{R, S\}$. Предположим, кроме того, что множества R и S являются выпуклыми многогранниками. Пусть точка r^0 принадлежит k -мерной грани $R^0 \subset R$, а точка s^0 l -мерной грани $S^0 \subset S$. Грани R^0 и S^0 являются многогранными. Поскольку стратегия s^0 оптимальна, она отображается на некоторую грань $R' \supseteq R^0$. Аналогично стратегия r^0 отображается на некоторую грань $S' \supseteq S^0$.

► Лемма 11.3.1. *Игра с функцией выигрыша $A(r, s)$, заданной на редуцированных пространствах стратегий $\{R', S'\}$, имеет единственное решение r^0, s^0 .*

(Многогранность множеств R и S существенна для справедливости этого утверждения.)

Доказательство. Поскольку точка r^0 отображается на $S' \supseteq S^0 \supseteq \{s^0\}$, а точка s^0 — на $R' \supseteq R^0 \supseteq \{r^0\}$, точки r^0, s^0 должны быть решением игры с пространством стратегий $\{R', S'\}$. Для того чтобы установить единственность этого решения, предположим, что $s' \in S'$ — какая-либо другая оптимальная стратегия игрока II. В этом случае точка s' должна отображаться на некоторую грань, содержащую множество R^0 . Пусть $\bar{s} = \epsilon s' + (1 - \epsilon)s^0$ — настолько близкое к s^0 решение, что $\bar{s}$ отображается на грань, содержащую множество R^0 . Далее, для исходной игры, заданной на $\{R, S\}$, определим множество R' , как максимальную грань, на которую отображается точка s^0 . Следовательно, точка $\bar{s}$, в силу своей близости к s^0 , будет отображаться в некоторую часть грани R' , содержащей r^0 . Таким образом, точка $\bar{s}$ является другим решением исходной игры, рассматриваемой на $\{R, S\}$, что противоречит единственности решения.

Мы можем теперь ограничиться анализом редуцированной многогранной игры, рассматриваемой на $\{R', S'\}$. В этой игре точка r^0 является внутренней точкой множества R^0 и отображается на множество S' . Аналогично точка s^0 является внутренней для S^0 и отображается на R' .

Редуцированная многогранная игра аналогична «существенной части» дискретной игры.

► Лемма 11.3.2. *Если r^0, s^0 — единственное решение многогранной игры, рассматриваемой на $\{R', S'\}$, то $R^0 = R'$ и $S^0 = S'$.*

Доказательство. Предположим, что точка s^0 принадлежит границе множества S' или $S^0 \subset S'$. Рассмотрим последовательность многогранников S_n , каждый из которых лежит внутри множества S' , но не пересекается с S^0 . Пусть эта последовательность сходится к S'

при возрастании n . Мы можем сконструировать последовательность S_n , используя любую внутреннюю точку $s \in S'$ и взяв множество всех точек отрезка

$$\lambda s + (1 - \lambda)s \quad (\epsilon_n \leq \lambda \leq 1),$$

где s — любая точка S' и $\epsilon_n \rightarrow 0$.

Рассмотрим игру на пространствах $\{R', S_n\}$. Обозначим через $\{X_n, Y_n\}$ решения этой игры. Тогда в силу полунепрерывности сверху множества решений (теорема 11.3.1) каждая последовательность решений s_n сходится к s^0 . Далее, поскольку точка r^0 лежит внутри множества R^0 , для достаточно большого n решения r_n лежат внутри многогранника, для которого R^0 является гранью, и, следовательно, s_n отображается в многогранник, содержащий множество R^0 . Но поскольку точка r^0 отображается на все множество S' , пара $\{r^0, s_n\}$ является решением как игры на $\{R', S_n\}$, так и игры на $\{R', S'\}$. Это, однако, противоречит предположению, ибо s_n лежит внутри S' . Следовательно, $S' = S^0$. Равенство $R' = R^0$ устанавливается аналогично.

Замечание 11.3.1. Используя аналогичную аргументацию, мы можем обобщить лемму 11.3.2 на игры, имеющие более одного решения. Обозначим через R^0 наименьшую многогранную грань, содержащую множество оптимальных стратегий игрока I. Теперь все оптимальные стратегии игрока II будут отображаться на некоторую многогранную грань множества R и некоторые из них будут отображаться на R^0 . Обозначим через R' максимальное пересечение этих многогранных граней. Тогда аргументация, аналогичная использованной при доказательстве леммы 11.3.2, позволяет легко показать, что $R' = R^0$. Аналогично если S^0 — наименьшая многогранная грань, содержащая оптимальные стратегии игрока II, и S' — пересечение всех многогранных граней, в которых отображены оптимальные стратегии игрока I, то легко показать, что $S' = S^0$. Таким образом, здесь мы снова можем ограничиться рассмотрением редуцированной игры на $\{R^0, S^0\}$.

► **Теорема 11.3.2.** *Если многогранная игра имеет единственное решение, то обе оптимальные стратегии лежат в многогранниках одной и той же размерности.*

Доказательство. Так как точка r^0 отображается в l -мерный многогранник, лежащий в множестве S , мы должны иметь l линейно независимых соотношений, которым удовлетворяют функции

$$f_j(r^0) \quad (j = 1, \dots, m).$$

Эти соотношения определяют некоторое многообразие точек из множества R , отображающихся на S^0 . Размерность этого многообразия не меньше $m - l$. Далее, это многообразие и k -мерный многогранник

имеют единственную общую точку, именно r^0 , поскольку в противном случае было бы нарушено условие единственности решения. Следовательно, $m - l + k \leq m$, т. е. $k \leq l$. Аналогично можно показать, что $l \leq k$. Таким образом, равенство $k = l$ доказано.

Теорема о размерностях для многогранных игр с произвольными множествами решений может быть получена сведением к случаю единственного решения. Доказательство мы предоставляем читателю в качестве упражнения (см. задачи 15 и 16 к этой главе).

В следующей теореме мы полагаем, что размерность множества оптимальных стратегий X игрока I равна k . Множество X лежит внутри многогранника R^0 , размерность которого равна μ . Размерность множества оптимальных стратегий Y игрока II равна l . Множество Y (размерности l) лежит внутри многогранника S^0 , размерность которого равна ν .

► Теорема 11.3.3. В любой многогранной игре размерности множеств решений и содержащих эти множества многогранников удовлетворяют соотношению

$$\mu - k = \nu - l.$$

11.4. Метод сопряженных конусов¹⁾. До сих пор наш анализ конечных выпуклых игр опирался на теорему Какутани о неподвижной точке. Другой подход связан с теоремами отделимости для выпуклых множеств (эти теоремы уже применялись нами при анализе матричных игр), именно на методе сопряженных выпуклых конусов. Этот подход основан на тесной связи между точками выпуклого конуса и его опорными гиперплоскостями. (Читателю, не знакомому с этими понятиями, рекомендуется просмотреть приложение Б. 3.) Принцип двойственности для выпуклых конусов уже использовался в связи с теорией сопряженных функций (см. п. 7.5). В теории линейного программирования этот принцип оказался фундаментальным.

В данном контексте отношение двойственности между выпуклыми конусами окажется полезным для геометрического представления стратегий в конечных выпуклых играх, пользуясь которым мы получим границы спектров оптимальных стратегий.

Рассмотрим конечную выпуклую игру, определяемую, как и выше, тройкой $\{R, S, A\}$, где

$$A(r, s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} r_i s_j \quad (r \in R, s \in S);$$

через v обозначим значение игры. Расширим матрицу $\|a_{ij}\|$, полагая $a_{00} = -v$, $a_{i0} = 0$ ($i = 1, \dots, n$) и $a_{0j} = 0$ ($j = 1, \dots, m$). Эту

¹⁾ Термины „сопряженность“ и „двойственность“ являются синонимами. — Прим. перев.

новую матрицу мы снова обозначим через A . Множество стратегий R в пространстве E^n заменится на множество $\bar{R} \subset E^{n+1}$, которое образовано всеми векторами вида $(1, r_1, \dots, r_n)$, где вектор $(r_1, \dots, r_n)$ принадлежит множеству R . Аналогичным образом заменим множество S и $\bar{S}$. Мы позволили себе использовать старое обозначение s для точек множества $\bar{S}$, а обозначение r — для точек $\bar{R}$. Выигрыш в расширенной игре дается выражением

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} r_i s_j = -v + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} r_i s_j,$$

а значение ее равно, очевидно, нулю. Множества оптимальных стратегий для этих двух игр, конечно, совпадают. При рассмотрении конечных выпуклых игр мы использовали стандартную систему обозначений:

$$(rA)_j = \sum_i r_i a_{ij} \quad \text{и} \quad (As)_i = \sum_j a_{ij} s_j.$$

Поэтому функция выигрыша может быть записана в виде скалярного произведения:

$$A(r, s) = (rA, s) = (r, As).$$

Конусы P_R , P_S и сопряженные конусы P_R^* , P_S^* . С помощью выпуклых множеств $\bar{R}$ и $\bar{S}$ образуем выпуклые конусы P_R и P_S :

$$P_R = \{\lambda r \mid r \in \bar{R}, \lambda \geq 0\}, \quad P_S = \{\lambda s \mid s \in \bar{S}, \lambda \geq 0\}.$$

Сопряженные конусы P_R^* и P_S^* определяются так:

$$P_R^* = \{h \mid h \in E^{n+1}, (r, h) \geq 0 \text{ для всех } r \in P_R\},$$

$$P_S^* = \{h \mid h \in E^{n+1}, (h, s) \geq 0 \text{ для всех } s \in P_S\}.$$

(См. приложение Б. 3.)

Нам теперь потребуются некоторые из свойств сопряженных конусов. Доказательство этих свойств можно найти в приложении Б. 3.

(1) Лучи, составляющие выпуклый конус $P_R^* \subset E^{n+1}$, можно отождествить со множеством ориентированных гиперплоскостей, проходящих через начало координат пространства E^{n+1} , причем под ориентацией мы понимаем свойство различать полупространства, связанные с каждым элементом $h \in P_R^*$, для которого

$$\sum_{i=0}^n h_i r_i \geq 0$$

при всех $r \in P_R$. Другими словами, сопряженный конус P_R^* можно рассматривать как множество всех замкнутых полупространств, со-

державших начало координат на своей границе, пересечение которых содержит конус P_R . Аналитически эти полупространства представимы в виде точек в пространстве E^{n+1} . Их координаты совпадают с координатами нормалей к гиперплоскостям; причем нормали направлены в сторону определяемого этой гиперплоскостью полупространства.

В частности, с каждой граничной точкой конуса P_R^* связана опорная гиперплоскость к конусу P_R , которая касается конуса по лучу. Следовательно, вектор $\mathbf{h}$ будет граничной точкой конуса P_R^* в том и только том случае, если в конусе P_R найдется такая точка $\mathbf{r}^0 \neq \mathbf{0}$, что $(\mathbf{r}^0, \mathbf{h}) = 0$.

(2) Если $(P_R^*)^*$ является сопряженным конусом к P_R^* , то $(P_R^*)^* = P_R$ (см. теорему Б. 3.1).

Теперь в терминах геометрии выпуклых конусов P_R^* и P_S^* мы можем приступить к изучению структуры решений игр, определяемых ядром $A(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ и множествами $\bar{R}$ и $\bar{S}$. Следующие две леммы, аналогичные замечаниям главы 1 (в особенности см. замечания 1.1.4), дают геометрическую интерпретацию оптимальных стратегий игроков I и II, используя соответственно точки и гиперплоскости.

► Лемма 11.4.1. Обозначим через $\bar{R}A$ образ множества $\bar{R}$, преобразованного с помощью A . Тогда

$$\bar{R}A \cap P_S^* = R^0A,$$

где через R^0 обозначено множество оптимальных стратегий игрока I. Кроме того, множество $\bar{R}A$ не имеет общих внутренних точек с конусом P_S^* (внутренние точки определяются относительно пространства E^{m+1}).

Доказательство. Предположим противное, т. е. что эти два множества имеют общие внутренние точки. Тогда существует такая точка $\mathbf{r}^0 \in \bar{R}$, что точка $\mathbf{r}^0A$ является внутренней для конуса P_S^* . Отсюда следует, что $(\mathbf{r}^0A, \mathbf{s}) > 0$ для всех $\mathbf{s} \in \bar{S}$. Поскольку множество $\bar{S}$ компактно, неравенство $(\mathbf{r}^0A, \mathbf{s}) \geq \delta > 0$ должно выполняться по $\mathbf{s}$ равномерно. Из этого неравенства вытекает, что значение игры должно быть не меньше δ , тогда как на самом деле оно равно нулю. Таким образом, последнее утверждение леммы установлено.

Кроме того, множество R^0A непусто, поскольку оптимальные стратегии существуют. Возьмем $\mathbf{r}^0 \in R^0$, тогда ясно, что $\mathbf{r}^0A \in \bar{R}A$, а в силу оптимальности стратегии $\mathbf{r}^0$ мы имеем неравенство $(\mathbf{r}^0A, \mathbf{s}) \geq 0$ для всех $\mathbf{s} \in \bar{S}$. Следовательно, $\mathbf{r}^0A \in P_S^*$, и поэтому $R^0A \subset \bar{R}A \cap P_S^*$.

Обратно, если $\mathbf{rA} \in P_S^*$ для всех $\mathbf{r} \in \bar{R}$, то $(\mathbf{rA}, \mathbf{s}) > 0$ для всех $\mathbf{s} \in \bar{S}$, и поэтому стратегия $\mathbf{r}$ должна быть оптимальной. Следовательно, $R^0 \mathbf{A} \supset \bar{R} \mathbf{A} \cap P_S^*$. Это и завершает доказательство леммы.

В силу леммы 11.4.1 выпуклые множества $\bar{R} \mathbf{A}$ и P_S^* можно разделить хотя бы одной гиперплоскостью $\mathbf{p}$. Плоскость, разделяющая множества $\bar{R} \mathbf{A}$ и P_S^* , оказывается, в частности, опорной плоскостью конуса P_S^* , а всякая опорная к конусу плоскость должна обязательно проходить через его вершину $\mathbf{0}$. Таким образом, гиперплоскость $\mathbf{p}$ может быть представлена в виде линейной формы, определенной в E^{m+1} и задаваемой $m+1$ -мерным вектором $\mathbf{p} = \mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_m)$, где не все s_j равны нулю. Поскольку гиперплоскость $\mathbf{p}$ является опорной к конусу P_S^* , умножая все компоненты s_j на один и тот же множитель ± 1 , мы можем предположить, не умаляя общности, что $\mathbf{s} \in (P_S^*)^* = P_S$. Аналогично устанавливается, что любой гиперплоскости, проходящей через начало и оставляющей множество P_S^* по одну сторону, могут быть поставлены в соответствие точки множества P_S . Кроме того, все точки множества P_S , соответствующие одной и той же граничной плоскости P_S^* , должны лежать на луче, проходящем через начало координат. Поэтому удобно взять только одну точку этого луча, соответствующую этой гиперплоскости. Это достигается умножением вектора $\mathbf{p}$ на соответствующим образом выбранный положительный множитель. Поскольку множество $\bar{S}$ было естественным поперечным сечением, использовавшимся для образования конуса P_S , все гиперплоскости, содержащие $\mathbf{0}$ и оставляющие конус P_S^* по одну сторону, находятся во взаимно однозначном соответствии с сечением $\bar{S}$ множества P_S .

Опорная гиперплоскость к конусу P_S^* , которая разделяет множества $\bar{R} \mathbf{A}$ и P_S^* , играет особую роль.

► *Лемма 11.4.2. Плоскости, разделяющие множества $\bar{R} \mathbf{A}$ и P_S^* , находятся во взаимно однозначном соответствии с оптимальными стратегиями игрока II.*

Доказательство. Обозначим через S^0 множество всех оптимальных стратегий игрока II. Каждая точка $\mathbf{s}^0 \in S^0$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} (\mathbf{rA}, \mathbf{s}^0) &\geq 0 \quad \text{для всех } \mathbf{r} \in \bar{R}, \\ (\mathbf{h}, \mathbf{s}^0) &\geq 0 \quad \text{для всех } \mathbf{h} \in P_S^*. \end{aligned} \tag{11.4.1}$$

Следовательно, точка $\mathbf{s}^0$ определяет некоторую разделяющую плоскость.

Обратно, поскольку множества $\bar{R}A$ и P_S^* соприкасаются, любая разделяющая плоскость s^* должна быть и опорной плоскостью для них обоих. В силу рассуждений, предшествовавших этой лемме, мы можем умножить вектор s^* на такую константу, чтобы выполнялись условия

$$(rA, s^*) \leq 0 \quad \text{для всех } rA \in \bar{R}A, \quad (11.4.2)$$

$$(h, s^*) \leq 0 \quad \text{для всех } h \in P_S^*, \quad (11.4.3)$$

где $s^* \in \bar{S}$. Из (11.4.2) мы получаем, что s^* является оптимальной стратегией игрока II.

11.5. Структура множеств решений вырожденных игр. Подведем итоги геометрических рассуждений, проведенных в предыдущем пункте. (а) Стратегии игрока I могут рассматриваться как образы точек множества $\bar{R}$, подвергнутого преобразованию A , а его оптимальные стратегии соответствуют точкам соприкосновения множеств $\bar{R}A$ и P_S^* . (б) Стратегии игрока II могут быть представлены как опорные гиперплоскости конуса P_S^* , а его оптимальные стратегии соответствуют опорным плоскостям для конуса P_S^* , которые разделяют множества P_S^* и $\bar{R}A$.

Теперь с помощью этих геометрических характеристик стратегий мы подготовлены для получения как соотношений между размерностями, так и свойств оптимальных стратегий для конечных выпуклых игр и, в частности, для вырожденных игр.

Из доказываемых далее теорем вытекает, что для вырожденных игр существуют оптимальные стратегии, имеющие конечные спектры с известными верхними границами. Эти несколько неожиданные результаты объясняются тем, что вырожденные игры являются в конце концов бесконечными играми с произвольными смешанными стратегиями. Тем не менее конечная природа ядра влечет существование оптимальных стратегий конечного типа.

Результаты, которые устанавливают существование оптимальных стратегий конечного типа, являются ценными по следующим двум причинам. Во-первых, такие стратегии можно легко вычислять. Во-вторых, эти стратегии являются простейшими типами смешанных стратегий, которые встречаются в бесконечных играх, и реализуются в практике наиболее легко.

Рассмотрим вырожденную игру

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} r_i(\xi) s_j(\eta), \quad (11.5.1)$$

где $r_i(\xi) (i=1, \dots, n)$ и $s_j(\eta) (j=1, \dots, m)$ суть непрерывные функции.

Обозначим через C кривую, лежащую в пространстве E^{n+1} и описываемую параметрическими уравнениями $r_i = r_i(\xi)$ ($0 \leq \xi \leq 1$; $i = 1, \dots, n$), где через $r_0(\xi)$ обозначена функция, тождественно равная единице. Как мы уже видели в п. 11.1, игра с ядром K может быть сведена к конечной выпуклой игре $\{R, S, A\}$, где A — матрица $\|a_{ij}\|$, а R и S — множества, охарактеризованные в теореме 11.1.1.

► Теорема 11.5.1. Если в вырожденной игре размерности (в R и S) множеств оптимальных стратегий равны соответственно μ и ν , а ρ — ранг исходной матрицы $\|a_{ij}\|$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$), то для игрока I существует оптимальная стратегия со спектром, имеющим не более чем $\min(\rho, m - \nu + 1)$ точек, а для игрока II существует оптимальная стратегия со спектром, имеющим не более чем $\min(\rho, n - \mu + 1)$ точек.

Доказательство. Напомним сначала, что образом оптимальной стратегии r^0 в $\overline{RA} \cap P_S^*$ является $r^0 A$.

Размерность выпуклого множества $\overline{RA}$ не превосходит ρ . Следовательно, в силу леммы Б.2.2 каждая точка этого множества является линейной комбинацией не более чем ρ точек множества $(C)A$. [Через $(C)A$ здесь обозначено множество в пространстве E^{m+1} , которое получается преобразованием точек кривой C помощью матрицы A .]

Кроме того, любая точка множества $\overline{RA} \cap P_S^*$ должна, как утверждается в лемме 11.4.1, лежать в пересечении L всех гиперплоскостей, разделяющих эти два множества. В силу леммы 11.4.2 размерность множества L равна $m - \nu$. Таким образом, точка $r^0 A$ должна принадлежать выпуклой оболочке $(C)A \cap L$. Поскольку это множество может оказаться несвязным, мы в силу леммы Б.2.1 можем заключить, что точка $r^0 A$ может быть представлена как выпуклая комбинация не более чем $\min(\rho, m - \nu + 1)$ точек множества $(C)A$. Следовательно, точка r^0 состоит не более чем из $\min(\rho, m - \nu + 1)$ точек кривой C .

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

► Следствие 11.5.1. В вырожденной игре с ядром вида (11.5.1) и непрерывными функциями $r_i(\xi)$, $s_j(\eta)$ оба игрока имеют оптимальные стратегии со спектром, состоящим не более чем из $\min(m, n)$ точек.

Доказательство вытекает из хорошо известного неравенства $\rho \leq \min(m, n)$.

Границы, указанные в теореме 11.5.1, могут быть для некоторых конечных игр улучшены. Для игр, определяемых полиномиальным ядром, могут быть получены очень точные условия для существования оптимальных стратегий заданного размера ¹⁾ (см. п. 11.8). В этом случае нам потребуется знание точной структуры границ пространства классических моментов.

Следующая теорема не имеет отношения к числу точек спектра оптимальных стратегий; скорее, она является аналогом соотношения между размерностями множеств оптимальных стратегий в матричных играх.

► Теорема 11.5.2. Если μ , ν и ρ определены так, как указано в теореме 11.5.1, то

$$\mu + \nu \leq m + n - \rho.$$

Доказательство. Размерность ядра ²⁾ оператора A^T равна $n - \rho$ (напомним, что через A^T обозначена транспонированная матрица матрицы A). Если мы рассматриваем A^T как линейное отображение на подпространства, принадлежащие пространству E^n , то размерность образа пространства не может уменьшиться более чем на $n - \rho$. В частности, размерность множества $R^0 A$ не меньше чем $\mu - (n - \rho)$, поскольку размерность множества R^0 равна μ .

С другой стороны, $R^0 A$ является множеством соприкосновения множеств $\bar{R}A$ и P_S^* . Следовательно, оно лежит в $\nu + 1$ линейно независимых гиперплоскостях в E^{m+1} , размерность пересечения которых равна $m - \nu$. Отсюда следует, что

$$\mu - (n - \rho) \leq \dim R^0 A \leq m - \nu$$

и

$$\mu + \nu \leq m + n - \rho.$$

► Следствие 11.5.2. Если $\|a_{ij}\|$ ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$) — невырожденная матрица, то

$$\mu + \nu \leq \max(m, n).$$

11.6. Общие замечания о выпуклых множествах в пространстве E^n . В следующих пунктах мы проведем более полное исследование природы оптимальных стратегий в вырожденных играх, ядра которых являются полиномами. В играх этого класса пространства стратегий

¹⁾ Под размером стратегии понимается количество точек в спектре этой стратегии. — Прим. перев.

²⁾ Ядром оператора A называется множество, состоящее из всех векторов $x \in E^n$, которые удовлетворяют уравнению $Ax = 0$. Иногда размерность ядра называют дефектом оператора A . — Прим. перев.

R и S можно рассматривать как пространства классических конечных моментов. Дальнейшее исследование структуры решений полиномиальной игры потребует подробного описания границ пространств моментов. Поэтому ниже мы займемся изучением пространств классических конечных моментов и структуры границы выпуклых множеств в евклидовых пространствах.

Идея состоит в том, чтобы любому выпуклому множеству сопоставить несколько численных (быть может, целочисленных) функций, которые характеризуют точки границы множества и тем самым полностью определяют множество и описывают его. С помощью этих функций мы сможем выделять различные типы выпуклых множеств. Например, функции, характеризующие многогранные выпуклые множества, часто удовлетворяют очень простым соотношениям. Размерности обобщенных пространств конечных классических моментов также связаны интересными соотношениями, выраженными через эти функции.

Рассмотрим теперь произвольное замкнутое ограниченное выпуклое множество Γ и назовем его *размерностью* размерность наименьшего линейного многообразия, содержащего Γ . Пусть точка $\mathbf{r}$ лежит на границе множества Γ ; обозначим через $L(\mathbf{r})$ пересечение всех гиперплоскостей опорных к Γ в точке $\mathbf{r}$. *Множество соприкосновения* $C(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$ определим как пересечение $L(\mathbf{r})$ и Γ . Определим, наконец, две характеристики размерности:

$a(\mathbf{r}) = \dim L(\mathbf{r})$ — *размерность грани в точке $\mathbf{r}$,*

$c(\mathbf{r}) = \dim C(\mathbf{r})$ — *размерность соприкосновения в точке $\mathbf{r}$.*

Для внутренней точки $\mathbf{u} \in \Gamma$ положим, ради полноты определения, что

$$a(\mathbf{u}) = c(\mathbf{u}) = n,$$

где n — размерность множества Γ .

Легко видеть, что для ограниченного многогранного множества, т. е. для выпуклого множества, являющегося выпуклой комбинацией конечного числа точек, всегда выполняется равенство $a(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r})$. В общем случае разность $a(\mathbf{r}) - c(\mathbf{r})$ количественно характеризует искривленность границы множества Γ в точке $\mathbf{r}$.

Говоря более образно, в точках округления на границе выпуклого множества (т. е. в точках, напоминающих точки границы единичной сферы) должно выполняться равенство $c(\mathbf{r}) = 0$.

Если мы погрузим множество R в пространство E^{n+1} таким же образом, как мы погружали множество R в пространство E^{n+1} в п. 11.4, то мы сможем сконструировать конусы P_Γ и P_Γ^* .

Если конус P_Γ не имеет внутренних точек, то, по определению, конус P_Γ^* совпадает со всем пространством E^{n+1} , и этот случай не представляет интереса. Поэтому далее мы будем всюду предполагать,

если не оговорено противное, что конус P_Γ имеет внутренние точки. Поскольку конус P_Γ замкнутый и выпуклый, мы имеем $(P_\Gamma^*)^* = P_\Gamma$ (см. теорему Б.3.1). Всякое ограниченное поперечное сечение Γ^* конуса P_Γ^* называется двойственным (сопряженным) множеству Γ . Аналитически поперечное сечение конуса P_Γ^* может быть представлено как множество всех точек $s \in P_\Gamma^*$, удовлетворяющих условию $(s, u) = 1$, где u — внутренняя точка конуса P_Γ . Точки на границе множества Γ^* можно рассматривать как опорные гиперплоскости к Γ , и обратно.

Мы говорим, что точка s на границе множества Γ^* является сопряженной к точке r на границе множества Γ , если точка s оказывается внутренней точкой для совокупности опорных гиперплоскостей множества Γ в точке r . Точно так же определяются точки $r \in \Gamma$, сопряженные к точкам $s \in \Gamma^*$.

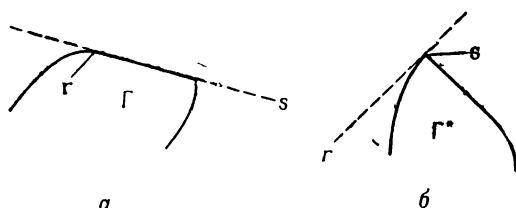


Рис. 19.

Это отношение сопряженности оказывается симметричным не всегда. На рис. 19 точка s является сопряженной к точке r , а точка r есть опорная гиперплоскость к множеству Γ^* в точке s , но точка r не является сопряженной ни к какой точке.

Очевидно, точка s является единственной опорной гиперплоскостью в точке r , и, следовательно, она оказывается внутренней точкой множества гиперплоскостей, опорных к множеству Γ в точке r .

► Лемма 11.6.1. Пусть точка r лежит на границе множества Γ , а точка s — на границе множества Γ^* . Если точка s сопряжена к r или точка r сопряжена к s , то

$$a(r) + c(s) = c(r) + a(s) = n - 1. \quad (11.6.1)$$

Замечание 11.6.1. В некотором смысле эта лемма выражает двойственность между размерностью „границ“ выпуклого множества, содержащего данную точку, и размерностью семейства всех возможных опорных плоскостей в данной точке. Формула (11.6.1) дает нам возможность переходить от соотношений между размерностями множества Γ к соответствующим соотношениям между размерностями множества Γ^* , и обратно.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $\mathbf{r}$ на границе множества Γ и обозначим через $\mathbf{s} \in \Gamma^*$ опорную гиперплоскость к множеству Γ в точке $\mathbf{r}$. Тогда $(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = 0$.

Определим A как множество опорных гиперплоскостей к множеству Γ^* в точке $\mathbf{s}$, т. е. положим

$$A = \{\mathbf{r}' \in \Gamma | (\mathbf{r}', \mathbf{s}) = 0\}.$$

Поскольку размерность пересечения этих гиперплоскостей равна $a(\mathbf{s})$, в множестве A должно существовать $n - a(\mathbf{s})$ линейно независимых гиперплоскостей. Размерность множества A , рассматриваемого как выпуклое подмножество на границе множества Γ , равна, следовательно, $n - a(\mathbf{s}) - 1$.

Пусть $B = L(\mathbf{r}) \cap \Gamma$. По определению, размерность множества B равна $c(\mathbf{r})$. Докажем, что $A = B$.

Если $\mathbf{r}' \in B$, то точка $\mathbf{r}'$ принадлежит всем опорным гиперплоскостям множества Γ в точке $\mathbf{r}$. В частности, точка $\mathbf{r}'$ лежит в гиперплоскости, соответствующей точке $\mathbf{s}$; поэтому $(\mathbf{r}', \mathbf{s}) = 0$. Отсюда следует, что $\mathbf{r}' \in A$ и $B \subset A$.

Докажем обратное включение: $A \subset B$, причем здесь мы рассмотрим отдельно два случая.

Случай 1. Если точка $\mathbf{s}$ является сопряженной точке $\mathbf{r}$, то точка $\mathbf{s}$ будет относительно внутренней¹⁾ гиперплоскостью к множеству Γ в точке $\mathbf{r}$. Следовательно, точка $\mathbf{s}$ является опорной гиперплоскостью к Γ и соприкасается с ним точно по множеству B . Таким образом, любая точка $\mathbf{r}' \in \Gamma$, удовлетворяющая условию $(\mathbf{r}', \mathbf{s}) = 0$, принадлежит множеству B и, следовательно, $A \subset B$.

Случай 2. Если точка $\mathbf{r}$ сопряжена точке $\mathbf{s}$, то точка $\mathbf{r}$ является относительно внутренней опорной гиперплоскостью множества A . Следовательно, каждая опорная гиперплоскость, проходящая через точку $\mathbf{r}$, должна содержать все множество A . В противном случае множество A должно было бы содержать точки по обе стороны этой гиперплоскости, и гиперплоскость не была бы опорной. Поэтому пересечение $L(\mathbf{r})$ всех этих плоскостей должно содержать все множество A . Поскольку в силу определения множество Γ содержит множество A , мы имеем включение $L(\mathbf{r}) \cap \Gamma \supset A$, или $B \supset A$. В обоих случаях $B \supset A$ и, следовательно, $B = A$. Отсюда следует, что $\dim B = \dim A$, т. е.

$$c(\mathbf{r}) = n - a(\mathbf{s}) - 1,$$

или

$$c(\mathbf{r}) + a(\mathbf{s}) = n - 1.$$

¹⁾ Точка $\mathbf{a}$ множества A называется *внутренней*, если существует окрестность $\mathbf{a}$, целиком лежащая внутри A ; *относительно внутренней* точкой A называется точка, имеющая окрестность, пересечение которой с A открыто в A в смысле топологии объемлющего пространства. — Прим. перев.

Ввиду того, что предположения доказываемой леммы симметричны относительно точек $\mathbf{r}$ и $\mathbf{s}$, мы имеем

$$c(\mathbf{s}) + a(\mathbf{r}) = n - 1.$$

Наконец, еще одно важное соотношение, касающееся размерности выпуклого множества, связано с тем основным фактом, что выпуклые множества являются выпуклыми замыканиями своих крайних точек (см. лемму Б.2.4). Поскольку каждый элемент множества может быть представлен в виде конечной выпуклой комбинации экстремальных точек, мы можем обозначить через $b(\mathbf{r})$ наименьшее число крайних точек множества Γ , необходимых для представления точки $\mathbf{r}$.

В силу леммы Б.2.1 для любой точки из замкнутого ограниченного m -мерного выпуклого множества должно выполняться как неравенство

$$b(\mathbf{r}) \leq m + 1,$$

так и неравенство

$$b(\mathbf{r}) \leq c(\mathbf{r}) + 1.$$

11.7. Пространства обобщенных моментов. Полученные выше соотношения для конечномерных выпуклых множеств общего вида имеют интересную интерпретацию и могут быть улучшены применительно к пространствам классических моментов. Классическое n -мерное пространство моментов D^n состоит из всех таких векторов $(r_1, r_2, \dots, r_n)$, что существует распределение $x(\xi)$ на интервале $[0, 1]$, для которого

$$r_i = \int_0^1 \xi^i dx(\xi) \quad (i = 1, \dots, n).$$

Для $n \geq 2$ кривая C , описываемая параметрическими уравнениями $r_i = \xi^i$ ($0 \leq \xi \leq 1$), содержит крайние точки множества D^n (см. ниже лемму 11.7.1).

На рис. 20 и 21 показаны двухмерное и трехмерное пространства моментов. На рис. 21 непрерывные линии, соединяющие кривую C^3 с точкой $(1, 1, 1)$, являются выпуклой оболочкой верхней границы множества D^3 . Пунктирные линии, соединяющие точку $(0, 0, 0)$ с кривой, являются выпуклой оболочкой нижней границы множества D^3 .

Наша цель состоит в изучении множества D^n с точки зрения понятий размерностей граней, введенных для общих выпуклых множеств. Подобно многогранным выпуклым множествам, исследование которых не вызывало затруднений, пространства классических моментов D^n имеют достаточно разнообразную структуру. Мы начинаем с исследования свойств выпуклой оболочки, порожденной кривой C^n

по отношению к пространству D^n . Винтовая форма кривой C^n ($n \geq 2$) прямо указывает на то, что ни одна из точек этой кривой не может быть представлена в виде выпуклой комбинации других точек множества D^n . Следовательно, каждая точка кривой C^n является крайней точкой множества D^n . В силу теоремы 11.1.1 все другие точки могут быть представлены в виде конечных выпуклых комбинаций точек кривой.

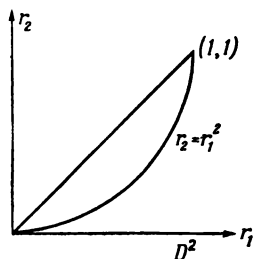


Рис. 20.

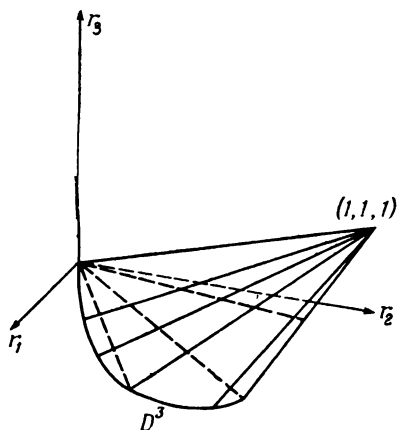


Рис. 21.

вой C^n . Более точная формулировка этого утверждения содержится в следующей лемме.

► Лемма 11.7.1. Точки, лежащие на границе множества D^n , представимы единственным образом в виде выпуклых комбинаций крайних точек. Каждая внутренняя точка множества D^n имеет бесконечно много представлений с помощью точек кривой C^n .

Доказательство. Мы приведем только доказательство первого утверждения, предоставив доказательство второго читателю в качестве упражнения.

Заметим прежде всего, что если H — некоторая опорная гиперплоскость¹⁾ к множеству D^n , то характерным ее свойством является выполнение неравенства

$$(\mathbf{h}, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^n h_i r_i + h_0 \geq 0 \quad (11.7.1)$$

¹⁾ Для целей теоремы будем из всех опорных гиперплоскостей, проходящих через данную точку границы, рассматривать ту, которая пересекается с D^n по множеству наименьшей размерности. Для данной граничной точки все такие пересечения совпадают. — Прим. ред.

для всех $\mathbf{r} \in D^n$. В частности,

$$h_0 + \sum_{i=1}^n h_i \xi^i \geq 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1), \quad (11.7.2)$$

и равенство должно достигаться по крайней мере для одного значения ξ , поскольку плоскость является опорной¹⁾. Однако не все h_i равны нулю; следовательно, равенство может достигаться не более чем в n точках ξ , поскольку степень полинома не выше n . Пусть число нулей (т. е. точек соприкосновения кривой C^n и плоскости) равно $k \leq n$. Эти точки линейно независимы, поскольку матрицей их координат является матрица Вандермонда, ранг которой равен k . (Набор из n точек будет линейно независимым, если $n-1$ векторов, соединяющих любую из этих точек с оставшимися, будут линейно независимыми.)

Поэтому каждая опорная гиперплоскость H соприкасается с множеством D^n по симплексу, вершины которого линейно независимы. Любая точка в этом симплексе может быть представлена единственным образом в виде выпуклой комбинации его вершин. Поскольку в каждой точке границы множества D^n существует некоторая опорная гиперплоскость, первое утверждение леммы доказано.

В целях дальнейшего изучения порождения множества D^n кривой C^n удобно точкам кривой C^n приписать некоторые веса. Точке $\mathbf{r} \in C^n$ приписываем вес 1, если значение параметра, соответствующее этой точке, не равно нулю или единице; в противном случае точке приписывается вес $1/2$. Такой выбор весов в дальнейшем себя оправдает.

Обозначим для любой точки $\mathbf{r} \in D^n$ через $b(\mathbf{r})$ наименьшее число точек кривой C^n , с помощью которых может быть представлена точка $\mathbf{r}$ (см. п. 11.6). Обозначим через $b'(\mathbf{r})$ то же самое число, где, однако, концевые точки $(0, 0, \dots, 0)$ и $(1, 1, \dots, 1)$ условно засчитываются за „половину точки“; другими словами, $b'(\mathbf{r})$ измеряет количество точек, используемых в представлении точки $\mathbf{r}$ с помощью новых весов, введенных выше.

Мы можем назвать $b'(\mathbf{r})$ весом точки $\mathbf{r}$. Ясно, что $b'(\mathbf{r})$ может принимать только полуцелые или целые значения. Очевидно,

$$b(\mathbf{r}) - 1 \leq b'(\mathbf{r}) \leq b(\mathbf{r}). \quad (11.7.3)$$

В следующих двух леммах устанавливаются некоторые соотношения между введенными характеристиками размерностей граней в пространстве моментов. Кроме того, в лемме 11.7.3 фактически показано, что граница множества D^n настолько искривлена, что размерность множества $L(\mathbf{r})$ может быть уменьшена вдвое. В соответ-

¹⁾ Напомним, что опорная гиперплоскость должна иметь с множеством, для которого она является опорной, общие точки. — *Прим. перев.*

ствии со значениями функции $b'(r)$ границу можно разбить на несколько компонент. В пределах каждой из этих компонент размерность множества опорных гиперплоскостей одна и та же.

Можно получить много других интересных характеристик пространств классических моментов. Некоторые из них будут приведены при интерпретации конуса, порожденного множеством D^n , и конуса, сопряженного с ним. Прежде всего мы установим два важных результата.

► Лемма 11.7.2. Если точка r принадлежит границе множества D^n , то

$$b(r) = c(r) + 1 \quad (11.7.4)$$

и

$$2b'(r) = a(r) + 1. \quad (11.7.5)$$

Если r лежит внутри D^n , то

$$2b'(r) = n + 1 = a(r) + 1. \quad (11.7.6)$$

Доказательство. При доказательстве предыдущей леммы было установлено, что число линейно независимых элементов в $L(r) \cap D^n$ равно $b(r)$. Но число линейно независимых элементов больше размерности на единицу. Следовательно,

$$b(r) = \dim(L(r) \cap D^n) + 1 = c(r) + 1.$$

Для того чтобы установить (11.7.5) для точки, принадлежащей границе множества D^n с характеристическим числом $b'(r)$, построим следующий полином P_0 степени $2b'(r)$. Каждая внутренняя точка кривой C , входящая в представление точки r , является двойным его корнем, а каждая граничная точка C (т. е. 0 или 1), которая входит в представление r , — простым. Знак полинома P_0 выбирается так, чтобы в единичном интервале он был бы неотрицательным. Рассмотрим далее множество всех неотрицательных на единичном интервале полиномов Q степени $n - 2b'(r)$.

Неравенство $n \geq 2b'(r)$ устанавливается без труда. Коэффициенты $h = (h_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) всякого полинома QP_0 из рассматриваемого множества полиномов определяют некоторую гиперплоскость, опорную к множеству D^n в точке r . Тот факт, что полином QP_0 неотрицателен для всех $\xi \in [0, 1]$, означает, что кривая C^n лежит по одну сторону от этой гиперплоскости и, следовательно, $D^n = \text{Co } C^n$ (Co — выпуклая оболочка множества) лежит с той же самой стороны. Кроме того, полином QP_0 обращается в нуль для всех тех ξ , которые участвуют в представлении точки r , и поэтому $(h, r) = 0$. Последнее означает, что точка r принадлежит гиперплоскости h , компоненты которой являются коэффициентами полинома QP_0 .

Обратно, любая гиперплоскость, опорная к множеству D^n в точке $\mathbf{r}$, определяет некоторый полином, удовлетворяющий неравенствам (11.7.2) и имеющий полином P_0 в качестве множителя (см. доказательство леммы 11.7.1).

Размерность всех опорных гиперплоскостей (всех неотрицательных полиномов Q) равна точно $n - 2b'(\mathbf{r}) + 1$, и, следовательно, размерность их пересечения $a(\mathbf{r}) = 2b'(\mathbf{r}) - 1$. Это завершает доказательство формулы (11.7.5). Ввиду того, что доказательство формулы (11.7.6) аналогично, мы опускаем детали.

► Лемма 11.7.3. На границе множества D^n выполняются неравенства

$$a(\mathbf{r}) - 1 \leq 2c(\mathbf{r}) \leq a(\mathbf{r}) + 1. \quad (11.7.7)$$

Доказательство. Из (11.7.3) мы имеем неравенство

$$2b'(\mathbf{r}) \leq 2b(\mathbf{r}) \leq 2b'(\mathbf{r}) + 2,$$

или

$$2b'(\mathbf{r}) \leq 2[c(\mathbf{r}) + 1] \leq 2b'(\mathbf{r}) + 2;$$

отсюда в силу неравенства (11.7.5) из леммы 11.7.2 получаем

$$a(\mathbf{r}) + 1 \leq 2c(\mathbf{r}) + 2 \leq a(\mathbf{r}) + 3.$$

Конус P_D . Если понятие представления с помощью выпуклых комбинаций обобщить, допуская использование бесконечных множеств точек, то выпуклое представление точек $\mathbf{r}^0 \in D^n$ устанавливает взаимно однозначное соответствие таких точек с функциями распределения $x^0(\xi)$, моменты которых r_i суть координаты точек $\mathbf{r}^0$.

Момент

$$r_0 = \int_0^1 1 \cdot dx(\xi)$$

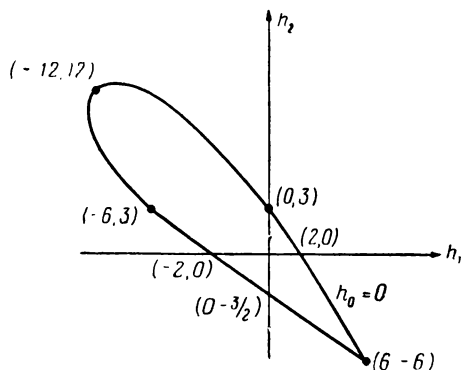
соответствует координате r_0 . Если мы будем рассматривать распределение с произвольным неотрицательным весом r_0 , то получим конус P_D . Иными словами, точкой конуса P_D является упорядоченный набор n чисел $(r_0, r_1, \dots, r_n)$, где

$$r_i = \int_0^1 \xi^i dx(\xi) \quad (i = 0, 1, \dots, m),$$

причем ограничений на нормировку функции $x(\xi)$ не налагается¹⁾.

¹⁾ Для вероятностных распределений на множестве D^n , конечно, должно быть $r_0 = 1$. — Прим. перев.

Сопряженный конус P_D^* . Соответствие между линейной формой (11.7.1) и полиномами из неравенства (11.7.2) показывает, что конус P_D^* можно рассматривать как множество полиномов степени не выше n , которые неотрицательны в интервале $0 \leq \xi \leq 1$. Из доказательства леммы 11.7.1 мы видим, что граница конуса P_D^* содержит те полиномы из конуса P_D^* , которые имеют по крайней мере один корень в этом интервале. Можно показать, что крайними



Р и с. 22.

точками (ограниченного поперечного сечения конуса) являются именно те полиномы, все n корней которых лежат в этом интервале.

Это поперечное сечение конуса P_D^* определяется как множество

$$\left\{ h_i \mid i=0, 1, \dots, n; (h, r) \geq 0 \text{ для } r \in P_D \text{ и } \sum_{i=0}^n \frac{h_i}{i+1} = 1 \right\}.$$

Графическая иллюстрация этого для $n=2$ приведена на рис. 22.

11.8. Полиномиальные игры. Полиномиальная игра задается вырожденным ядром вида

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} \xi^i \eta^j.$$

Геометрическое представление стратегий, как точек выпуклых множеств и опорных плоскостей к соответствующим выпуклым конусам, помогло нам установить соотношения между размерностями множеств оптимальных стратегий вырожденных игр. В частности, использование теории сопряженных (двойственных) конусов при изучении вырожденных игр позволило сделать заключение о существовании опти-

мальных стратегий конечного типа. Дальнейшее изучение геометрии пространств классических моментов позволит нам получить более полную информацию о виде оптимальных стратегий полиномиальных игр.

Пусть через μ и ν обозначены, как и выше, размерности множеств оптимальных стратегий R^0 и S^0 соответственно игроков I и II. Пусть ρ — ранг $n \times (m+1)$ -матрицы, получающейся из матрицы A опусканием строки $i=0$; σ — ранг $(n+1) \times m$ -матрицы, получающейся из матрицы A опусканием столбца $j=0$. (Заметим, что изменение a_{00} , обращающее значение игры в нуль, этих рангов не изменяет.)

Предположение. Мы рассматриваем только тот случай, когда $\rho = \min(n, m+1)$ и $\sigma = \min(n+1, m)$, так что обе матрицы не вырождены. Для определенности мы будем изучать случай $n \leq m+1$, так что $\rho = n$.

Из предположения $\rho = n$ следует, что размерность множества $(R)A$ равна n . При этих условиях характеристики размерностей множеств сохраняются:

$$a(rA) = a(r), \quad c(rA) = c(r).$$

(Мы подчеркиваем, что функции $a(r)$ и $c(s)$ определяются соответственно для множеств R и S .)

Для того чтобы сделать более понятными доказательства следующих ниже теорем, напомним определение существенных стратегий и укажем на их связь со смешанными стратегиями в полиномиальных играх.

Мы называем чистой стратегией, соответствующую значению параметра ξ , *существенной*¹⁾, если существует оптимальная смешанная стратегия $x(\xi)$, в которой используется ξ . Если r^0 — внутренняя точка R , то существует представление точки r^0 , в котором может быть использовано ξ , т. е. в этом случае любая чистая стратегия оказывается существенной (лемма 11.7.1). С другой стороны, если точка r^0 лежит на границе множества R , то существует точно $b(r^0)$ существенных чистых стратегий в единственном представлении точки r^0 . Другими словами, любая смешанная стратегия $x(\xi)$, моменты которой дают точку на границе множества R , сосредоточена ровно в $b(r^0)$ точках единичного интервала. Фактически мы можем утверждать даже большее. В силу леммы 11.7.1 существует единственное распределение, соответствующее точке r^0 , и это распределение является распределением конечного типа.

Кроме того, если точка r^0 лежит на границе множества R , но точка r^0A является относительно внутренней точкой множества R^0A (см. сноску на стр. 466), то все точки множества R^0 должны находиться на границе множества R . Тогда все точки множества R^0

¹⁾ Синоним: активная. — *Прим. перев.*

являются выпуклой оболочкой тех точек, которые порождают $\mathbf{r}^0$ (в противном случае точка $\mathbf{r}^0\mathbf{A}$ не была бы относительно внутренней точкой множества $R^0\mathbf{A}$). Следовательно, число чистых существенных стратегий равно $b(\mathbf{r}^0)$.

Следующие теоремы дают детальную характеристику оптимальных стратегий.

► Теорема 11.8.1. Пусть в полиномиальной игре с ядром

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} \xi^i \eta^j \quad (n \leq m+1)$$

ранг $n \times (m+1)$ -матрицы $\|a_{ij}\|$ ($i \neq 0$) равен $\rho = n$, $\mathbf{r}^0$ — относительно внутренняя точка μ -мерного выпуклого множества оптимальных стратегий игрока I, а $\mathbf{s}^0$ — относительно внутренняя точка γ -мерного выпуклого множества оптимальных стратегий игрока II. Тогда

$$\mu \leq m+1 - 2b'(\mathbf{s}^0). \quad (11.8.1)$$

Доказательство.

Случай 1. Предположим сначала, что точка $\mathbf{s}^0$ лежит на границе множества S . Обозначим через $\mathbf{s}^* \in P_S^*$ любую точку, сопряженную точке $\mathbf{s}^0$. Прежде всего докажем, что каждая гиперплоскость, опорная к конусу P_S^* в точке $\mathbf{s}^*$, содержит множество соприкосновения $P_S^* \cap R\mathbf{A}$. Пусть h — одна из таких опорных гиперплоскостей; предположим, что существует точка $\mathbf{r}'\mathbf{A}$, принадлежащая множеству $R^0\mathbf{A}$ и не принадлежащая гиперплоскости h . Через T обозначим множество плоскостей, опорных к множеству S в точке $\mathbf{s}^0$. Ввиду того что $\mathbf{r}'\mathbf{A} \in P_S^*$ (лемма 11.4.1), но $\mathbf{r}'\mathbf{A} \notin h$, должно выполняться неравенство $(\mathbf{r}'\mathbf{A}, \mathbf{h}) > 0$. Однако $\mathbf{s}^0$ и $\mathbf{r}'$ — оптимальные стратегии, поэтому $(\mathbf{r}'\mathbf{A}, \mathbf{s}^0) = 0$. Следовательно, точку $\mathbf{r}'\mathbf{A}$ можно рассматривать как элемент множества T . Но в силу определения сопряженной точки $\mathbf{s}^*$ является относительно внутренней точкой T . Поэтому мы можем найти такую точку $\mathbf{t} \in T$, что $\mathbf{s}^* = \alpha \mathbf{r}'\mathbf{A} + \beta \mathbf{t}$, где $0 < \alpha \leq 1$, $\alpha + \beta = 1$. Образуя скалярное произведение, мы получим

$$0 = (\mathbf{s}^*, \mathbf{h}) = \alpha (\mathbf{r}'\mathbf{A}, \mathbf{h}) + \beta (\mathbf{t}, \mathbf{h}).$$

Поскольку из соотношения $\mathbf{t} \in T \subset P_S^*$ следует неравенство $(\mathbf{t}, \mathbf{h}) \geq 0$, последнее уравнение противоречит предположению $\mathbf{r}'\mathbf{A} \notin h$.

Следовательно, пересечение всех гиперплоскостей, опорных к конусу P_S^* в точке $\mathbf{s}^*$, содержит множество соприкосновения $R^0\mathbf{A}$, раз-

мерность которого равна μ . Допуская, что соприкосновение происходит по одной из образующих конуса P_S^* , мы имеем

$$c(s^*) + 1 \geq \mu.$$

В силу леммы 11.6.1 $c(s^*) + a(s^0) = m - 1$. Следовательно, $m - a(s^0) \geq \mu$, а из леммы 11.7.2 мы получаем неравенство $m + 1 - 2b'(s^0) \geq \mu$, которое и требовалось установить.

Случай 2. Пусть s^0 является внутренней точкой множества S . Тогда $a(s^0) = m$, и мы должны показать, что $\mu = 0$.

Пусть $r' \in R^0$. Тогда $r'A \in RA \cap P_S^*$. Кроме того, поскольку $r'A \in P_S^*$ и s^0 — внутренняя точка множества S , мы имеем $(r'A, s^0) > 0$, если $r'A \neq 0$. Но из оптимальности r' вытекает $(r'A, s^0) = 0$. Поэтому $r'A = 0$, и множество R^0A содержит только одну точку, а именно начало координат. Поскольку A' — взаимно однозначное преобразование множества R , мы имеем

$$\mu = \dim R^0 = \dim R^0A = 0.$$

Это завершает доказательство теоремы.

Из неравенства (11.8.1) вытекает, что чем больше размерность множества оптимальных стратегий игрока I, тем более вероятно, что игрок II будет иметь оптимальные стратегии конечномерного типа, являющиеся смесью небольшого числа чистых стратегий. Более точно, если выпуклая оболочка оптимальных стратегий игрока I является μ -мерным множеством, то у игрока II существует оптимальная стратегия s^0 с весом

$$b'(s^0) \leq \frac{m + 1 - \mu}{2}.$$

В следующей теореме формулируется соответствующее неравенство, связывающее размерность множества оптимальных стратегий игрока II и вес оптимальной стратегии игрока I.

► **Теорема 11.8.2.** *В условиях теоремы 11.8.1 мы имеем*

$$\nu \leq m + 1 - 2b'(r^0). \quad (11.8.2)$$

Доказательство. Обозначим через $L(r^0A)$ пересечение гиперплоскостей, опорных к множеству RA в точке r^0A . Тогда $a(r^0) = a(r^0A) = \dim L(r^0A)$. Следовательно, число линейно независимых гиперплоскостей должно быть равно $m + 1 - a(r^0)$. Поскольку размерность множества меньше числа его линейно независимых элементов на единицу (линейная независимость понимается здесь в смысле определения, приведенного на стр. 469), размерность множества

опорных гиперплоскостей равна $m - a(r^0)$. Это множество содержит множество отделяющих гиперплоскостей S^0 . Следовательно,

$$\nu = \dim S^0 \leq m - a(r^0),$$

откуда в силу леммы 11.7.2. мы получаем неравенство (11.8.2).

Интересно отметить различие в доказательствах теорем 11.8.1 и 11.8.2. При доказательстве теоремы 11.8.1 используется прием подсчета, применяемый к множеству соприкосновения между RA и P_S^* ; при доказательстве же теоремы 11.8.2 подсчитывается число линейно независимых гиперплоскостей, отделяющих множества RA и P_S^* . Читатель может заинтересоваться, почему нельзя одновременно провести параллельные симметричные доказательства обеих теорем, вместо того чтобы анализировать в одном случае множество соприкосновения, а в другом изучать множество отделяющих гиперплоскостей. Эти два различных доказательства потребовались ввиду несимметричности предположения $p = n$. В связи с этим следует отметить, что ни (11.8.1), ни (11.8.2) не симметричны, поскольку в оба эти неравенства входит размерность m .

► Теорема 11.8.3. *В условиях теоремы 11.8.1, если r^0 лежит на границе множества R , то*

$$\mu \leq b(r^0) - 1, \quad (11.8.3)$$

и число существенных чистых стратегий игрока I равно в точности $b(r^0)$.

Аналогично если s^0 лежит на границе множества S , то

$$\nu \leq b(s^0) - 1, \quad (11.8.4)$$

и число существенных чистых стратегий игрока II равно точно $b(s^0)$.

Доказательство. Понятно, что при наличии неравенств (11.8.3) и (11.8.4) и леммы 11.7.2 нам достаточно установить неравенства $\mu \leq c(r^0)$ и $\nu \leq c(s^0)$. Если точка r^0 лежит на границе множества R , но точка r^0A оказывается относительно внутренней точкой множества R^0A , а h — некоторая гиперплоскость, опорная к множеству R в точке r^0 , то гиперплоскость h содержит все множество R^0 . В противном случае мы смогли бы найти точку $r^1 \in R^0$, но такую, что $r^1 \notin h$. Тогда, поскольку r^0A — относительно внутренняя точка множества R^0A , существует такая точка $r^2A \in R^0A$, что $r^0A = \alpha_1 r^1A + \alpha_2 r^2A$, где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $0 \leq \alpha_1$, $\alpha_2 \leq 1$. Ввиду

того, что ранг матрицы A равен n , мы имеем $r^0 = \alpha_1 r^1 + \alpha_2 r^2$. Следовательно,

$$0 = (h, r^0) = \alpha_1 (h, r^1) + \alpha_2 (h, r^2). \quad (11.8.5)$$

Поскольку h — опорная гиперплоскость, то $(h, r^1) \geq 0$, $(h, r^2) \geq 0$. Поэтому в силу (11.8.5) должно выполняться равенство $(h, r^1) = 0$, т. е. $r^1 \in h$.

Следовательно, пересечение $L(r^0)$ всех гиперплоскостей, опорных к множеству R в точке r^0 , содержит множество R^0 , и мы имеем

$$c(r^0) = \dim(L(r^0) \cap R) \geq \dim R^0 = \mu.$$

Аналогично можно убедиться в том, что если точка s^0 лежит на границе множества S , то пересечение $L(s^0)$ содержит все множество S^0 . Доказательство для ν проводится точно так же, как и для μ .

Если для одного из игроков (скажем, для игрока II) имеется более точная информация σ структуре его оптимальных стратегий, то некоторые из неравенств теорем 11.8.1—11.8.3 могут быть превращены в равенства. Если, например, s^0 является внутренней точкой множества S , то имеет место следующая теорема.

► Теорема 11.8.4. Если в полиномиальной игре, описанной в теореме 11.8.1, s^0 является внутренней точкой множества S , то игрок I имеет единственную оптимальную стратегию r^0 и

$$\nu = m + 1 - 2b'(r^0).$$

Доказательство. Если точка s^0 внутренняя, то s^0 оказывается гиперплоскостью, разделяющей множества P_S^* и RA и касающейся конуса P_S^* точно в вершине. Следовательно, множество RA имеет только одну общую с конусом P_S^* точку, а поскольку ранг матрицы A равен n , точка r^0 единственна.

Ввиду того, что множество RA соприкасается с конусом P_S^* только в нуле и любой достаточно малый поворот гиперплоскости s^0 около вершины конуса P_S^* оставляет эту гиперплоскость опорной к конусу P_S^* , мы видим, что размерность множества гиперплоскостей, разделяющих множества RA и P_S^* , в точности равна размерности множества всех гиперплоскостей, опорных к множеству RA в точке $r^0 A$.

Напомним, что размерность множества всех гиперплоскостей, опорных к множеству RA в точке $r^0 A$, равна $m - a(r^0)$. Таким образом,

$$\nu = m - a(r^0) = m + 1 - 2b'(r^0);$$

при этом последнее равенство имеет место в силу леммы 11.7.2.

Сохраняя одностороннее предположение $p = n$, допустим, что игрок I имеет внутреннюю оптимальную стратегию. В этом случае n должно быть строго меньше $m + 1$, и поэтому точка $r^0 A$ может оказаться на границе множества RA . Теперь мы имеем $a(r^0), c(r^0) = n$, но подстановка этих значений в леммы не приводит еще к результатам теорем 11.8.1—11.8.2. Таким образом, в то время как предположение о внутренней оптимальной стратегии для игрока с большим выбором стратегий представляет интерес, аналогичное предположение для другого игрока едва ли является ограничивающим.

Далее сформулирована еще одна теорема в том же духе.

► Теорема 11.8.5. В случае $p = n = m$, если точка s^0 оказывается внутренней и единственной, то точка r^0 также оказывается внутренней и единственной и

$$b'(r^0) = b'(s^0) = \frac{n+1}{2}.$$

Доказательство. Ввиду того, что точка s^0 внутренняя, из теоремы 11.8.4 следует, что точка r^0 единственна. Поскольку точка s^0 единственна, из теоремы 11.8.4 вытекает также, что

$$0 = v = m + 1 - 2b'(r^0).$$

Следовательно,

$$b'(r^0) = \frac{m+1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Из геометрии пространств моментов вытекает, что всякая точка, имеющая представление с $b' = (n+1)/2$, будет внутренней (см. лемму 11.7.2); следовательно, точка r^0 внутренняя. К тому же, поскольку точка s^0 также внутренняя, в силу леммы 11.7.2 имеем

$$b'(s^0) = \frac{m+1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

Следовательно,

$$b'(s^0) = \frac{n+1}{2} = b'(r^0).$$

Устойчивые оптимальные стратегии в полиномиальных играх. Стратегия, которая позволяет получать одному игроку выигрыш, независимо от действия его противника, называется *устойчивой*. Устойчивые стратегии не обязаны быть оптимальными, но если они оказываются таковыми, то их вычисление сильно упрощается. Например, стратегии ξ^0 и η^0 оказываются устойчивыми, если соответствующий выигрыш может быть представлен в виде

$$K(\xi, \eta) = P(\xi)Q(\eta)R(\xi, \eta) + c,$$

где ξ^0 — корень полинома $P(\xi)$, а η^0 — корень полинома $Q(\eta)$. Если используется одна из этих двух стратегий, то выигрыш равен c и понятно, что c оказывается значением игры.

Полиномиальная игра со значением нуль может быть интерпретирована следующим образом. Если игрок I имеет устойчивую оптимальную стратегию $\mathbf{r}^0$, то $(\mathbf{r}^0 \mathbf{A}, \mathbf{s}) = 0$ для всех $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$; следовательно, $\mathbf{r}^0 \mathbf{A} = (0, 0, \dots, 0)$, и начало координат лежит внутри множества $R\mathbf{A}$. Если игрок II имеет устойчивую оптимальную стратегию $\mathbf{s}^0$, то $(\mathbf{r} \mathbf{A}, \mathbf{s}^0)$ для всех $\mathbf{r} \in R$. Следовательно, гиперплоскость, опорная к конусу P_S^* и соответствующая точке $\mathbf{s}^0$, содержит все множество $R\mathbf{A}$.

Если для одного из игроков существует внутреннее решение, то все оптимальные стратегии его противника должны быть устойчивыми. Действительно, если $\mathbf{r}^0$ — внутренняя оптимальная стратегия, то точка $\mathbf{r}^0$ может быть реализована в виде смешанной стратегии $x(\xi)$, в которой каждая чистая стратегия ξ появляется с положительным весом (лемма 11.7.1). Следовательно, если $\mathbf{s}^0$ — оптимальная стратегия другого игрока, то $(\mathbf{r}^0 \mathbf{A}, \mathbf{s}^0) = 0$, и любой элемент выпуклой комбинации, представляющий точку $\mathbf{r}^0 \mathbf{A}$, дает неположительный выигрыш. Ввиду того, что выпуклая сумма таких выигрышей должна быть равна нулю, каждый из них должен быть нулем, в частности $(\mathbf{r} \mathbf{A}, \mathbf{s}^0) = 0$. Обратное неверно; если все оптимальные стратегии одного из игроков являются устойчивыми, то отсюда еще не следует, что другой игрок имеет внутреннюю оптимальную стратегию. (Рассмотреть в качестве примера $K(\xi, \eta) = \xi\eta - \xi^2$.) В этом отношении полиномиальные игры отличаются от конечных матричных игр. В конечных играх лишь применение существенных чистых стратегий дает выигрыш, равный значению игры при любой противостоящей оптимальной стратегии (теорема 3.1.1).

11.9. Задачи.

1. Используя метод отображения, решить игру с матрицей

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

при дополнительных ограничениях $\eta_3 \geq 4/15$ и $\eta_1 \leq 1/5$, не считая ограничений, общих для всех матричных игр.

2. Используя метод отображения, решить игру с вырожденным ядром

$$K(\xi, \eta) = 3 \cos 7\xi \cos 8\eta + 5 \cos 7\xi \sin 8\eta + 2 \sin 7\xi \cos 8\eta + \sin 7\xi \sin 8\eta.$$

3. Решить вырожденную игру с ядром

$$K(\xi, \eta) = \xi(1 - \xi^2) \sin \pi \eta,$$

где $0 \leq \xi, \eta \leq 1$.

4. Пусть $K(\xi, \eta) = \xi^2\eta - \xi\eta^2$. Найти значение игры и по две оптимальные стратегии каждого из игроков.

5. Найти значение игры и пару оптимальных стратегий для каждого из следующих ядер:

$$(a) \quad \xi\eta^2 - 3\xi\eta - \xi + 2\eta,$$

$$(б) \quad \xi^3\eta - \eta^2.$$

6. Найти все решения для игры с ядром $K(\xi, \eta) = \xi^3\eta - \eta^2$.

7. Найти по крайней мере две оптимальные стратегии игрока I во втором примере из п. 11.2.

8. В игре с ядром

$$K(\xi, \eta) = 2\xi + 3\xi^2 + 3\eta - 3\xi\eta - \frac{9}{2}\xi^2\eta + 4\eta^2 - 4\xi\eta^2 - 6\xi^2\eta^2;$$

найти для каждого игрока по крайней мере одну устойчивую стратегию.

9. Используя метод отображения из п. 11.2, найти три первых момента оптимальных стратегий в игре с ядром

$$K(\xi, \eta) = 21\xi + 18\xi^2 - 24\xi^3 - 16\eta - 36\xi\eta - 9\xi^2\eta + 18\xi^3\eta + 60\eta^2 - 36\eta^3.$$

10. Найти пару оптимальных распределений $x(\xi)$ и $y(\eta)$ в задаче 9.

11. Рассмотрим полиномиальную игру с ядром $K(\xi, \eta) = \xi\eta - \xi^2$. Показать, что оба игрока имеют единственные чистые стратегии, сосредоточенные соответственно в точках $\xi = 0$ и $\eta = 0$. Показать также, что в игре с измененным ядром $K_\epsilon(\xi, \eta) = \xi\eta - \xi^2 - \epsilon\xi$ ($\epsilon > 0$) оптимальные стратегии уже не единственны.

12. Доказать, что малое изменение ядра любой конечной выпуклой игры (не обязательно полиэдральной) сохраняет единственность оптимальных внутренних стратегий обоих игроков.

13. Показать, что если C — некоторое замкнутое ограниченное множество в пространстве E^n , то выпуклая оболочка множества C также замкнута и ограничена.

14. Найти сопряженный конус P^* для выпуклого конуса P , состоящего из всех векторов $(x_1, \dots, x_n)$, компоненты которых удовлетворяют неравенствам $x_1 \geq 0$ и

$$x_1^2 \geq \sum_{k=2}^n x_k^2$$

(см. п. 11.6).

15. Пусть Γ — конечная выпуклая игра с многогранными выпуклыми множествами стратегий R и S . Пусть размерности множеств R^0 и S^0 оптимальных стратегий игроков I и II равны соответственно μ и ν , а размерности наименьших многогранных граней множеств R и S , содержащих R^0 и S^0 , равны k и l . Показать, что

$$k - \mu = l - \nu.$$

16. Обозначим через Γ конечную выпуклую игру с многогранными выпуклыми пространствами стратегий. Показать, что если оба игрока имеют единственные стратегии, то эта единственность не нарушается при достаточно малом изменении функции выигрыша.

17. Пусть $\mathbf{r}^0$ и $\mathbf{s}^0$ — внутренние точки n -мерного пространства моментов D^n , а v — любое число. Построить матрицу $\mathbf{A}$, обладающую тем свойством, что $\mathbf{A}\mathbf{s}^0 = (v, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{r}^0\mathbf{A} = (v, 0, \dots, 0)$. Показать, что точки $\mathbf{r}^0$ и $\mathbf{s}^0$ оказываются единственными оптимальными стратегиями для игры с матрицей $\mathbf{A}$. (Этот пример иллюстрирует теорему 11.8.5.)

18. Рассмотрим множество непрерывных функций $h_0(\xi), h_1(\xi), \dots, h_n(\xi)$, определенных на интервале $0 \leq \xi \leq 1$ и удовлетворяющих условию

$$\left\| \begin{array}{cccc} h_0(\xi_1) & h_1(\xi_1) & \dots & h_n(\xi_1) \\ h_0(\xi_2) & h_1(\xi_2) & \dots & h_n(\xi_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0(\xi_{n+1}) & h_1(\xi_{n+1}) & \dots & h_n(\xi_{n+1}) \end{array} \right\| \neq 0$$

всякий раз, когда $0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{n+1} \leq 1$. Показать, что существует распределение x , которое максимизирует

$$\int_0^1 h_0(\xi) dx(\xi)$$

при условиях

$$\int_0^1 h_i(\xi) dx(\xi) = a_i.$$

Спектр максимизирующего распределения имеет не более чем $(n+1)/2$ точек, причем точкам 0 и 1 приписан вес $1/2$. (Предполагается, что множество ограничений не пусто.)

Комментарии и библиография к главе 11

11.1. На заре развития теории бесконечных игр считали, что решение полиномиальных игр позволит далеко продвинуться в анализе всех бесконечных игр. Эта надежда была быстро утрачена. Вскоре были построены полиномиальные игры (высокой степени), решения которых оказались настолько сложными, что с трудом удавалось описать их качественно, не говоря уже о вычислении. Кроме того, медленная сходимость полиномов к непрерывным ядрам означала, что полиномиальные игры непрактичны в качестве приближений к непрерывным играм. Тем не менее желание решать полиномиальные игры позволило достигнуть некоторых успехов в исследовании вырожденных игр, которые являются более общими и важными. Среди первых, кто изучал отдельные частные случаи вырожденных и полиномиальных игр, были Хельмер [1] и Дрешер [3].

11.2. Численный метод неподвижной точки для решения вручную конечных выпуклых игр был впервые предложен Дрешером.

11.3. Уточнение теорем о структуре множеств решений конечных многогранных игр, основанное на методе неподвижной точки, было предложено Дрешером и Карлином [1]. Различные применения метода неподвижной точки можно найти во многих работах. Для ознакомления с ними читатель может обратиться, например, к книгам Мак-Кинси [1] и Дрешера [3].

11.4. Теория выпуклых конусов является классической, и литература по этим вопросам обширна (см. Фенхель [1]). Связь теории выпуклых сопряженных конусов с вырожденными играми была развита Дрешером, Карлином и Шепли [1]. Гейл и Шерман [1] независимо от предыдущей работы указали на важность теории многогранных выпуклых конусов при анализе конечных дискретных игр.

Теория сопряженных конусов более интенсивно использовалась в теории линейного и нелинейного программирования (см. гл. 5—7). Следует еще раз подчеркнуть, что в случае линейного программирования рассматриваемые конусы оказывались многогранными, в то время как в вырожденных конечных играх, изученных в этой главе, мы имеем дело с произвольными замкнутыми выпуклыми конусами, структура которых сложнее и которые труднее охарактеризовать.

Одним частным и важным классом конусов является класс, образованный из пространств обобщенных моментов. Многое о структуре границы конуса моментов может быть выражено в простом и изящном аналитическом виде. Геометрия пространств моментов изучена Карлином и Шепли [2]. Изложенное здесь является примером того, как теория игр входит в соприкосновение с теориями, развитыми на почве чистой математики. При попытках решения полиномиальных игр в этой работе была вскрыта необходимость тщательного и детального изучения структуры границ пространств моментов, что привело к широкому изучению пространств моментов, которые исследуются и независимо от теории игр.

11.5. Приведенное здесь описание полиномиальных и вырожденных игр заимствовано из работы Дрешера, Карлина и Шепли [1]. Анализ таких игр зависит от полноты информации о свойствах компонент границы пространств моментов. Знание этих свойств дает нам возможность получить наряду с точным описанием размерностей множеств решений для полиномиальной игры и минимальные размеры спектра решения. Для дискретных игр можно получить даже более точные результаты, но это оказывается возможным благодаря относительной простоте строения класса всех многогранных конусов.

Гейл и Гросс [1] показали, как построить полиномиальную игру, единственными решениями которой являются любые наперед заданные распределения конечного типа.

11.6 и 11.7. Результаты этих пунктов основаны на работе Карлина и Шепли [2].

11. 8. Этот пункт является развитием работы Дрешера, Карлина и Шепли [1].

ИГРЫ С ВЫПУКЛЫМИ И ОБОБЩЕННО-ВЫПУКЛЫМИ ЯДРАМИ

12.1. Введение. В общем случае анализ непрерывных игр, определяемых ядром $K(\xi, \eta)$, заданным на единичном квадрате, весьма сложен. Однако часто природа описываемой игрой модели накладывает дополнительные ограничения типа монотонности. Одним из таких условий является следующее: мы говорим, что игра, определяемая ядром K , является *обобщенно-выпуклой*, если существует такое целое $n > 0$, что

$$\frac{\partial^n K(\xi, \eta)}{\partial \eta^n} \geq 0 \quad (0 \leq \xi, \eta \leq 1), \quad (12.1.1)$$

или существует такое целое $m > 0$, что

$$\frac{\partial^m K(\xi, \eta)}{\partial \xi^m} \leq 0 \quad (0 \leq \xi, \eta \leq 1). \quad (12.1.2)$$

Предположение о наличии у ядра K достаточного числа непрерывных производных, содержащееся в соотношениях (12.1.1) и (12.1.2), сделано для удобства изложения и позволяет избежать более детального и скучного рассмотрения различных случаев. Основные результаты и методы их получения в действительности не зависят от того, используем ли мы дифференциальное условие (12.1.1) или соответствующее ему разностное неравенство. В последующем изложении мы ограничиваемся всюду играми, удовлетворяющими неравенству (12.1.1). Доказательства, необходимые для получения соответствующих результатов для ядер, удовлетворяющих неравенству (12.1.2), мы оставляем в качестве упражнения читателю.

Любое ядро, являющееся полиномом по η степени не выше $n - 1$, удовлетворяет, очевидно, неравенству (12.1.1). Однако результаты для обобщенно-выпуклых игр являются менее тонкими, чем результаты, полученные при непосредственном анализе полиномиальных игр. Тем не менее само по себе предположение (12.1.1) дает существенную информацию о виде оптимальных стратегий для обобщенно-выпуклых игр.

Случаи $n = 1$ и $n = 2$ играют важную роль как с теоретической, так и с практической точек зрения; ясно, что они к тому же и

более просты для анализа. Мы начнем с рассмотрения случая $n = 1$. В следующем пункте мы изучим случай $n = 2$.

Из неравенства (12.1.1) в случае $n = 1$ мы заключаем, что ядро $K(\xi, \eta)$ является монотонно возрастающей функцией по η при всех ξ . Поскольку игрок II стремится минимизировать выигрыш игрока I, он попытается минимизировать $K(\xi, \eta)$ для каждого ξ . Выбирая чистую стратегию y_0 , сосредоточенную в точке $\eta = 0$, игрок II сделает функцию $K(\xi, \eta)$ настолько малой, насколько это возможно независимо от выбора ξ . Другими словами, у игрока II нет причин рассматривать другие значения η , поскольку при любой фиксированной стратегии ξ чистая стратегия $\eta = 0$ дает наилучший для него исход. Игрок I, понимая, что игрок II будет выбирать $\eta = 0$, выберет чистую стратегию x_{ξ_0} , удовлетворяющую условию $K(\xi_0, 0) = \max_{\xi} K(\xi, 0)$. Отсюда сразу видно, что пара чистых стратегий ξ_0 и 0 соответственно игроков I и II является седловой точкой для ядра $K(\xi, \eta)$. Значение игры есть $v = \max_{\xi} K(\xi, 0)$.

Заметим, что мы воспользовались только требованием монотонности ядра $K(\xi, \eta)$ по η ; условия гладкости, т. е. существование производных, здесь несущественны. Однако условие непрерывности ядра — или, вообще говоря, тот факт, что $\sup_{\xi} K(\xi, 0)$ достигается, — является необходимым для обеспечения существования оптимальных стратегий.

12.2. Непрерывные выпуклые игры. Из неравенства (12.1.1) при $n = 2$ следует, что ядро $K(\xi, \eta)$ является выпуклой функцией от η при всех значениях ξ . При анализе таких ядер мы снова можем отказаться от предположения о дифференцируемости, поскольку выпуклость функции можно определить и независимо от этого предположения. Необходимо потребовать только, чтобы ядро $K(\xi, \eta)$ было выпуклым по η при всех ξ и непрерывным по совокупности двух переменных ξ и η (обычное требование). Всюду в этом пункте мы будем предполагать, что эти требования выполнены. Кроме того, мы можем обобщить наши результаты на случай, когда переменная ξ принимает значения из произвольного компактного множества.

Наш подход к таким играм напоминает анализ $m \times 2$ -игр из п. 2.3. Ядро $m \times 2$ -матричной игры можно рассматривать, по существу, как билинейную функцию $K(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}, \eta) = K(\xi, \eta)$, где η пробегает единичный интервал, а $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{m-1})$ удовлетворяет условиям $\xi_i \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i \leq 1.$$

а функция K оказывается выпуклой (на самом деле линейной) по η при всех $\xi \in \Delta$. Следовательно, правдоподобно предположить, что обобщение анализа $m \times 2$ -матричных игр может привести к тем или иным результатам для выпуклых непрерывных игр. Развивая эту аналогию, введем в рассмотрение семейство выпуклых функций $\varphi_\xi(\eta) = K(\xi, \eta)$, где ξ — некоторый параметр, и построим

$$\varphi(\eta) = \max_{0 \leq \xi \leq 1} K(\xi, \eta).$$

В силу свойства IV, приведенного в приложении Б.4, когда η пробегает единичный интервал, функция $\varphi(\eta)$ является непрерывной выпуклой функцией от η . Следовательно, функция $\varphi(\eta)$ где-то достигает минимума. Обозначим через η_0 любую точку, в которой это минимальное значение принимается. Мы докажем, что стратегия u_{η_0} для игрока II оптимальна, а значение игры равно $\varphi(\eta_0)$.

Доказательство этого утверждения является точным аналогом построений из п. 2.3. Стоит лишь найти оптимальную стратегию η , как мы определим два значения ξ , надлежащая комбинация которых даст оптимальную стратегию игрока I. Этот процесс точно описывается в следующей лемме.

► Лемма 12.2.1. Если функция $K(\xi, \eta)$, определенная на единичном квадрате, непрерывна по совокупности двух переменных ξ и η и выпукла по η при каждом ξ , то в некоторой точке η_0 достигается значение функции φ , равное $\inf_{\eta} \sup_{\xi} K(\xi, \eta)$.

Кроме того, для любой точки η_0 , в которой достигается точная нижняя граница, мы можем найти такие ξ_1 и ξ_2 , что

$$\begin{aligned} K(\xi_1, \eta) &\geq K(\xi_1, \eta_0) = \varphi(\eta_0) \quad (\eta \geq \eta_0), \\ K(\xi_2, \eta) &\geq K(\xi_2, \eta_0) = \varphi(\eta_0) \quad (\eta \leq \eta_0). \end{aligned} \quad (12.2.1)$$

Если $\eta_0 = 0$ или $\eta_0 = 1$, то справедливым будет только одно из этих неравенств.

Доказательство. Достаточно установить лишь вторую половину леммы. При этом мы дадим доказательство только для того случая, когда точка η_0 является внутренней. Пусть

$$T \equiv \{\xi_\alpha \mid K(\xi_\alpha, \eta_0) = \varphi(\eta_0)\}.$$

Обозначим через $t_\alpha(\eta)$ правую касательную¹⁾ к $K(\xi_\alpha, \eta)$ в точке $\eta = \eta_0$, а через r_α ее угловой коэффициент. Ясно, что множество T компактно, а соответствующее множество вещественных чисел $\{r_\alpha\}$

¹⁾ При фиксированном ξ_α ядро $K(\xi_\alpha, \eta)$ определяет некоторую кривую. — Прим. перев.

достигает максимума. Далее, $\max_{\alpha} r_{\alpha} \geq 0$, поскольку в противном случае неравенство $r_{\alpha} \leq \delta < 0$ выполнялось бы равномерно по α , что противоречит предположению $\varphi(\eta_0) = \min \varphi(\eta)$. Выберем теперь некоторое $\xi_1 = \xi_{\alpha}$, для которого $r_{\alpha} \geq 0$. Ввиду того что выпуклая функция расположена всегда выше своей касательной, для каждого $\eta > \eta_0$ мы имеем

$$K(\xi_1, \eta) \geq t_{\alpha}(\eta) \geq \varphi(\eta_0).$$

Точка ξ_1 , удовлетворяющая второму из неравенств (12.2.1), строится аналогично с использованием левых касательных.

Нахождение оптимальных стратегий для выпуклых непрерывных игр. Для того чтобы применить результаты только что доказанной леммы к непрерывным играм интересующего нас типа, мы рассмотрим три случая.

(а) Если η_0 — внутренняя точка, то существуют точки ξ_1 и ξ_2 (не обязательно различные), удовлетворяющие обоим неравенствам (12.2.1). Обозначим через $t_1(\eta)$ правую касательную к кривой $K(\xi_1, \eta)$ в точке $\eta = \eta_0$, а через $t_2(\eta)$ левую касательную к кривой $K(\xi_2, \eta)$ в точке $\eta = \eta_0$. Если через r_1 и r_2 обозначить угловые коэффициенты этих касательных, то $r_1 \geq 0$ и $r_2 \leq 0$. Следовательно, мы можем выбрать $\alpha \in [0, 1]$ так, что

$$\alpha t_1(\eta) + (1 - \alpha) t_2(\eta) = \varphi(\eta_0).$$

Положим $x_0(\xi) = \alpha x_{\xi_1} + (1 - \alpha) x_{\xi_2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int K(\xi, \eta) dx_0(\xi) &= \alpha K(\xi_1, \eta) + (1 - \alpha) K(\xi_2, \eta) \geq \\ &\geq \alpha t_1(\eta) + (1 - \alpha) t_2(\eta) = \varphi(\eta_0), \end{aligned}$$

поскольку всякая выпуклая функция всегда лежит выше своей касательной. В силу последнего уравнения, $v > \varphi(\eta_0)$.

С другой стороны,

$$\int K(\xi, \eta) dy_{\eta_0}(\eta) = K(\xi, \eta_0) \leq \sup_{\xi} K(\xi, \eta_0) = \varphi(\eta_0). \quad (12.2.2)$$

Поэтому $v \leq \varphi(\eta_0)$. Следовательно, $v = \varphi(\eta_0)$, и $\{x_0(\xi), y_{\eta_0}(\eta)\}$ — седловая точка в рассматриваемой игре.

(б) Если $\eta_0 = 0$, то точку ξ_1 мы выбираем так, чтобы

$$K(\xi_1, \eta) \geq K(\xi_1, \eta_0) = \varphi(\eta_0).$$

Положим $x(\xi) = x_{\xi_1}$; тогда

$$\int K(\xi, \eta) dx_{\xi_1}(\xi) = K(\xi_1, \eta) \geq \varphi(\eta_0).$$

Неравенство (12.2.2) все еще справедливо; следовательно, $v = \varphi(\eta_0)$ и $\{x(\xi), y_{\eta_0}(\eta)\}$ — снова седловая точка.

(в) Если $\eta_0 = 1$, то мы выбираем ξ_2 и поступаем далее, как в случае (б). Во всех этих случаях игрок I имеет оптимальную стратегию, являющуюся смесью не более чем двух чистых, а у игрока II имеется оптимальная чистая стратегия.

Может случиться, что для каждой фиксированной точки η функция $K(\xi, \eta)$ окажется выпуклой и по ξ . Тогда

$$K(\xi, \eta) \leq \xi K(1, \eta) + (1 - \xi) K(0, \eta) \leq \max \{K(1, \eta), K(0, \eta)\}.$$

Отсюда следует, что $\sup_{\xi} K(\xi, \eta) = \max \{K(1, \eta), K(0, \eta)\}$. Поэтому достаточно начертить эти две кривые и найти минимальную точку их огибающей. Если минимальной будет одна из концевых точек, то эта концевая точка и будет оптимальной чистой стратегией. Если минимум окажется во внутренней точке, то оптимальной стратегией игрока I будет некоторая выпуклая комбинация точек x_{ξ} , где $\xi = 0$ и $\xi = 1$ (см. пример ниже).

Если ядро $K(\xi, \eta)$ выпукло по η и вогнуто по ξ для каждого η , то игрок I имеет оптимальную чистую стратегию x_{ξ_0} , соответствующую точке ξ_0 , в которой достигается $\max_{\xi} \min_{\eta} K(\xi, \eta)$.

Пример. Следующий пример является частным случаем модели, описанной в п. 10.3.

Мы предполагаем, что перед игроком II стоит задача защиты двух городов A и B от игрока I. Мы предполагаем, что в каждом городе потери игрока II пропорциональны разности сил атакующего и защищающего, если атакующие силы больше сил защиты; но если силы атакующего меньше, то игрок II потерь не несет вообще. Кроме того, потери в городе B в λ раз „чувствительнее“ потерь в городе A. Предположим далее, что суммарные силы каждого игрока равны 1. Если чистые стратегии ξ и η отождествить с долей сил соответственно игроков I и II, направляемых в город A, то выигрыш игрока I примет вид

$$K(\xi, \eta) = \max \{\xi - \eta, \lambda(1 - \xi - 1 + \eta)\} = \max \{\xi - \eta, \lambda(\eta - \xi)\},$$

и функция $K(\xi, \eta)$ оказывается выпуклой по каждой переменной. Кроме того, $K(0, \eta) = \lambda\eta$ и $K(1, \eta) = 1 - \eta$. Эти две прямые пересекаются в точке $\eta_0 = 1/(1 + \lambda)$; поэтому, произведя соответствующее построение, как описано выше, мы получим оптимальные стратегии вида

$$x^*(\xi) = \frac{1}{1 + \lambda} x_0(\xi) + \frac{\lambda}{1 + \lambda} x_1(\xi) \quad \text{и} \quad y^*(\eta) = y_{1/(1 + \lambda)}(\eta)$$

(чистая стратегия x_1 соответствует атаке города A).

Таким образом, защитник должен разделить свои силы между городами A и B в отношении $1:\lambda$. Атакующему всегда следует атаковать город всеми имеющимися в распоряжении силами, рандомизируя свои атаки в отношении $\lambda:1$. Интересно, что для игрока II стратегия

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} y_0(\eta) + \frac{1}{1+\lambda} y_1(\eta)$$

также оптимальна, в то время как игрок I аналогичной чистой оптимальной стратегии не имеет.

12.3*. Обобщенно-выпуклые игры. Распространение теории выпуклых непрерывных игр на обобщенно-выпуклые игры показывает, что такие игры обладают оптимальными стратегиями конечного типа. К сожалению, в общем случае это утверждение не является конструктивным, т. е. не удастся показать, как находить эти оптимальные стратегии.

Далее мы всюду будем предполагать, что в обобщенно-выпуклых играх переменная ξ пробегает связное компактное множество S . Основная теорема для обобщенно-выпуклых игр состоит в следующем.

► Теорема 12.3.1. Если для некоторого $n > 0$

$$\frac{\partial^n K(\xi, \eta)}{\partial \eta^n} \geq 0,$$

то в оптимальную стратегию игрока I входят с положительной вероятностью не более чем n чистых стратегий, а в оптимальную стратегию игрока II не более чем $n/2$ чистых стратегий, причем каждая чистая стратегия η , внутренняя для единичного интервала, засчитывается за единицу, а концевые точки $\eta=0$ и $\eta=1$ — за половину.

Доказательство. Простоты ради, будем предполагать, что $v=0$. Этого можно достигнуть вычитанием из K соответствующей константы.

(а) Достаточно доказать теорему для случая

$$\frac{\partial^n K(\xi, \eta)}{\partial \eta^n} > 0.$$

Действительно, если теорема справедлива для таких игр и

$$\frac{\partial^n K(\xi, \eta)}{\partial \eta^n} \geq 0,$$

то мы можем легко найти такую последовательность игр с ядрами $K^{(m)}(\xi, \eta)$, равномерно сходящуюся к $K(\xi, \eta)$, что

$$\frac{\partial^n K^{(m)}(\xi, \eta)}{\partial \eta^n} > 0.$$

По предположению, в этих играх оптимальные стратегии игрока I имеют вид

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^{(m)} x_{\xi_k}^{(m)}.$$

Мы можем найти такую подпоследовательность индексов, что соответствующие подпоследовательности последовательностей $\alpha_k^{(m)}, \xi_k^{(m)}$ сходятся при каждом k , и их предельные точки α_k, ξ_k все еще удовлетворяют условиям $\xi_k \in C, 0 \leq \alpha_k \leq 1, \sum \alpha_k = 1$. Непосредственно можно проверить, что смесь

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_{\xi_k}$$

является оптимальной стратегией игрока I в игре с ядром $K(\xi, \eta)$. Та же аргументация применима и к игроку II.

В силу только что сказанного мы будем всюду в этом пункте считать, что

$$\frac{\partial^n K(\xi, \eta)}{\partial \eta^n} > 0$$

для $\xi \in C, 0 \leq \eta \leq 1$.

(б) Докажем теперь, что в оптимальной стратегии игрока II используется не более $n/2$ чистых. Пусть $x^*(\xi)$ — оптимальная стратегия игрока I. Положив

$$h(\eta) = \int K(\xi, \eta) dx^*(\xi),$$

мы получим $d^n h(\eta)/d\eta^n > 0$.

Функция $h(\eta)$ в единичном интервале может обращаться в нуль не более n раз (корень кратности r засчитывается за r корней). Тогда если через m обозначить число корней функции $h(\eta)$, учитывая их кратность, то $h'(\eta)$ обращается в нуль по крайней мере $m-1$ раз, $h''(\eta)$ — по крайней мере $m-2$ раз и т. д., наконец, $h^{(n)}(\eta)$ обращается в нуль по крайней мере $m-n$ раз. Ввиду того что $h^{(n)}(\eta) > 0$, имеет место неравенство $m \leq n$. Кроме того, поскольку стратегия $x^*(\xi)$ оптимальна и $v=0$, мы заключаем, что в единичном интервале $h(\eta) \geq 0$. Следовательно, любой внутренний корень должен быть корнем четной кратности. Отсюда вытекает, что максимально возможное число различных корней равно $n/2$ (при условии, что концевые точки засчитываются за половину каждая).

Пусть, далее, y^* — оптимальная стратегия игрока II. Тогда

$$\int h(\eta) dy^*(\eta) = \int \int K(\xi, \eta) dx^*(\xi) dy^*(\eta) = v = 0.$$

Поскольку функция $h(\eta)$ неотрицательна, стратегия u^* должна иметь сосредоточенную массу только в тех точках, в которых обращается в нуль функция $h(\eta)$, а таких точек не более чем $n/2$.

(в) Спектр оптимальной стратегии игрока I состоит не более чем из n точек. Для доказательства этого утверждения докажем следующую лемму.

► Лемма 12.3.1. Если в единичном интервале функция $h(\eta)$ удовлетворяет условиям $h(\eta) \geq 0$ и $h^{(n)}(\eta) > 0$, то существует некоторый полином $P \geq 0$ степени не выше $n - 1$, для которого разность $h(\eta) - P(\eta)$ во всем единичном интервале неотрицательна и имеет ровно n корней (учитывая их кратность).

Доказательство. Мы уже знаем, что функция $h(\eta)$ может иметь не более чем n корней. Если она имеет точно n корней, то мы полагаем $P(\eta) \equiv 0$. Если же она имеет менее чем n корней, то полином $P(\eta)$ конструируется следующим образом. Пусть η_i — корни функции $h(\eta)$; обозначим через $Q_0(\eta)$ полином, корни которого совпадают с корнями функции $h(\eta)$ (с учетом кратности). Тогда степень полинома $Q_0(\eta)$ не выше $n - 1$, $Q_0 \geq 0$ и $Q_0^{(n)}(\eta) = 0$. Кроме того, если r_i — кратность корня η_i , то

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta_i} \frac{h(\eta)}{Q_0(\eta)} = \lim_{\eta \rightarrow \eta_i} \frac{h^{(r_i)}(\eta)}{Q_0^{(r_i)}(\eta)} = \delta_i > 0.$$

Следовательно, мы можем найти открытые множества E_i , содержащие корни η_i , внутри которых

$$\frac{h(\eta)}{Q_0(\eta)} \geq \frac{\delta_i}{2}.$$

Оставшаяся часть единичного интервала является компактным множеством; а так как h/Q_0 есть отношение двух непрерывных не обращающихся в нуль функций, эта дробь достигает там своего минимума δ_0 . Отсюда следует, что для $\epsilon \leq \min(\delta_0, \delta_i/2)$ мы имеем неравенство

$$h(\eta) - \epsilon Q_0(\eta) \geq 0. \quad (12.3.1)$$

Обозначим через ϵ_0 точную верхнюю границу всех тех ϵ , для которых выполняется неравенство (12.3.1). Тогда функция $h(\eta) - \epsilon_0 Q_0(\eta)$ будет иметь по крайней мере на один корень больше. В противном случае разность $h(\eta) - \epsilon_0 Q_0(\eta)$ должна была бы удовлетворять всем тем условиям, которым удовлетворяет функция $h(\eta)$, и мы смогли бы найти такое $\epsilon' > 0$, что

$$[h(\eta) - \epsilon_0 Q_0(\eta)] - \epsilon' Q_0(\eta) \geq 0.$$

Это неравенство противоречит предположению о том, что ϵ_0 является точной верхней границей допустимых значений числа ϵ . Следовательно, либо мы имеем хотя бы один новый корень, либо же кратность одного из ранее имевшихся корней должна возрасти.

Функция $h - \epsilon_0 Q_0 \geq 0$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial^n}{\partial \eta^n} (h - \epsilon_0 Q_0) > 0.$$

Мы можем продолжать этот процесс до тех пор, пока не получим полинома

$$P(\eta) = \sum_k \epsilon_k Q_k(\eta),$$

удовлетворяющего условиям леммы.

► Следствие 12.3.1. Если $\eta_1, \dots, \eta_n$ — корни функции $h(\eta) - P(\eta)$, то $P(\eta)$ — единственный полином степени не выше $n - 1$, который удовлетворяет условиям леммы 12.3.1 с фиксированным множеством корней.

В самом деле, если бы существовал другой полином, для которого разность $h(\eta) - R(\eta)$ имела бы корни $\eta_1, \dots, \eta_n$, то разность $P(\eta) - R(\eta)$ была бы полиномом степени не выше $n - 1$ и имела бы n корней $\eta_1, \dots, \eta_n$, а следовательно, выполнялось бы соотношение $P(\eta) - R(\eta) \equiv 0$.

Возвращаясь к доказательству теоремы 12.3.1, положим

$$h(\eta) = \int K(\xi, \eta) dx^*(\xi)$$

и построим полином P , удовлетворяющий условиям предыдущей леммы. Снова через $\eta_1, \dots, \eta_n$ обозначим n корней разности $h(\eta) - P(\eta)$ и введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_\xi(\eta) = K(\xi, \eta) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\xi) \eta^i, \quad (12.3.2)$$

где коэффициенты $a_i(\xi)$ определены так, что корни функции $\varphi_\xi(\eta)$ суть числа $\eta_1, \dots, \eta_n$, взятые с соответствующей кратностью. Ввиду того что каждый внутренний корень разности $h(\eta) - P(\eta)$ является корнем четной кратности, функция $\varphi_\xi(\eta)$ для каждого ξ либо неположительна, либо неотрицательна. Кроме того, функция $\varphi_\xi(\eta)$ либо неотрицательна, либо неположительна и для каждого η . Для того чтобы доказать это утверждение, мы предположим обратное. Но тогда существует число $\eta \neq \eta_i$, для которого можно найти такую пару чисел ξ_1, ξ_2 , что $\varphi_{\xi_1}(\eta) > 0$ и $\varphi_{\xi_2}(\eta) < 0$. Но поскольку функ-

ции $a_i(\xi)$ непрерывны, должно существовать такое число ξ_0 , что $\varphi_{\xi_0}(\eta) = 0$, и в этом случае функция $\varphi_{\xi_0}(\eta)$ имела бы больше корней, чем это было определено выше. Следовательно, либо

$$K(\xi, \eta) \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\xi) \eta^i \quad (\text{для всех } \xi, \eta \in [0, 1]),$$

либо

$$K(\xi, \eta) \leq \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\xi) \eta^i \quad (\text{для всех } \xi, \eta \in [0, 1]).$$

Если мы проинтегрируем неравенство (12.3.2) по функции $x^*(\xi)$, то функция

$$h(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta^i \int a_i(\xi) dx^*(\xi) \quad (12.3.3)$$

всегда будет иметь один и тот же знак, и ее корни с учетом их кратности совпадут с числами $\eta_1, \dots, \eta_n$. Поскольку степень полинома

$$R(\eta) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta^i \int a_i(\xi) dx^*(\xi)$$

равна $n - 1$, мы в силу следствия 12.3.1 заключаем, что полином $R(\eta)$ должен совпадать с $P(\eta)$. Следовательно, разность (12.3.3) неотрицательна и поэтому

$$K(\xi, \eta) \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\xi) \eta^i.$$

Если мы положим $L(\xi, \eta) = \sum a_i(\xi) \eta^i$, то функция $L(\xi, \eta)$ будет ядром вырожденной игры. Покажем, что если стратегии x^* и y^* оптимальны в игре с ядром $K(\xi, \eta)$, то они оптимальны и в игре с ядром $L(\xi, \eta)$, а $v(L) = 0$ (через $v(L)$ обозначено значение игры с ядром $L(\xi, \eta)$).

Поскольку $v(K) = 0$ и стратегия y^* оптимальна, мы имеем

$$0 \geq \int K(\xi, \eta) dy^*(\eta) \geq \int L(\xi, \eta) dy^*(\eta).$$

Таким образом, игрок II в игре с ядром L может помешать игроку получить больше нуля; поэтому $v(L) \leq 0$. С другой стороны,

$$\int L(\xi, \eta) dx^*(\xi) = \sum \int a_i(\xi) \eta^i dx^*(\xi) = R(\eta) \geq 0.$$

Следовательно, $v(L) \geq 0$, откуда следует, что $v(L) = 0$.

Из теоремы 11.5.1 нам известно, что вырожденная игра с ядром L имеет некоторую оптимальную стратегию $x_0(\xi)$, использующую не

более n точек $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда

$$\int K(\xi, \eta) dx_0(\xi) \geq \int L(\xi, \eta) dx_0(\xi) \geq 0.$$

Поэтому стратегия $x_0(\xi)$ оптимальна также и для игры с ядром $K(\xi, \eta)$; тем самым теорема доказана.

12.4. Игры с выпуклой функцией выигрыша в E^n . Пусть функция $K(\xi, \eta)$ определена для всех η из некоторого выпуклого компактного множества $S \subset E^n$ и для всех ξ из некоторого компактного множества R . Предположим, что функция $K(\xi, \eta)$ непрерывна по совокупности переменных ξ и η и выпукла по η при всех ξ (см. приложение Б.4). Рассмотрим игру с ядром $K(\xi, \eta)$ и пространствами смешанных стратегий X и Y , состоящими из всех распределений соответственно на R и на S . Попытаемся охарактеризовать и найти оптимальные стратегии в игре.

Игры такого типа представляют как практический, так и теоретический интерес, потому что многие проблемы, возникающие в практике, сводятся к играм с ядрами $K(\xi, \eta)$, которые выпуклы по одной или по обоим переменным. Мы проиллюстрируем это на примере, который уже приводился в п. 10.3. Там мы интерпретировали игру в терминах нападения и защиты; здесь, для того чтобы подчеркнуть гибкость теории игр и широту круга возможных интерпретаций игровых проблем, мы опишем тот же самый пример уже в терминах некоторой политической кампании (см. также п. 4.4).

Партия II желает сохранить свои предыдущие избирательные списки в n округах, где обычно она собирала большинство голосов. Эти n избирательных округов $T_1, \dots, T_n$ имеют различную „ценность“ соответственно $k_1, \dots, k_n$; нумерация произведена так, что $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n > 0$. Это означает, что T_1 (избирательный округ 1) является наиболее ценным (например, имеет наибольшее число голосов), T_2 является следующим по ценности и т. д. Партия II располагает суммой денег D , используемых в кампании в пользу своих кандидатов в различных избирательных округах. Оппозиционная партия, партия I, располагает суммой денег A , предназначенных для тех же целей. Модель такова, что в любом избирательном округе „выигрыш“ партии I пропорционален разности между количеством денег, вложенных партиями I и II, если партия I вкладывает больше, чем партия II. Если партия I вкладывает меньше, чем партия II, то ее „выигрыш“ равен нулю.

Чистой стратегией партии II является вектор, составленный из неотрицательных чисел $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, удовлетворяющий условию

$$\sum_{i=1}^n \eta_i = D.$$

Чистой стратегией партии I является вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где $\xi_i \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^n \xi_i = A.$$

Мы считаем, что $A \geq D$, т. е. предполагаем, что партия I не менее богата, чем партия II. В соответствии с моделью суммарный выигрыш, выпадающий на долю партии II при каждом выборе чистых стратегий, дается выражением

$$K(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n k_i \max\{0, \xi_i - \eta_i\}, \quad (12.4.1)$$

причем η и ξ пробегают симплексы с вершинами $d_1, \dots, d_n$ и $a_1, \dots, a_n$, где $d_i = (0, 0, \dots, D, 0, \dots, 0)$ (компонента D стоит на i -м месте), $a_i = (0, 0, \dots, A, 0, \dots, 0)$ (компонента A стоит на i -м месте) и $i = 1, 2, \dots, n$. Легко видеть, что ядро $K(\xi, \eta)$ выпукло по каждой переменной в отдельности и непрерывно по совокупности двух переменных.

В заключительной части этого параграфа мы получим явное решение этой игры; у этого решения есть интересные аспекты.

Однако, ввиду того что процесс получения этого решения является типичным примером использования общих методов теории игр и поскольку в этом случае общая теория особенно полезна, мы начнем с описания оптимальных стратегий для игр общего вида с выпуклой функцией выигрыша в E^n . Анализ таких игр опирается на следующую основную теорему.

► Теорема 12.4.1. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — семейство непрерывных выпуклых функций, определенных на компактном выпуклом n -мерном множестве S . Тогда функция $\sup_{\alpha} \varphi_\alpha(\eta)$ достигает своего минимального значения в некоторой точке $\eta_0 \in S$. Кроме того, для любого заданного $\delta > 0$ существуют такие индексы α_i и такие числа λ_i , что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_{\alpha_i}(\eta) \geq c - \delta$$

для всех $\eta \in S$, где $\lambda_i \geq 0$ и $\sum \lambda_i = 1$.

Эта теорема уже была нами однажды доказана при рассмотрении теории сопряженных функций (теорема 7.6.4). В следующем пункте приведено другое ее доказательство.

Здесь мы отметим только, что семейство функций $\varphi_\xi(\eta) = K(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 12.4.1. Следовательно, функция $\varphi(\eta) = \sup_{\xi} K(\xi, \eta)$ достигает своего минимального значения в неко-

торой точке $\eta_0 \in S$ и для каждого $\varepsilon > 0$ мы можем так выбрать $\{\lambda_i^\varepsilon\}$ и $\{\xi_i^\varepsilon\}$, что

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^\varepsilon K(\xi_i^\varepsilon, \eta) \geq \varphi(\eta_0) - \varepsilon$$

для всех $\eta \in S$, где $\lambda_i^\varepsilon, \xi_i^\varepsilon$ принимают значения из компактных множеств; точнее, $\lambda_i^\varepsilon \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^\varepsilon = 1.$$

Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы можем выбрать для каждого i предельные точки λ_i^0 и ξ_i^0 ($i = 1, \dots, n+1$), удовлетворяющие условиям $\lambda_i^0 \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^0 = 1,$$

$\xi_i^0 \in R$ и

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^0 K(\xi_i^0, \eta) \geq \varphi(\eta_0) \quad (12.4.2)$$

для всех $\eta \in S$. Из неравенства (12.4.2) следует, что если игрок I применяет конечную смешанную стратегию

$$x^*(\xi) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i^0 x_{\xi_i^0}(\xi),$$

то его выигрыш будет не меньше чем $\varphi(\eta_0)$. С другой стороны, если игрок II использует чистую стратегию η_0 , то при любом ξ выигрыш игрока I равен

$$K(\xi, \eta_0) \leq \sup_{\xi} K(\xi, \eta_0) = \varphi(\eta_0).$$

Таким образом, $\varphi(\eta_0)$ — значение игры, а $\{x^*, y_{\eta_0}\}$ — пара оптимальных стратегий.

Замечание 12.4.1. Если R — симплекс с вершинами a_i ($i = 1, \dots, k$), то любая точка $\xi \in R$ представима в виде

$$\sum_{i=1}^k \mu_i a_i, \quad \text{где } \mu_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i = 1.$$

Если ядро $K(\xi, \eta)$ выпукло также и по ξ при каждом η , то

$$K(\xi, \eta) = K\left(\sum_{i=1}^k \mu_i a_i, \eta\right) \leq \sum_{i=1}^k \mu_i K(a_i, \eta),$$

и поэтому

$$\sup_{\xi} K(\xi, \eta) = \sup_{1 \leq i \leq k} K(a_i, \eta).$$

Решение примера, связанного с политической кампанией. Теперь мы приведем решение игры с выпуклым ядром выигрыша, заданного равенством (12.4.1). В силу замечания 12.4.1 партия I имеет оптимальную стратегию вида

$$x^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{a_i}, \quad (12.4.3)$$

Пусть $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ — строго положительные коэффициенты правой части (12.4.3). Если партия II выбирает чистые стратегии, соответствующие вершинам $\mathbf{d}_{i_1}, \dots, \mathbf{d}_{i_r}$, то ожидаемые выигрыши партии I равны

[illegible]

С другой стороны, если партия II выбирает чистую стратегию, соответствующую некоторым из оставшихся $n-r$ вершин, то ожидаемый выигрыш партии I будет равен

$$\sum_{i=1}^r \lambda_{ij} k_{ij} A,$$

Предположим сначала, что в каждом из неравенств (12.4.4) имеет место равенство. Это предположение будет обосновано далее. Вычитая j -е уравнение из первого, мы получим

$$\lambda_{ij} = \frac{k_{i_1}}{k_{i_j}} \lambda_{i_1}.$$

Используя нормировку $\sum \lambda_{ij} = 1$, мы получим

$$\lambda_{ij} = \frac{1}{k_{ij}L}, \quad \text{где} \quad L = \sum_{j=1}^r \frac{1}{k_{ij}} \quad (12.4.5)$$

и

$$v = \sum_{j=1}^r k_{ij} \lambda_{ij} A - k_{i1} \lambda_{i1} D = \frac{rA - D}{\sum_{j=1}^r \frac{1}{k_{ij}}} = \frac{rA - D}{L}. \quad (12.4.6)$$

Отметим, что в (12.4.6) значение v возрастает при возрастании k_{ij} . Поскольку партия I намерена максимизировать значение v , числа k_{ij} следует выбирать в соответствии с наиболее ценными избирательными округами $T_1, \dots, T_r$. Точное число r избирательных округов, в которые партия I вкладывает деньги, должно определяться после того, как будет максимизировано выражение (12.4.6). Поскольку числа $k_1, \dots, k_n$ расположены в порядке убывания, мы можем написать

$$v = \frac{rA - D}{\sum_{j=1}^r \frac{1}{k_j}} = \max_{1 \leq s \leq n} \frac{sA - D}{\sum_{j=1}^s \frac{1}{k_j}};$$

кроме того, $v \geq 0$ в силу предположения $A \geq D$.

Мы должны проверить теперь, что число v , полученное таким образом, действительно является значением игры и что наше предположение о равенствах в (12.4.4), используемое при вычислении v , справедливо.

Для того чтобы показать, что значение игры не меньше v , достаточно установить, что партия I может получить хотя бы v независимо от выбора чистой стратегии партией II. Действительно, если партия II выбирает $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ ($\sum \eta_i = D$), а партия I выбирает

$$x^* = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_{a_i},$$

где λ_i выбрано, как указано в (12.4.5), то выигрыш будет равен

$$\begin{aligned} \int K(\xi, \eta) dx^*(\xi) &= \sum_{i=1}^r \lambda_i K(a_i, \eta) = \\ &= \sum_{i=1}^r \lambda_i k_i (A - \eta_i) = \frac{rA - \sum_{i=1}^r \eta_i}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{k_i}} \geq \frac{rA - D}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{k_i}} = v. \end{aligned}$$

Для того чтобы установить, что значение игры не больше v , мы покажем сначала, что если $m > r$, то $k_m A \leq v$. Поскольку из неравенства $m \geq r + 1$ вытекает, что $k_m \leq k_{r+1}$, нам достаточно проверить, что $k_{r+1} A \leq v$. По определению v , мы имеем

$$\frac{rA - D}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{k_i}} \geq \frac{(r+1)A - D}{\sum_{i=1}^{r+1} \frac{1}{k_i}}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{r+1}}(rA - D) + \left(\sum_{i=1}^r \frac{1}{k_i} \right) (rA - D) &\geq \left(\sum_{i=1}^r \frac{1}{k_i} \right) (rA - D + A), \\ v = \frac{rA - D}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{k_i}} &\geq k_{r+1} A. \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

Аналогично из неравенства

$$\frac{rA - D}{\sum_{i=1}^r \frac{1}{k_i}} \geq \frac{(r-1)A - D}{\sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{k_i}}$$

мы получаем неравенство $k_r A \geq v$ и, следовательно,

$$k_j A \geq v \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (12.4.8)$$

Из соотношения (12.4.7) видно, что для партии I невыгодно принимать участие в кампании в $n - r$ наименее важных избирательных округах, даже если партия II и не принимает участия в кампании в этих избирательных округах.

Построим теперь вектор $\eta^0 = (\eta_1^0, \dots, \eta_r^0, 0, \dots, 0)$, с помощью которого можно ограничить выигрыш партии I в первых r избирательных округах числом v . Для этого необходимо (лемма 10.2.1) выполнение равенств

$$k_j (A - \eta_j^0) = v \quad \text{или} \quad \eta_j^0 = A - \frac{v}{k_j} \quad (j = 1, \dots, r). \quad (12.4.9)$$

Кроме того,

$$\sum_{j=1}^r \eta_j^0 = rA - v \sum_{j=1}^r \frac{1}{k_j} = D,$$

а из (12.4.8) получаются неравенства $\eta_j^0 \geq 0$; следовательно, вектор η^0 действительно оказывается стратегией. Из уравнения (12.4.9) вытекает, что если партия II выбирает стратегию η^0 , а партия I

выбирает чистую стратегию, соответствующую одной из вершин $\mathbf{a}_i$ ($i = 1, \dots, r$), то выигрыш партии I будет равен v . Для любого ξ , поскольку ядро $K(\xi, \eta)$ выпукло и

$$\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i,$$

мы имеем

$$K(\xi, \eta^0) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i K(\mathbf{a}_i, \eta^0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i k_i (A - \eta_i^0) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i v = v.$$

Таким образом, партия II, используя стратегию η^0 , не позволит партии I получить выигрыш больший, чем v . Отсюда следует, что число v является значением игры, а стратегии $\{x^*, y_{\eta^0}\}$ оптимальны.

Единственность. Число вершин r , из которых образуется оптимальная стратегия партии I, может и не быть единственным; например, в игре с $A=2$, $D=1$, $k_1=2$, $k_2=1$ число r может быть равно 1 или 2. Однако оптимальная стратегия η^0 для партии II в классе чистых стратегий единственна. Действительно, если $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n)$ — оптимальная стратегия, то с ее помощью можно помешать партии I получить выигрыш больший, чем v , если партия I использует чистую стратегию, соответствующую любым из первых r вершин. Следовательно,

$$\bar{\eta}_j \geq A - \frac{v}{k_j} \quad (j = 1, \dots, r). \quad (12.4.10)$$

Но

$$\sum_{j=1}^r \left(A - \frac{v}{k_j} \right) = D,$$

и поэтому в (12.4.10) должно быть равенство. Это последнее утверждение не противоречит неединственности r . В самом деле, если партия I может использовать либо r , либо $r+1$ вершину, то из (12.4.7) и (12.4.8) вытекает, что должно выполняться равенство $k_{r+1}A = v$, и поэтому

$$\eta_{r+1}^0 = A - \frac{v}{k_{r+1}} = 0.$$

Оптимальная стратегия η^0 записывается явно в виде

$$\begin{aligned} \eta_j^0 &= A - \frac{rA - D}{k_j \sum_{j=1}^r \frac{1}{k_j}} \quad (j = 1, \dots, r), \\ \eta_j^0 &= 0 \quad (j = r+1, \dots, n). \end{aligned} \quad (12.4.11)$$

В общем случае партия II имеет дополнительно оптимальные смешанные стратегии: можно, например, использовать $\mathbf{d}_i$ с вероятностью η_i^0/D для $i \leq r$ и с вероятностью 0 для $i > r$.

Подведем итоги.

(1) r следует выбирать так, чтобы дробь

$$\frac{rA - D}{\sum_{j=1}^r \frac{1}{k_j}}$$

была максимальной.

(2) Партия II (защитник) имеет единственную чистую оптимальную стратегию, описываемую уравнениями (12.4.11), из которых видно, что она принимает участие в кампании только в r наиболее ценных избирательных округах.

(3) Партия I (атакующий) использует все свои возможности только в одном избирательном округе, который она выбирает из числа самых ценных избирательных округов. Этот избирательный округ, на котором сосредоточивает свои усилия партия I, выбирается случайным образом с вероятностью $\lambda_i = (1/k_i)(1/L)$ ($i = 1, \dots, r$), где

$$L = \sum_{j=1}^r \frac{1}{k_j}.$$

Задача, в которой

$$n = 3, A = 16, D = 12, k_1 = 6, k_2 = 2, k_3 = 1,$$

имеет следующее решение. Используя все ресурсы, игрок I атакует с вероятностью $1/4$ пункт 1 и с вероятностью $3/4$ пункт 2. Игрок II защищает первый из этих пунктов 11 единицами, а второй — 1 единицей. Значение игры равно 30.

12.5*. Одна теорема о выпуклых функциях. В этом пункте мы приведем доказательство теоремы 12.4.1 (см. также теорему 7.6.4).

Пусть S — компактная выпуклая область в n -мерном пространстве, являющаяся областью значений переменной $\boldsymbol{\eta}$. Функция $f(\boldsymbol{\eta})$ является линейной (не обязательно однородной), если

$$f\left(\sum \lambda_i \boldsymbol{\eta}_i\right) = \sum \lambda_i f(\boldsymbol{\eta}_i)$$

при $\sum \lambda_i = 1$; очевидно, функция $f(\boldsymbol{\eta}) \equiv 1$, обозначаемая через $\mathbf{u}$, линейна. Множество всех линейных функций образует $(n+1)$ -мерное пространство E . Произвольный элемент E будем обозначать через $\mathbf{f}$, а произвольный элемент сопряженного к нему пространства E^* (т. е. пространства всех возможных линейных форм, определенных на E) — через F . Понятно, что каждый элемент $\boldsymbol{\eta} \in S$ порождает некоторый

элемент из E^* . В лемме 12.5.1 утверждается, что при соответствующей нормировке пространство E^* совпадает со всем пространством $E^n \supset S$.

► Лемма 12.5.1. Если $F(u) = 1$, то существует такая точка $\eta \in E^n$, что $F(f) = f(\eta)$ для всех $f \in E$.

Доказательство. Пусть функции $f_1, \dots, f_{n+1}$ линейно независимы. Поскольку эти функции образуют базис пространства E , достаточно показать, что система уравнений

$$F(f_i) = f_i(\eta) \quad (i = 1, \dots, n+1)$$

имеет решение. Если мы положим $f_1 = u$, то первое уравнение обратится в тождество по η . Оставшиеся n независимых уравнений имеют решение, ибо η является n -мерным вектором.

Следующая наша лемма снова выражает фундаментальное свойство сопряженности.

► Лемма 12.5.2. Множество всех элементов $f \in E$, которые неотрицательны на S , образует замкнутый выпуклый конус $P \subset E$ с вершиной в нуле, причем функция u является его внутренней точкой. Кроме того, область, для которой $P(\eta) \geq 0$, совпадает с множеством S .

Замечание. Через $P(\eta)$ будем обозначать совокупность всех $f(\eta)$ при $f \in P$, а через $f(S)$ — совокупность всех $f(\eta)$ при $\eta \in S$.

Доказательство. Первая часть леммы очевидна. Для того чтобы доказать оставшееся утверждение, заметим, что если $\eta \notin S$, то точку η можно отделить гиперплоскостью от множества S . Таким образом, существует такой линейный функционал f , что $f(\eta) < c \leq f(S)$; но тогда $f - c u \in P$ и функция $f - c u$ отрицательна для η . Следовательно, точка η не принадлежит области, в которой $P(\eta) \geq 0$.

► Лемма 12.5.3. Пусть Q — выпуклое компактное множество из E , которое не пересекается с множеством P . Тогда найдется такая точка $\eta \in S$ и такое $\delta > 0$, что $Q(\eta) \leq -\delta$.

Доказательство. Так как Q и P — замкнутые выпуклые непересекающиеся множества, их можно разделить некоторой гиперплоскостью $F \in E^*$, т. е. можно выбрать такое $\delta > 0$, что

$$F(Q) + \delta \leq F(P).$$

Это соотношение показывает, что множество F ограничено снизу. Следовательно, $F(P)$ должно быть неотрицательным, поскольку вер-

шина конуса P лежит в нуле, а функция F линейна. Ввиду того что функция u является внутренней точкой, $F(u) > 0$; тогда, при соответствующей нормировке, мы можем положить $F(u) = 1$. Из леммы 12.5.1 вытекает, что существует такой вектор $\eta \in E^n$, что $F(Q) = Q(\eta)$ и $F(P) = P(\eta)$. Тогда в силу неравенства $F(P) \geq 0$ мы имеем

$$Q(\eta) + \delta \leq 0 \leq P(\eta).$$

Из последнего неравенства и леммы 12.5.2 вытекает, что $\eta \in S$.

► Лемма 12.5.4. Если для некоторого семейства $\{f_\alpha\}$ и всех $\eta \in S$ имеет место неравенство $\sup_\alpha f_\alpha(\eta) > 0$, то для соответствующим образом выбранных $\lambda_i \geq 0$ ($\sum \lambda_i = 1$) и α_i ($i = 1, \dots, n+1$) функция

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\alpha_i}$$

принадлежит конусу P , т. е. $f(S) \geq 0$.

Доказательство. Если $f_\alpha(\eta) > 0$ для фиксированных α и η , то мы можем найти открытое множество, содержащее η , в котором все еще имеет место строгое неравенство. Следовательно, по теореме Гейне — Бореля о покрытиях мы можем найти такое конечное подсемейство $\{f_{\alpha_j}\}$, что $\max_j f_{\alpha_j}(\eta) > 0$ для каждого $\eta \in S$.

Обозначим через Q выпуклую оболочку подсемейства $\{f_{\alpha_j}\}$. В силу леммы 12.5.3 множества Q и P пересекаются. Ввиду того что множество Q ограничено, а конус P нет, некоторая граничная точка f из множества Q должна принадлежать и конусу P . Эта граничная точка должна принадлежать некоторой многогранной грани множества Q , причем размерность этой грани не превосходит n . Следовательно, мы на основании леммы 6.2.1 имеем

$$f = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\alpha_i},$$

где $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$; из $f \in P$ следует, что

$$\sum_i \lambda_i f_{\alpha_i}(S) = f(S) \geq 0.$$

Доказательство теоремы 12.4.1. Пусть для всех $\eta \in S$, удовлетворяющих условиям теоремы 12.4.1, выполняется соотношение

$$b > \inf_{\eta \in S} \sup_\alpha \varphi_\alpha(\eta) = c.$$

Множество, состоящее из всех $\eta \in S$, для которых при всех α имеет место неравенство $\varphi_\alpha(\eta) \leq b$, непусто и замкнуто. Кроме того, это множество уменьшается с убыванием b . Поэтому если мы выберем последовательность $b_k \rightarrow c$, то пересечение соответствующих множеств должно быть непусто в силу принципа вложенных интервалов. Каждая точка η_0 из этого пересечения удовлетворяет первой части теоремы.

Для доказательства второй части теоремы рассмотрим семейство $\{f_\beta\}$ всех линейно независимых функций, удовлетворяющих условию

$$[\varphi_\alpha - f_\beta](S) \geq 0 \quad (12.5.1)$$

для некоторого α . Любая касательная к φ_α плоскость удовлетворяет этому условию, так что семейство f_β содержит все плоскости, касательные к φ_α . Следовательно, для всех η

$$\sup_\beta f_\beta(\eta) = \sup_\alpha \varphi_\alpha(\eta) \geq c.$$

Рассмотрим для некоторого фиксированного $\delta > 0$ семейство

$$\mathfrak{F}_\delta = \{f_\beta - (c - \delta)u\}.$$

Поскольку $\sup f_\beta(S) \geq c$, мы имеем

$$\sup_\beta [f_\beta - (c - \delta)u](S) \geq \delta > 0.$$

Применим к семейству $\mathfrak{F}_\delta$ лемму 12.5.4 и выберем $\beta_1, \dots, \beta_{n+1}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$. Пусть φ_{α_i} — функция, соответствующая f_{β_i} в (12.5.1). Тогда

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \varphi_{\alpha_i}(\eta) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_{\beta_i}(\eta) \geq c - \delta$$

для всех $\eta \in S$, что и утверждалось в теореме.

12.6. Задачи.

В задачах 1—11 через $K(\xi, \eta)$ обозначена непрерывная функция, заданная на квадрате $0 \leq \xi, \eta \leq 1$.

1. Пусть $K_\xi > 0$ и $K_\eta < 0$; показать, как решить игру с ядром $K(\xi, \eta)$.

2. Показать, что условие $K_\xi(\xi, \eta) \leq 0$ является достаточным для того, чтобы гарантировать существование седловой точки у ядра $K(\xi, \eta)$. Указать путь нахождения седловой точки.

3. Найти оптимальные стратегии в игре с ядром

$$K(\xi, \eta) = (\xi - \eta)^2.$$

4. Решить игру на единичном квадрате с ядром

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi(1 - \eta) & \xi \leq \eta, \\ \eta(1 - \xi) & \xi \geq \eta. \end{cases}$$

5. Пусть ядро $K(\xi, \eta)$ строго выпукло по каждой переменной в отдельности; обозначим через η_0 и η_1 точки, в которых соответственно функции $K(0, \eta)$ и $K(1, \eta)$ достигают своих минимальных значений. Показать:

(а) если $K(0, \eta_0) \geq K(1, \eta_0)$, то оптимальными стратегиями игроков I и II будут $x_{\xi_0}(\xi)$ (где $\xi_0 = 0$) и y_{η_0} ;

(б) если $K(1, \eta_1) \geq K(0, \eta_1)$, то оптимальными стратегиями будут x_{ξ_1} (где $\xi_1 = 1$) и y_{η_1} ;

(в) в остальных случаях оптимальной минимизирующей стратегией является y_{η^*} , где η^* — единственное лежащее между η_0 и η_1 решение уравнения $K(0, \eta) = K(1, \eta)$.

6. Используя результаты задачи 5, решить игру с ядром

$$\xi^2 \eta^2 - \xi - \eta.$$

7. Решить обобщенно-выпуклую игру с ядром

$$K(\xi, \eta) = \xi^3 \eta - \eta^2 - \xi \eta + \eta.$$

8. Найти оптимальные стратегии для игры с ядром

$$K(\xi, \eta) = \sin \frac{\pi(\xi + \eta)}{2}$$

Указание: ядро K вогнуто по ξ .

9. Решить игру с ядром

$$K(\xi, \eta) = \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{3} - \eta\right)^2}.$$

10. Показать, что если $K_{\eta\eta\eta} > 0$ и $K_{\xi\xi\xi} < 0$, то оба игрока имеют оптимальные стратегии, использующие не более $3/2$ точки (граничная точка берется с весом $1/2$).

11. Показать, что если $K_{\eta\eta\eta} > 0$, то любая оптимальная минимизирующая стратегия с весом, не превосходящим $3/2$ (где концевые точки засчитываются за $1/2$, а внутренние точки за 1), не может состоять из некоторой внутренней точки η_0 и единицы.

12. Рассмотрим пример о политической кампании из п. 12.4. Предположим, что имеется 5 избирательных округов, ценности которых соответственно равны

$$k_1 = \frac{1}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{5}, \quad k_3 = \frac{1}{7}, \quad k_4 = \frac{1}{9}, \quad k_5 = \frac{1}{12},$$

а $A = D = 10$. Решить игру.

13. Игрок I выбирает точку ξ в единичном круге S , а игрок II выбирает одновременно точку η в том же самом единичном круге. Выигрыш игрока I равен $|\xi - \eta|^2$ (квадрат расстояния между ξ и η). Определить вид решений этой игры.

14. Определить вид решений игры из задачи 13, если под S понимается некоторое компактное выпуклое множество из E^n .

15. Рассмотрим игру, в которой множество чистых стратегий Y игрока II является единичной сферой пространства E^n , а X состоит из всех $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, для которых

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Обозначим через a^i ($i = 1, \dots, m$) m таких точек на поверхности единичной сферы (т. е. $|a^i| = 1$), что существует вектор λ^0 , удовлетворяющий условию

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^0 a^i = 0.$$

Определим ядро как

$$K(\lambda, y) = \int_{|\eta| \leq 1} \sum_{i=1}^m \lambda_i |a^i - \eta| d\eta.$$

Доказать, что вектор λ^0 является оптимальной стратегией игрока I и что чистая стратегия, в которой у сконцентрировано в точке $\eta = 0$, является оптимальной стратегией игрока II. Показать также, что для всех оптимальных стратегий λ игрока I имеет место равенство

$$\sum_i \lambda_i a^i = 0.$$

16. Рассмотрим непрерывную игру с ядром $K(\xi, \eta)$, выпуклым по η для каждого ξ , где η пробегает выпуклое компактное множество $B \subset E^n$, а ξ пробегает компактное множество A . Предположим далее, что множество опорных плоскостей в каждой граничной точке множества B имеет не более n крайних точек. Показать, что если игрок II имеет чистую оптимальную стратегию, сосредоточенную в точке η_0 , лежащей на границе множества B , то спектр оптимальной стратегии для игрока I имеет не более чем n точек роста.

17. Доказать, что предположение о числе опорных плоскостей в граничных точках множества B из задачи 16 всегда выполняется, если $n = 2$.

18. Показать, что если $\partial^n K / \partial \eta^n > 0$ и если множество оптимальных стратегий минимизирующего игрока k -мерно, то спектр оптимальной стратегии максимизирующего игрока состоит более чем из $n - k$ точек. (Ядро K определено на единичном квадрате.) Понятие „размерность“ можно определить, исходя из теоремы 12.3.1.

Комментарии и библиография к главе 12

12.1. Первым, кто решил выпуклую игру, был Боненбласт. Он рассматривал на единичном квадрате ядра вида $K(\xi, \eta) = f(\xi - \eta)$, где f — выпуклая функция, и получил решение, приведенное в п. 12.2.

12.2. Теория, изложенная в этом параграфе, обязана своим появлением Карлину и Мартину (не опубликовано). Пример, рассмотренный здесь, сформулировал Паксон, который применил для получения решения упомянутые выше результаты Бонненбласта.

12.3. Класс игр, известных под названием обобщенно-выпуклых, впервые рассмотрел Карлин, сборник [11] гл. 8; доказательства, приведенные в этом параграфе, заимствованы из более изящного анализа, проведенного Гликсбергом.

12.4. Теория, изложенная в этом пункте, основана на работе Бонненбласта, Карлина и Шепли [2]. Тщательно изученная выпуклая игра, интерпретируемая здесь в терминах политической кампании, была сформулирована первоначально, как военная игра о защите. Эта игра была впервые решена Гроссом (не опубликовано).

12.5. Теорема о семействах выпуклых функций заимствована из работы Бонненбласта, Карлина и Шепли [2]. Другое доказательство этого результата, основанное на теории двойственности сопряженных выпуклых функций, предложено Фенхелем [1]. Применения этой теоремы можно найти в работах Фань Цзи, Гликсберга, Гофмана [1], Карлина и Шепли [1], а также в п. 7.9.

ИГРЫ С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ ПРИ ОДНОКРАТНОМ ДЕЙСТВИИ КАЖДОГО ИГРОКА

Важный класс игр на единичном квадрате состоит из игр, в которых пространствами чистых стратегий являются сегменты $0 \leq \xi \leq 1$ для игрока I и $0 \leq \eta \leq 1$ для игрока II, интерпретируемые, как моменты времени, в которые может быть совершено некоторое действие. Нормировка $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ производится здесь только для удобства и не накладывает существенных ограничений на рассматриваемые модели. В этой главе мы ограничимся случаем, в котором возможно только одно действие для каждого игрока; в гл. 14 мы рассмотрим игры, в которых действие может быть произведено повторно фиксированное число раз.

Рассмотрим следующую идеализированную модель: каждый из двух противников располагает одним выстрелом. Иначе говоря, каждый игрок имеет возможность один раз выстрелить в своего противника, зная при этом, что меткость, т. е. вероятность успешного выстрела, возрастает со временем. В игре такого типа выигрыш существенно зависит от порядка, в котором действуют игроки, и от их индивидуальных способностей попадания. Очевидно, что каждый игрок хочет задержать свой выстрел настолько это возможно, чтобы увеличить свою вероятность попадания, но в то же время стремится не задерживать его настолько, чтобы быть убитым противником. Оптимальная стратегия выражает надлежащее равновесие между желанием задержки и опасностью промедления.

Многочисленные варианты военных игр с выбором момента времени могут быть сформулированы в терминах информации, которую игрок имеет относительно поведения противника. Ряд таких игр описан в п. 13.1. Хотя мы употребляем терминологию тактических дуэлей, читатель сможет интерпретировать большинство наших моделей также в терминах конкуренции рекламных кампаний и т. д.

Здесь мы советуем читателю перечитать п. 10.3, который представляет необходимую основу для анализа игр с выбором момента времени. Мы будем свободно пользоваться терминологией, введенной там. В частности, как отмечено в п. 10.3, математически игра с выбором момента времени задается функцией выигрыша $K(\xi, \eta)$.

определенной на единичном квадрате и обладающей следующими свойствами:

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta), & \xi < \eta, \\ \Phi(\xi), & \xi = \eta, \\ M(\xi, \eta), & \xi > \eta. \end{cases} \quad (13.0.1)$$

Каждая из функций $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ непрерывна по совокупности переменных ξ и η :

$L(\xi, \eta)$ монотонно возрастает по ξ для всех η ,
 $M(\xi, \eta)$ монотонно возрастает по ξ для всех η ,
 $L(\xi, \eta)$ монотонно убывает по η для всех ξ ,
 $M(\xi, \eta)$ монотонно убывает по η для всех ξ .

Наконец, напомним, что игра с выбором момента времени принадлежит классу I, если $L(\xi, \eta)$ является функцией, зависящей только от ξ , а $M(\xi, \eta)$ является функцией, зависящей только от η , и классу II в противном случае.

13.1. Примеры игр с выбором момента времени. Хотя общая теория, излагаемая в следующем пункте, охватывает приводимые ниже примеры как частные случаи, их рассмотрение полезно по двум причинам: (1) оно дает возможность описать общий метод определения оптимальных стратегий в простых ясных выражениях, не принимая в расчет бездну случаев, встречающихся в общей ситуации; (2) оно помогает иллюстрировать идеи, лежащие в основе общей теории игр с выбором момента времени.

Пример 1. Шумная дуэль. Каждому из двух дуэлянтов разрешается выстрелить только один раз. Предположим, что оба они имеют „шумные“ пистолеты, так что каждый знает, когда выстрелил его противник. Ясно, что это игра с выбором момента времени, относящаяся к классу I (см. п. 10.3). Термин „шумный“ будет употребляться для того, чтобы обозначить наличие полной информации, т. е. такое положение дел, при котором каждый игрок знает, что делает и что сделал другой. Предполагается, что функция меткости $P_1(\xi)$ (вероятность успеха) игрока I непрерывна, монотонно возрастает по ξ и $P_1(0) = 0$, $P_1(1) = 1$; аналогично точность выстрела игрока II описывается непрерывной возрастающей функцией $P_2(\eta)$, где $P_2(0) = 0$, $P_2(1) = 1$. Если игрок I поражает игрока II, то выигрыш игрока I полагается равным $+1$; если игрок II поражает игрока I, то игрок I получает -1 ; ядром игры $K(\xi, \eta)$ будет ожидаемый выигрыш игрока I, когда игроки употребляют чистые стратегии ξ и η .

Структура информации в этой игре (тот факт, что оружие шумное) принимается теперь во внимание при составлении функции выигрыша. Если $\xi < \eta$, то вероятность того, что игрок I поразит

игрока II, равна $P_1(\xi)$, и выигрыш игрока I равен $1 \cdot P_1(\xi)$; вероятность того, что I промахнется, равна $1 - P_1(\xi)$. Ясно, что если игрок II еще не стрелял и знает, что игрок I больше не может выстрелить, то игрок II будет увеличивать свои шансы на успех, выжидая, пока η не станет равным 1. Таким образом, если игрок I промахнется в момент ξ , то он наверняка будет поражен игроком II, если $\xi < \eta$; следовательно,

$$L(\xi, \eta) = P_1(\xi) + (-1)[1 - P_1(\xi)] \quad (\xi < \eta).$$

Аналогично

$$M(\xi, \eta) = P_2(\eta)(-1) + [1 - P_2(\eta)](1) \quad (\xi > \eta)$$

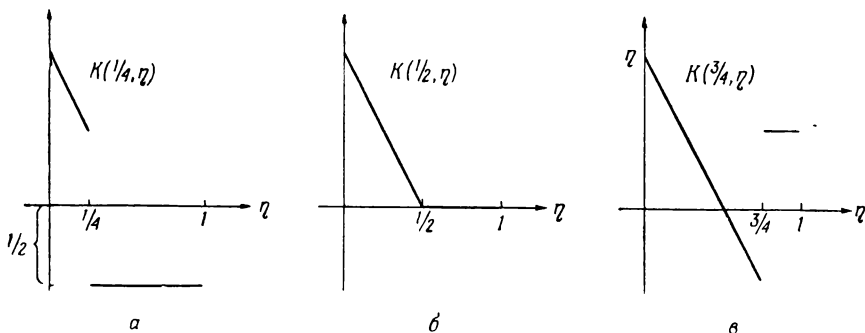
и

$$\Phi(\xi) = P_1(\xi)[1 - P_2(\xi)] + P_2(\xi)[1 - P_1(\xi)](-1) \quad (\xi = \eta).$$

В последней формуле предполагается, что если оба противника стреляют одновременно и с одинаковым результатом, успешным или нет, то выигрыш равен нулю. Упрощая, мы получаем

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} 2P_1(\xi) - 1, & \xi < \eta, \\ P_1(\xi) - P_2(\xi), & \xi = \eta, \\ 1 - 2P_2(\eta), & \xi > \eta, \end{cases} \quad (13.1.1)$$

так что K определяет игру с выбором момента времени класса I. Заметим, что выигрыш в точке $\eta = \xi$ является средним из выигры-



Р и с. 23.

шей, представляемых функциями L и M . На рис. 23 показаны различные случаи функции выигрыша для $P_1(\xi) = P_2(\xi) = \xi$.

Рассмотрение $K(\xi, \eta)$ как функции от η при определенных значениях ξ (см. рис. 23) наводит на мысль, что игрок I будет иметь оптимальную чистую стратегию, когда постоянная часть выигрыша

[т. е. $2P_1(\xi) - 1$] равна наименьшему значению выражения $1 - 2P_2(\eta)$ для $\eta < \xi$. Это требует, чтобы

$$2P_1(\xi) - 1 = 1 - 2P_2(\xi). \quad (13.1.2)$$

Так как правая часть равенства (13.1.2) убывает непрерывно от $+1$ до -1 , когда ξ пробегает $[0, 1]$, а левая его часть возрастает непрерывно от -1 до $+1$, может быть найдено хотя бы одно решение z_0 уравнения (13.1.2). Заметим, что если обе функции строго монотонны, то существует единственное решение z_0 .

Обозначим значение обеих частей (13.1.2) для z_0 через v . Из свойств монотонности $K(\xi, \eta)$ сразу вытекает, что

$$K(\xi_0, \eta) \geq v \geq K(\xi, \eta_0) \quad (13.1.3)$$

для всех η и ξ и, следовательно, что пара $\{\xi_0, \eta_0\}$ состоит из оптимальных стратегий.

Пример 2. Бесшумная дуэль. Снова каждому из двух дуэлянтов разрешается выстрелить только один раз, но в этом случае оба пистолета снабжены глушителями, так что ни один из дуэлянтов не может определить, выстрелил ли уже его противник или нет. Термин „бесшумная“ в противоположность „шумной“ будет употребляться для того, чтобы обозначить игру, в которой исключается какое бы то ни было знание о ходе игры по крайней мере для одного из игроков.

Предположим для простоты, что функции меткости заданы следующим образом: $P_1(\xi) = P_2(\xi) = \xi$. Тогда функция выигрыша, описывающая игру, имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi - (1 - \xi)\eta, & \xi < \eta, \\ 0, & \xi = \eta, \\ -\eta + (1 - \eta)\xi, & \xi > \eta. \end{cases} \quad (13.1.4)$$

Происхождение соотношений (13.1.4) аналогично происхождению (13.1.1), за исключением того, что в данном случае ни один из игроков не может определить момент выстрела противника, если только, разумеется, этот выстрел не оказался успешным.

Заметим, что $K(\xi, \eta) = -K(\eta, \xi)$; следовательно, эта бесшумная дуэль является симметричной игрой в смысле определения, введенного в п. 10.2. Значение игры поэтому равно нулю, и любая стратегия, которая оптимальна для одного игрока, оптимальна также и для другого.

Функция выигрыша $K(\xi, \eta)$ из соотношения (13.1.4) определяет игру с выбором момента времени класса II; она имеет вид (13.0.1), где

$$L(\xi, \eta) = \xi - \eta + \xi\eta, \quad M(\xi, \eta) = \xi - \eta - \xi\eta$$

и

$$\left. \begin{aligned} L_{\xi}(\xi, \eta) &= 1 + \eta > 0, & L_{\eta}(\xi, \eta) &= -1 + \xi < 0, \\ M_{\xi}(\xi, \eta) &= 1 - \eta > 0, & M_{\eta}(\xi, \eta) &= -1 - \xi < 0, \end{aligned} \right\} 0 \leq \xi, \eta < 1$$

(выражения L_{ξ} и M_{ξ} означают частные производные по ξ ; L_{η} и M_{η} имеют аналогичное значение). Следовательно, функции $L(\xi, \eta)$, $M(\xi, \eta)$ строго возрастают по ξ и строго убывают по η внутри единичного интервала.

Поскольку игроки не имеют сведений о действиях друг друга, можно интуитивно предполагать, что в рассматриваемой игре необходима рандомизация; естественно также считать, что каждый игрок может выжидать весь интервал времени, чтобы обеспечить достоверный успех. Следовательно, первое приемлемое предположение состоит в том, что оптимальные стратегии для каждого из игроков составлены из плотности на интервале вида $[a, 1]$ и возможного скачка в 1.

Для начала мы отбрасываем возможность скачка в 1 и ищем оптимальные стратегии в виде

$$x^0(\xi) = \int_a^{\xi} f(t) dt, \quad y^0(\eta) = \int_a^{\eta} g(t) dt.$$

Мы будем искать стратегии, доставляющие выигрыш, тождественно равный v (см. п. 10.5).

Однако требование постоянного выигрыша v может быть выполнено только на интервале $[a, 1]$. Лемма из п. 10.2 утверждает, что это свойство является необходимым условием оптимальности¹⁾. Следовательно,

$$\int_a^1 K(\xi, \eta) dx^0(\xi) = \int_a^1 K(\xi, \eta) f(\xi) d\xi = v = 0 \quad (13.1.5)$$

для всех η в $[a, 1]$. Учитывая явное выражение для $K(\xi, \eta)$, уравнение (13.1.5) можно записать следующим образом:

$$\int_a^{\eta} (\xi - \eta + \xi\eta) f(\xi) d\xi + \int_{\eta}^1 (\xi - \eta - \xi\eta) f(\xi) d\xi \equiv 0. \quad (13.1.6)$$

Вспоминая, что

$$\int_a^1 f(\xi) d\xi = 1,$$

¹⁾ В утверждении леммы 9.2.1 предполагалась непрерывность функции $K(\xi, \eta)$. Однако существенной при этом является лишь непрерывность $K(x^0, \eta)$, которая здесь и предполагается.

мы записываем (13.1.6) в виде

$$\int_a^1 \xi f(\xi) d\xi - \eta + \eta \int_a^\eta \xi f(\xi) d\xi - \eta \int_\eta^1 \xi f(\xi) d\xi \equiv 0, \quad (13.1.7)$$

что можно рассматривать как интегральное уравнение для функции $r(\xi) = \xi f(\xi)$. Двукратным дифференцированием мы сводим его к дифференциальному уравнению

$$2\eta r'(\eta) + 4r(\eta) = 0,$$

общим решением которого является $r(\eta) = k\eta^{-2}$ и, следовательно, $f(\xi) = k\xi^{-3}$. Подстановка $f(\xi) = k\xi^{-3}$ в (13.1.7) приводит к тождеству

$$\eta \left(-1 + \frac{k}{a} + k \right) + k \left(-3 + \frac{1}{a} \right) \equiv 0 \quad (a \leq \eta \leq 1), \quad (13.1.8)$$

которое выполняется лишь при $a = 1/3$ и $k = 1/4$. К счастью, те же самые значения также удовлетворяют ограничению нормализации

$$\int_a^1 f(\xi) d\xi = k \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2} \right) = 1. \quad (13.1.9)$$

Итак, оптимальная стратегия x^0 имеет плотность

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4} \xi^{-3}, & \frac{1}{3} \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

если только показано, что

$$\int_a^1 K(\xi, \eta) f(\xi) d\xi > 0$$

для $\eta < a$. Этот факт является непосредственным следствием свойств монотонности ядра.

Для $\eta < a$ мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_a^1 K(\xi, \eta) f(\xi) d\xi = \int_a^1 M_\eta(\xi, \eta) f(\xi) d\xi \leq 0.$$

Но функция

$$\int_a^1 K(\xi, \eta) f(\xi) d\xi$$

непрерывна для всех η и равна нулю при $\eta = a$; отсюда мы получаем требуемый результат.

Исходя из симметрии, та же стратегия оптимальна для игрока II. Для этого примера можно также показать, что оптимальная стратегия для каждого игрока единственна (см. задачи 16—19 этой главы).

Пример 3. Смешанная дуэль. Мы предполагаем, что игрок I имеет бесшумный пистолет, а игрок II — шумный, так что игрок I знает, выстрелил ли игрок II или нет, а игрок II такой информации не имеет. Функции меткости снова принимаются равными $P_1(\xi) = P_2(\eta) = \xi$. Тогда

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi - \eta + \xi\eta, & \xi < \eta, \\ 0, & \xi = \eta, \\ 1 - 2\eta, & \xi > \eta. \end{cases}$$

Руководствуясь эвристическими принципами, изложенными в анализе примера 2, мы будем искать стратегию $x^0(\xi)$, состоящую из плотности $f(\xi)$ на интервале $[a, 1]$ со скачком α в $\xi = 1$ и $y^0(\eta)$, состоящую из плотности $g(\eta)$ на том же интервале со скачком β в $\eta = 1$. По аналогии с (13.1.5) соответствующие интегральные уравнения имеют вид

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \alpha K(1, \eta) \equiv v \quad (a \leq \eta \leq 1),$$

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) g(\eta) d\eta + \beta K(\xi, 1) \equiv v. \quad (a \leq \xi \leq 1),$$

или

$$\int_a^t (\xi - t + \xi t) f(\xi) d\xi + \int_t^1 (1 - 2t) f(\xi) d\xi + \alpha(1 - 2t) \equiv v \quad (a \leq t < 1),$$

(13.1.10)

$$\int_a^t (1 - 2\eta) g(\eta) d\eta + \int_t^1 (t - \eta + t\eta) g(\eta) d\eta + \beta(2t - 1) \equiv v \quad (a \leq t < 1).$$

Дифференцируя два раза, мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 3(1 + \xi) f(\xi) + (\xi^2 + 2\xi - 1) f'(\xi) &= 0, \\ (1 - 2\eta - \eta^2) g'(\eta) - 3(1 + \eta) g(\eta) &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому плотности для оптимальных стратегий имеют вид

$$f(\xi) = k_1 (\xi^2 + 2\xi - 1)^{-3/2}, \quad g(\eta) = k_2 (\eta^2 + 2\eta - 1)^{-3/2}.$$

Для того чтобы закончить определение решений, мы должны найти значения неизвестных постоянных $a, v, \alpha, \beta, k_1, k_2$. Уравнения

(13.1.10) являются тождествами по ξ и η , и если мы подставим в них выражения для $f(\xi)$, $g(\eta)$ и проинтегрируем, то, учитывая, что

$$\int \frac{\xi+1}{(\xi^2+2\xi-1)^{3/2}} d\xi = -\frac{1}{\sqrt{\xi^2+2\xi-1}},$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2+2\xi-1)^{3/2}} = -\frac{1}{2} \frac{\xi+1}{\sqrt{\xi^2+2\xi-1}},$$

мы получаем

$$k_1 \left\{ -\eta \left(\frac{a}{P(a)} + \frac{2\alpha}{k_1} - \frac{2}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1-a}{2P(a)} + \frac{\alpha}{k_1} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \equiv v,$$

$$k_2 \left\{ \frac{3\alpha-1}{2P(a)} - \frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{k_2} (2\xi-1) \right\} \equiv v. \quad (13.1.11)$$

Здесь $P(a) = (a^2 + 2a - 1)^{1/2}$. Второе уравнение требует, чтобы коэффициент при ξ был равен нулю; следовательно,

$$\beta = \frac{k_2}{2\sqrt{2}}.$$

Первое уравнение требует, чтобы коэффициент при η был равен нулю; это может достигаться при $\alpha = 0$ лишь в случае

$$\frac{a}{P(a)} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Решая это уравнение относительно a , мы получаем

$$a = \sqrt{6} - 2, \quad P(a) = \sqrt{3} - \sqrt{2}.$$

Уравнения нормировки

$$\int_a^1 f(\xi) d\xi = 1 - \alpha \quad \text{и} \quad \int_a^1 g(\eta) d\eta = 1 - \beta$$

сводятся к соотношениям

$$\frac{1}{k_1} = \frac{(a+1)}{2P(a)} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{(a+1)}{2P(a)} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{4}.$$

Наконец, чтобы оправдать выбор $\alpha = 0$, мы должны проверить, что уравнения (13.1.11) совместны с указанными значениями α , β , a , k_1 , k_2 и что найденные стратегии действительно оптимальные. Совместность проверяется просто и приводит к значению игры $v = 5 - 2\sqrt{6}$. Свойства монотонности функции $K(\xi, \eta)$ гарантируют, что

$\int K(\xi, \eta) dx^0(\xi) > v$ для $0 \leq \eta < a$, так что x^0 — оптимальная стратегия, как и утверждалось. Подобная аргументация применима и к y^0 .

Чтобы закончить рассмотрение этого примера, необходимо проверить выигрыш для стратегий x^0 и y^0 в точках $\eta=1$ и $\xi=1$ соответственно. Это просто проверить как для η , поскольку $a=0$, так и для ξ , поскольку $K(1, 1)=0 < (2\xi-1)|_{\xi=1}$. Заметим, что в этом случае заключение леммы 10.2.1 не выполняется, т. е. точка $\xi=1$ находится в спектре x^0 , и $K(1, y^0) < v$ (см. также сноску на стр. 511).

Наконец, отметим без доказательства, что указанные выше оптимальные стратегии x^0 и y^0 единственны.

Сопоставим решение смешанной дуэли и решение полностью бесшумной дуэли. Прежде всего, мы заметим, что в бесшумной дуэли спектр начинается в $a=1/3$, в то время как в смешанной дуэли спектр начинается в $a=\sqrt{6}-2 > 1/3$. Другими словами, когда один из игроков имеет преимущество в возможности слышать выстрел своего противника, его оптимальная стратегия требует для выстрела более позднего момента времени, чем при обычных обстоятельствах бесшумной дуэли. Второе и самое интересное отличие в решении смешанной дуэли состоит в том, что игрок II (игрок с шумным оружием) должен сохранять угрозу выстрела до самого конца. Это отражено в скачке $y^0(\eta)$ при $\eta=1$. На самом деле такое поведение игрока II не должно казаться странным ввиду неравенства информации, имеющейся в распоряжении каждого из игроков.

Пример 4. Рассмотрим бесшумную дуэль, определенную не на единичном квадрате, а на квадрате $b \leq \xi \leq 1$, $b \leq \eta \leq 1$, где $b > 0$. Функции меткости равны $P_1(\xi) = P_2(\xi) = \xi$. Этот пример может рассматриваться как такой вид бесшумной дуэли, в которой каждый игрок имеет положительную начальную вероятность попадания.

Функция выигрыша имеет следующий вид:

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi - \eta + \xi\eta, & \xi < \eta, \\ 0, & \xi = \eta, \\ \xi - \eta - \xi\eta, & \xi > \eta. \end{cases} \quad (b \leq \xi, \eta \leq 1).$$

Значение этой игры равно нулю, и любая стратегия, оптимальная для одного игрока, является также оптимальной и для другого. Если $b \leq 1/3$, то решение примера 2 справедливо также в данном случае. Для произвольного b мы попытаемся описать оптимальную стратегию, состоящую из плотности f на отрезке $[a, 1]$ и скачка α в точке b .

Далее мы покажем (п. 13.2) в качестве частного случая нашей общей теоремы, что ни в одном типе бесшумной дуэли оптимальные стратегии обоих игроков не могут иметь скачок в конечной точке.

В этом примере, поскольку игра симметрична, мы заключаем, что 1 не может быть точкой скачка в любой оптимальной стратегии.

Однако мы вводим здесь стратегию, которая допускает возможность немедленного выстрела для обоих игроков. Эта возможность следует из нашего предположения о положительном начальном значении функции меткости для обоих игроков. Для такой стратегии выигрыш игрока I, когда II применяет стратегию η ($a \leq \eta \leq 1$), равен

$$\int_a^{\eta} (\xi - \eta + \xi\eta) f(\xi) d\xi + \int_{\eta}^1 (\xi - \eta - \xi\eta) f(\xi) d\xi + \alpha(b - \eta + b\eta) \equiv 0$$

$$(a \leq \eta \leq 1).$$

Так как это уравнение отличается от уравнения (13.1.6) только линейным членом, оно приводит к тому же дифференциальному уравнению с решением $f(\xi) = k\xi^{-3}$. Ясно, что равенства, соответствующие (13.1.8) и (13.1.9), имеют вид

$$k\eta \left(-\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a} + \frac{3}{2} \right) + k \left(\frac{1}{a} - 3 \right) + \alpha(b - \eta + b\eta) = 0$$

и

$$\frac{k}{2a^2} - \frac{k}{2} = 1 - \alpha.$$

Решением этих уравнений в предположении, что $b > 1/3$, будет

$$a = \frac{b}{2-3b}, \quad \alpha = \frac{3b-1}{2b^2}, \quad k = \frac{1}{4}.$$

Так как $0 \leq \alpha \leq 1$, для второго уравнения должно выполняться неравенство $b \leq 1/2$; следовательно, если $b > 1/2$, мы не можем иметь оптимальную стратегию, включающую плотность указанного вида. В этом случае оптимальной будет чистая стратегия $x_b(\xi)$.

Подведем итоги.

Случай 1: $b \leq 1/3$. Оптимальная стратегия такая же, как и в примере 2.

Случай 2: $1/3 \leq b \leq 1/2$. Оптимальная стратегия

$$x^*(\xi) = \alpha x_b(\xi) + \int_a^{\xi} f(t) dt,$$

где

$$\alpha = \frac{3b-1}{2b^2}, \quad a = \frac{b}{2-3b}$$

и

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi < a, \\ 1/4 \xi^{-3}, & a \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Случай 3: $1/2 \leq b$. Оптимальная стратегия $x_b(\xi)$.

13.2. Интегральные уравнения для игр с выбором момента времени и их решения. В этом пункте мы рассмотрим ядра вида

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta), & \xi < \eta, \\ \Phi(\xi), & \xi = \eta, \\ M(\xi, \eta), & \xi > \eta, \end{cases}$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

(а) Функции $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ определены соответственно на замкнутых треугольниках $0 \leq \xi \leq \eta \leq 1$ и $0 \leq \eta \leq \xi \leq 1$. Кроме того, они имеют непрерывные вторые частные производные, определенные в соответствующих замкнутых треугольниках.

(б) Значение $\Phi(1)$ расположено между $L(1, 1)$ и $M(1, 1)$; значение $\Phi(0)$ расположено между $L(0, 0)$ и $M(0, 0)$.

(в) $L_\xi(\xi, \eta) > 0$ и $M_\xi(\xi, \eta) > 0$ в соответствующих замкнутых треугольниках с возможным исключением $M_\xi(1, 1) = 0$; $L_\eta(\xi, \eta) < 0$ и $M_\eta(\xi, \eta) < 0$ в соответствующих областях определения с возможным исключением $L_\eta(1, 1) = 0$.

Условие (в) означает, что функции $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ в своих областях определения строго возрастают по ξ и строго убывают по η . Это ограничивает наш анализ игр с выбором момента времени класса II некоторым подклассом функций выигрыша. Тем не менее многие из теорем, изложенных ниже, справедливы для всех игр с выбором момента времени класса II. В наши доказательства будут входить существенные черты анализа общей игры с выбором момента времени класса II, однако эти доказательства будут оставаться на относительно простом уровне изложения.

Стратегии. Если стратегия x состоит из скачка α при $\xi = 0$, плотности на интервале $[a, b]$ и скачка β при $\xi = 1$, то мы будем применять обозначение $x = (\alpha I_0, f_{ab}, \beta I_1)$. Если, кроме того, $b = 1$, то будем просто писать $x = (\alpha I_0, f_a, \beta I_1)$. Для любой стратегии x этого вида, выигрыш игрока I равен

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) &= \alpha L(0, \eta) + \int_a^\eta L(\xi, \eta) f_{ab}(\xi) d\xi + \\ &+ \int_\eta^b M(\xi, \eta) f_{ab}(\xi) d\xi + \beta M(1, \eta), \quad 0 < \eta < 1. \end{aligned} \quad (13.2.1)$$

Разумеется, если $\eta < a$, то первый интеграл исчезает, а если $\eta > b$, то исчезает второй интеграл. Если $\eta = 0$, то мы должны заменить $L(0, 0)$ на $\Phi(0)$, а если $\eta = 1$, то $M(1, 1)$ — на $\Phi(1)$.

► Лемма 13.2.1. Если оба игрока имеют оптимальные стратегии вида $x = (\alpha I_0, f_{ab}, \beta I_1)$, $y = (\gamma I_0, g_{cd}, \delta I_1)$, то $a = c$ и $b = d = 1$. Другими словами, спектром абсолютно непрерывной части обоих распределений является один и тот же интервал, от a до 1.

Доказательство. Для любого распределения указанного выше типа из (13.2.1) следует, что интеграл

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi)$$

является непрерывной функцией η [каждый член справа в (13.2.1) непрерывен] для $0 < \eta < 1$. Если $f_{ab}(\xi)$ тождественно равно нулю в некотором интервале, то при изменении η в том же интервале интеграл

$$\int_a^1 K(\xi, \eta) dx(\xi)$$

строго убывает. Это следует из того, что эффективные пределы интегрирования в (13.2.1) остаются постоянными, а подинтегральная функция по условию (в) строго убывает. Так как точка $\eta = c$ находится в спектре y , по лемме 10.2.1 должно быть

$$\int_0^1 K(\xi, c) dx(\xi) = v.$$

Ввиду того что x оптимальная,

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) \geq v.$$

Последние два соотношения и свойства монотонного убывания левой части требуют, чтобы интервал изменения плотности f_{ab} содержал интервал $[c, d]$. Аналогичное рассуждение применимо к y и, следовательно, $a = c$ и $b = d$. Далее, если $b < 1$, то для $\eta > d$

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) < v,$$

и мы получаем противоречие.

Тот факт, что спектр для обоих игроков начинается при одном и том же значении a , не случаен. Представим себе на минуту нашу

игру как общую тактическую дуэль с бесшумным оружием. Если один игрок не выстрелил до момента a , то другому игроку, несомненно, лучше выстрелить в a , чем до a . Следовательно, момент начала стрельбы должен быть в оптимальных стратегиях обоих игроков одним и тем же.

Лемма 13.2.1 в разработке общей теории непосредственно не используется, но помогает лучше объяснить последующий анализ. Мы попытаемся строить решения способом, подсказанным леммой, т. е. выбирая подходящие постоянные α , β , γ , δ , a и решая для функций f_a и g_a соответствующую пару интегральных уравнений.

Интегральные уравнения. В лемме 13.4.1 будет показано, что если $L(1, 1) \leq M(1, 1)$, то точка $\xi = 1$, $\eta = 1$ является для $K(x, y)$ седловой точкой. Для того чтобы рассмотреть более трудный случай, когда $L(1, 1) > M(1, 1)$, мы сначала заметим, что при этом предположении из непрерывности $L(\xi, \xi)$ и $M(\xi, \xi)$ следует существование непустого интервала $a \leq \xi \leq 1$, в котором $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi)$. В любом таком интервале мы рассмотрим линейные интегральные уравнения

$$f(t) - \int_a^1 T(\xi, t) f(\xi) d\xi = \alpha p_0(t) + \beta p_1(t) \quad (13.2.2)$$

и

$$g(u) - \int_a^1 U(u, \eta) g(\eta) d\eta = \gamma q_0(u) + \delta q_1(u), \quad (13.2.3)$$

где

$$T(\xi, t) = \begin{cases} \frac{-L_\eta(\xi, t)}{L(t, t) - M(t, t)}, & a \leq \xi < t \leq 1, \\ \frac{-M_\eta(\xi, t)}{L(t, t) - M(t, t)}, & a \leq t \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$p_0(t) = \frac{-L_\eta(0, t)}{L(t, t) - M(t, t)}, \quad p_1(t) = \frac{-M_\eta(1, t)}{L(t, t) - M(t, t)},$$

$$U(u, \eta) = \begin{cases} \frac{M_\xi(u, \eta)}{L(u, u) - M(u, u)}, & a \leq \eta < u \leq 1, \\ \frac{L_\xi(u, \eta)}{L(u, u) - M(u, u)}, & a \leq u \leq \eta \leq 1, \end{cases}$$

$$q_0(u) = \frac{M_\xi(u, 0)}{L(u, u) - M(u, u)}, \quad q_1(u) = \frac{L_\xi(u, 1)}{L(u, u) - M(u, u)}.$$

Интегральные уравнения следуют из леммы 13.2.1. Если существуют оптимальные стратегии x , y описанного в лемме типа, то стратегия x должна удовлетворять уравнению (13.2.1), правая часть которого тож-

дественно равна v , при изменении η в интервале $a \leq \eta < 1$. Дифференцирование по η и деление на ненулевой множитель $L(\eta, \eta) - M(\eta, \eta)$ приводит к первому интегральному уравнению. Второе уравнение получается при проведении соответствующих операций над оптимальной стратегией u .

Для упрощения обозначений пусть T_a означает интегральный оператор с ядром $T(\xi, t)$ и нижним пределом a , а U_a — оператор с ядром $U(u, \eta)$ и нижним пределом a . Тожественный оператор будет обозначаться через I . Интегральные уравнения компактно могут быть записаны следующим образом:

$$(I - T_a)f = \alpha p_0 + \beta p_1, \quad (13.2.4)$$

$$(I - U_a)g = \gamma q_0 + \delta q_1. \quad (13.2.5)$$

Этим уравнениям, представляющим собой классические интегральные уравнения второго рода, посвящена обширная литература. Для нас, однако, больший интерес будут в дальнейшем представлять специфические свойства положительности ядер интегральных операторов, чем общая теория как таковая.

Для того чтобы провести анализ этих уравнений достаточно строго, мы должны выделить область определения функций, к которым применяются линейные операторы. Именно мы будем искать решение среди множества всех непрерывных функций, определенных на интервале $a \leq \xi \leq 1$. Эти функции и будут приниматься в качестве области определения D_a операторов T_a и U_a , если только не будет явно оговорено противное. Наличие параметра a показывает, что мы здесь имеем дело с однопараметрическим семейством линейных преобразований; это обеспечивает достаточную гибкость для последующего анализа.

Всякий раз, когда функция f из области определения преобразования T_a продолжается на более широкий интервал, подразумевается, что вне $a \leq \xi \leq 1$ $f = 0$. Мы снова подчеркиваем, что (13.2.2) и (13.2.3) определены только для тех интервалов $[a, 1]$, на которых $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi)$. Так как операторы U_a и T_a существенно используются в характеристике оптимальных стратегий, мы дадим обзор их основных свойств, доказательства которых будут приведены в следующем пункте.

Прежде всего, U_a и T_a являются строго положительными, т. е. функции $T_a f$ и $U_a f$, в которые преобразуются с помощью операторов T_a и U_a неотрицательные нетривиально кусочно-непрерывные функции f , являются строго положительными в $a \leq \xi \leq 1$. Строгая положительность T_a и U_a следует из свойства (в) ядра $K(\xi, \eta)$ и того факта, что $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi)$ в $[a, 1]$.

Далее заметим, что операторы U_a и T_a вполне непрерывны. В данном контексте это означает, что любое семейство функций f_a ,

которое равномерно ограничено на интервале $[a, 1]$, преобразуется в семейство равностепенно непрерывных функций $h_a = T_a f_a$ (см. п. В.1). Аналогичное утверждение применимо и к оператору U_a . Следовательно, из семейства преобразованных функций h_a может быть выбрана равномерно сходящаяся подпоследовательность (см. стр. 792).

Из того, что операторы T_a и U_a строго положительны и вполне непрерывны, вытекают следующие их дополнительные свойства.

(1) Если $\lambda(a)$ означает спектральный радиус T_a [т. е. $\lambda(a)$ есть радиус наименьшего круга в комплексной плоскости с центром в начале координат, который содержит все собственные числа T_a], то $\lambda(a)$ является собственным числом T_a и имеет положительную собственную функцию $f^{(a)}$. Кроме того, строгая положительность T_a гарантирует, что собственная функция, соответствующая $\lambda(a)$, единственна с точностью до постоянного множителя.

(2) Спектральный радиус $\lambda(a)$ является непрерывной строго монотонной функцией a . Если $a \rightarrow 1$, то $\lambda \rightarrow 0$. Кроме того, когда $a \rightarrow a_0$, для любого фиксированного положительного δ соответствующая собственная функция $f^{(a)}$ сходится равномерно на интервале $a_0 + \delta \leq \xi \leq 1$ к $f^{(a_0)}$.

(3) Наконец, если $\lambda > \lambda(a)$, то оператор

$$\left(I - \frac{T_a}{\lambda}\right)^{-1}$$

существует и может быть выражен посредством ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T_a}{\lambda}\right)^n.$$

Это выражение для обратного оператора известно под именем абстрактного ряда Неймана. Когда этот оператор применяется к некоторой непрерывной функции, полученный ряд функций сходится равномерно в интервале $[a, 1]$; кроме того, ряд из операторов определяет строго положительное линейное преобразование, которое переводит непрерывные положительные функции в строго положительные непрерывные функции. Наконец,

$$\left(I - \frac{T_a}{\lambda}\right)^{-1}$$

изменяется непрерывно по a при фиксированном λ в смысле, описанном в (2), т. е.

$$\left(I - \frac{T_a}{\lambda}\right)^{-1} p \rightarrow \left(I - \frac{T_{a_0}}{\lambda}\right)^{-1} p,$$

при $a \rightarrow a_0$ равномерно в $a_0 + \delta \leq \xi \leq 1$.

Обозначим через $\mu(a)$ спектральный радиус U_a , а через $g^{(a)}$ соответствующую собственную функцию. Свойства (1), (2) и (3) применяются таким же образом к $\mu(a)$ и $g^{(a)}$ mutatis mutandis¹⁾.

Читатель может рассматривать эти результаты, как распространение теории положительных матриц на линейные преобразования, определенные для непрерывных функций и сохраняющие свойство положительности (см. теорему 8.2.1). Доказательство этих утверждений может быть получено простыми видоизменениями рассуждения, которое применялось для матриц (см. п. 13.3).

Констатируя существенную для нас часть теории и свойств положительных преобразований, вернемся к обсуждению полученных интегральных уравнений для игр с выбором момента времени.

Так как решение интегральных уравнений (13.2.4) и (13.2.5) очень тесно связано с существованием оптимальных стратегий вида $(\alpha I_0, f_a, \beta I_1)$, важно знать, возможно ли решить уравнение (13.2.4) относительно f_a при $f_a > 0$. Ввиду свойств (1) и (2) оператора T_a и условия $L(a, a) > M(a, a)$ это действительно возможно если $\lambda(a) < 1$.

Следующая лемма содержит критерий существования значения $a > 0$, для которого $\lambda(a) = 1$. Заметим, что свойство (2) оператора T_a дает нам возможность заключить, что для a' , большего чем a , выполняется соотношение $\lambda(a') < 1$.

► Лемма 13.2.2. Если $L(1, 1) > M(1, 1)$ и существует такое значение $\xi_0 \in [0, 1)$, что $L(\xi_0, \xi_0) = M(\xi_0, \xi_0)$, то существует такое значение $a > \xi_0$, что $\lambda(a) = 1$. Аналогично существует такое значение $a^* > \xi_0$, что $\mu(a^*) = 1$.

Доказательство. Пусть ξ_0 означает наибольшее ξ , для которого $M(\xi, \xi) = L(\xi, \xi)$. Так как $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ непрерывны и $L(1, 1) > M(1, 1)$, то для $\xi_0 < \xi \leq 1$ должно быть $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi)$.

Для каждого $a > \xi_0$ операторы T_a, U_a вполне определены; пусть $f^{(a)}$ — собственная функция, соответствующая $\lambda(a)$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$, такого, что $\xi_0 < 1 - \varepsilon$ и $a \in (\xi_0, 1 - \varepsilon)$, нормируем $f^{(a)}$ так, чтобы

$$\int_a^{1-\varepsilon} f^{(a)}(\xi) d\xi = 1.$$

Это возможно, так как функция $f^{(a)}(\xi)$ в интервале $[a, 1 - \varepsilon]$ строго положительна.

¹⁾ С соответствующими изменениями (лат.). — Прим. перев.

По условию (в), существует постоянная $c > 0$, для которой

$$\begin{aligned} -L_{\eta}(\xi, \eta) &> c & (\xi \leq \eta \leq 1 - \varepsilon), \\ -M_{\eta}(\xi, \eta) &> c & (\eta \leq \xi \leq 1 - \varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно, если $\xi_0 < a \leq \eta \leq 1 - \varepsilon$, то

$$\begin{aligned} 0 < c &= c \int_a^{1-\varepsilon} f^{(a)}(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \int_a^{\eta} -L_{\eta}(\xi, \eta) f^{(a)}(\xi) d\xi + \int_{\eta}^{1-\varepsilon} -M_{\eta}(\xi, \eta) f^{(a)}(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \int_a^{\eta} -L_{\eta}(\xi, \eta) f^{(a)}(\xi) d\xi + \int_{\eta}^1 -M_{\eta}(\xi, \eta) f^{(a)}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Так как $T_a f^{(a)} = \lambda(a) f^{(a)}$, последнее выражение равно $[L(\eta, \eta) - M(\eta, \eta)] \lambda(a) f^{(a)}(\eta)$. Следовательно,

$$0 < \frac{c}{L(\eta, \eta) - M(\eta, \eta)} \leq \lambda(a) f^{(a)}(\eta). \quad (13.2.6)$$

Кроме того, поскольку частные производные L и M ограничены, существует такая постоянная c , что

$$\begin{aligned} L(\eta, \eta) - M(\eta, \eta) &= \\ &= [L(\eta, \eta) - M(\eta, \eta)] - [L(\xi_0, \xi_0) - M(\xi_0, \xi_0)] \leq C(\eta - \xi_0). \end{aligned}$$

Теперь из (13.2.6) следует, что

$$0 < \frac{c'}{\eta - \xi_0} \leq \lambda(a) f^{(a)}(\eta).$$

Интегрируя последнее уравнение на интервале $[a, 1 - \varepsilon]$, мы получаем

$$c' \int_a^{1-\varepsilon} \frac{d\eta}{\eta - \xi_0} \leq \lambda(a) \int_a^{1-\varepsilon} f^{(a)}(\eta) d\eta = \lambda(a).$$

Таким образом,

$$\lambda(a) \geq c' \log \frac{1 - \varepsilon - \xi_0}{a - \xi_0}.$$

Выражение, стоящее справа, при $a \rightarrow \xi_0$ неограниченно возрастает. Так как при $a \rightarrow 1$ $\lambda(a) \rightarrow 0$ и $\lambda(a)$ — непрерывная монотонная функция, то существует a , для которого $\lambda(a) = 1$, $\xi_0 < a < 1$. Подобное утверждение устанавливает существование a^* , для которого $\mu(a^*) = 1$, и заканчивает доказательство леммы.

Наша цель, разумеется, состоит в том, чтобы выразить оптимальные стратегии для игры с ядром $K(\xi, \eta)$ в явном виде. В описании решений очень важную роль играют собственные функции оператора T_a , соответствующие собственному значению $\lambda(a)=1$. Однако может случиться, что не существует значения a ($0 \leq a \leq 1$), для которого $\lambda(a)=1$ или $\mu(a)=1$. На основании леммы 13.2.2 и монотонности $\lambda(a)$, $\mu(a)$ это может произойти только, если неравенство $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi)$ выполнено для всех ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) и $\lambda(0) < 1$, $\mu(0) < 1$. В этом случае наши потребности обслуживает новый класс функций, который состоит из функций вида

$$g_a = (I - U_a)^{-1}(\gamma q_0 + \delta q_1) = \gamma(I - U_a)^{-1}q_0 + \delta(I - U_a)^{-1}q_1$$

и

$$f_a = (I - T_a)^{-1}(\alpha p_0 + \beta p_1),$$

где p_0 , q_0 , p_1 , q_1 — функции, определенные в (13.2.2) и (13.2.3), а α , β , γ , δ — неотрицательные параметры, которые нужно определить.

Описание оптимальных стратегий для $K(\xi, \eta)$. Существует много типов решений игр с выбором момента времени. Принадлежность игры к тому или иному типу зависит от величин $L(\xi, \xi)$ и $M(\xi, \xi)$ и от значений $K(\xi, \eta)$ в угловых точках единичного квадрата. Необходимо дать взаимно исключающую классификацию всех возможностей одновременно с их перечислением; это сделано в табл. 13.1. Для первой группы ядер $K(\xi, \eta)$ (случай А в табл. 13.1) имеет место неравенство $L(1, 1) \leq M(1, 1)$; в этом случае решения образуют седловую точку. Для оставшихся ядер, как мы показали (лемма 13.2.2), могут быть определены операторы T_a и U_a ; поэтому здесь наиболее простой оказывается классификация по значениям радиусов $\lambda(a)$ для оператора T_a и $\mu(a)$ для оператора U_a . Таким образом, вторая группа функций выигрыша (случаи Б, В и Г) состоит из таких функций, для которых существует такое a , что $\lambda(a)=1$ или $\mu(a)=1$, или оба эти значения равны единице. Из леммы 13.2.2 следует, что любое ядро, для которого существует такое $\xi_0 \in [0, 1)$, что $L(\xi_0, \xi_0) = M(\xi_0, \xi_0)$, будет принадлежать ко второй группе. Если такого ξ_0 не существует, то $\lambda(a)$ и $\mu(a)$ определены для любого $0 \leq a \leq 1$ и представляют собой монотонные функции, убывающие к нулю при $a \rightarrow 1$. В этом случае, если ядро таково, что либо $\lambda(0) \geq 1$, либо $\mu(0) \geq 1$, игра также принадлежит ко второй группе.

В остальных случаях ядра $K(\xi, \eta)$ должны удовлетворять условиям $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi)$ ($0 \leq \xi \leq 1$) и $\lambda(0) < 1$, $\mu(0) < 1$. Мы подразделяем их на два класса: группа 3 состоит из ядер, для которых $L(0, 1) < M(1, 0)$, группа 4 — из ядер, для которых $L(0, 1) \geq M(1, 0)$. Виды решений для различных групп приведены в табл. 13.1.

Таблица 13.1

Функция выигрыша	Оптимальная F	Оптимальная G
Группа 1: А $L(1, 1) \leq M(1, 1)$	(I_1)	(I_1)
Группа 2: Б $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi) \quad a \leq \xi \leq 1$ $\lambda(a) = 1, \mu(a) < 1$ В $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi) \quad a \leq \xi \leq 1$ $\lambda(a) = 1, \mu(a) = 1$ Г $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi) \quad a \leq \xi \leq 1$ $\lambda(a) < 1, \mu(a) = 1$ Если существует такое $\xi_0 \in [0, 1]$, что $L(\xi_0, \xi_0) = M(\xi_0, \xi_0)$, то имеют место случаи Б, В или Г	(f_a) (f_a) $(f_a, \beta I_1)$	$(g_a, \delta I_1)$ (g_a) (g_a)
Группа 3: $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1$ $\mu(0) < 1, \lambda(0) < 1$ $L(0, 1) < M(1, 0)$ Д $\Phi(0) = L(0, 0)$ Е $L(0, 0) > \Phi(0) > S_0$ Ж $\Phi(0) = S_0$ З $S_0 > \Phi(0) > M(0, 0)$ И $\Phi(0) = M(0, 0)$	$(\alpha I_0, f_0)$ $(\alpha I_0, f_a)$ $(\alpha I_0, f_a)$ $(\alpha I_0, f_a, \beta I_1)$ $(f_a, \beta I_1)$	$(g_0, \delta I_1)$ $(\gamma I_0, g_a, \delta I_1)$ $(\gamma I_0, g_a)$ $(\gamma I_0, g_a)$ $(\gamma I_0, g_0)$
Группа 4: $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1$ $\mu(0) < 1, \lambda(0) < 1$ $L(0, 1) \geq M(1, 0)$ К $L(0, 1) \geq \Phi(0) \geq M(1, 0)$ Л $L(0, 0) > \Phi(0) > L(0, 1)$ М $L(0, 0) = \Phi(0)$ Н $M(1, 0) > \Phi(0) > M(0, 0)$ О $\Phi(0) = M(0, 0)$	(I_0) $(\alpha I_0, f_a)$ $(\alpha I_0, f_0)$ $(\alpha I_0, f_a, \beta I_1)$ $(f_0, \beta I_1)$	(I_0) $(\gamma I_0, g_a, \delta I_1)$ $(g_0, \delta I_1)$ $(\gamma I_0, g_a)$ $(\gamma I_0, g_0)$

Для понимания табл. 13.1 напомним читателю, что равенство

$$x = (\alpha I_0, f_a, \beta I_1)$$

означает, что стратегия x является распределением, состоящим из плотности f_a на интервале $[a, 1]$ и двух скачков величины α и β соответственно в точках 0 и 1; стратегия

$$y = (\gamma I_0, g_a, \delta I_1)$$

имеет аналогичную интерпретацию. Если какая-нибудь из величин $\alpha, \beta, f_a, \gamma, \delta$ или g_a пропущена, то это следует понимать, как ее равенство нулю. Например, $x = (\alpha I_0, f_a)$ означает, что $\beta = 0$, а остальные компоненты имеют прежнюю интерпретацию. В описании оптимальных стратегий группы 3 появляется новая величина S_0 . Значение этого символа рассматривается в п. 13.4.

► Теорема 13.2.1. *Оптимальные стратегии для функции выигрыша $K(\xi, \eta)$ в играх с выбором момента времени с неполной информацией единственны и имеют вид, указанный в табл. 13.1. Кроме того, плотности f_a являются либо решениями уравнения $T_a f_a = f_a$, либо представляются рядом Неймана вида*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_a^n (\alpha p_0 + \beta p_1).$$

Аналогичное утверждение имеет место и для g_a .

Существование и полное построение этих решений будут обсуждаться в п. 13.4. Единственность этих решений устанавливается в задачах 16—19.

13.3*. Интегральные уравнения с положительными ядрами. Мы отвлекаемся здесь от темы, для того чтобы проверить свойства интегральных операторов, сформулированные в предыдущем пункте.

Рассмотрим общий интегральный оператор

$$\int_a^b A(\xi, \eta) f(\eta) d\eta,$$

или, в операторной форме, Af . (Повсюду в этом пункте интегральные выражения имеют фиксированные пределы a, b , если явно не сказано противоположное). Мы предположим, что ядро удовлетворяет условию

$$A(\xi, \eta) \geq 0, \quad (13.3.1a)$$

где точки, в которых $A = 0$, образуют на каждой прямой $\xi = \text{const}$ или $\eta = \text{const}$ точечное множество, не содержащее множеств поло-

жительной меры Лебега. Мы предполагаем также, что

$$A(\xi, \eta) \leq C \quad (13.3.16)$$

и что

$$\begin{aligned} \int |A(\xi_2, \eta) - A(\xi_1, \eta)| d\eta &\rightarrow 0, \\ \int |A(\xi, \eta_2) - A(\xi, \eta_1)| d\xi &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (13.3.1в)$$

если $|\xi_2 - \xi_1| \rightarrow 0$ или соответственно $|\eta_2 - \eta_1| \rightarrow 0$.

Пусть $\wp$ является множеством всех ограниченных функций f , определенных на интервале $[a, b]$. Область определения A в дальнейшем ограничивается множеством $\wp$.

Если, в частности, f ограничена в $[a, b]$, то из (13.3.1а — 13.3.1в) следует, что

$$\int A(\xi, \eta) f(\eta) d\eta \quad \text{и} \quad \int A(\xi, \eta) f(\xi) d\xi$$

являются непрерывными функциями соответственно ξ и η , и если вдобавок функция f неотрицательна, непрерывна и не равна тождественно нулю, то эти выражения имеют положительный минимум. Первое утверждение является простым следствием критерия сходимости Лебега (см. п. В.3); второе справедливо вследствие (13.3.1а). Оформим эти утверждения как теорему.

► Теорема 13.3.1. *Преобразование A , удовлетворяющее условиям (13.3.1а) — (13.3.1в), переводит не тождественно равные нулю, неотрицательные непрерывные функции в строго положительные непрерывные функции.*

Другим полезным свойством таких интегральных преобразований является тот факт, что они представляют собой вполне непрерывные преобразования, определенные на $\wp$. Точная формулировка этого свойства дается в следующей теореме.

► Теорема 13.3.2. *Оператор A преобразует семейство равномерно ограниченных функций в равностепенно непрерывное семейство функций (определение равностепенной непрерывности см. в п. В.1).*

Доказательство немедленно следует из (13.3.1в).

► Следствие 13.3.1. *Если f_α — семейство равномерно ограниченных функций на $[a, b]$, то мы можем выбрать подпоследовательность из $g_\alpha = Af_\alpha$, которая сходится равномерно к непрерывной функции.*

Это прямое следствие из классической теоремы Асколи, касающейся равностепенно непрерывных семейств функций (см. п. В.1).

Последнее замечание, которое мы используем позже, состоит в том, что если $f \geq 0$ и $\int f = 1$, то

$$\int g \geq \min_{\xi} \int A(\xi, \eta) d\eta > 0, \quad (13.3.2)$$

где $g = Af$.

Приведем основную теорему о существовании положительных собственных значений и строго положительных собственных функций.

► Теорема 13.3.3. Пусть $\lambda_0(A)$ означает спектральный радиус A . Тогда

(а) $\lambda_0(A)$ строго положительное собственное число, которому соответствует строго положительная непрерывная собственная функция f_0 .

(б) если $Af = \lambda_0(A)f$, то f является кратным f_0 .

Сравним эту теорему с теоремой 8.2.1. Доказательство проводится с помощью приспособления конечномерного анализа положительных матричных преобразований к случаю интегрального оператора A .

Доказательство. Говорят, что вещественное число λ является допустимым, если существует такая определенная на $[a, b]$ непрерывная, не равная тождественно нулю, неотрицательная функция f , что $Af \geq \lambda f$, где неравенство выполняется для каждого значения аргумента ξ в интервале $[a, b]$. Функция f в неравенстве называется иногда функцией определения или проверки λ .

Так как соотношение $Af \geq \lambda f$ является однородным, мы можем, не умаляя общности, нормировать все f , которые определяют допустимые значения λ , условием $\int f = 1$. Ясно, что

$$\mu = \min_{a \leq \xi \leq b} \int A(\xi, \eta) d\eta$$

является допустимым значением с функцией проверки $f \equiv 1/(b-a)$. Пусть

$$M = \max_{a \leq \xi \leq b} \int A(\xi, \eta) d\eta.$$

Отсюда ясно, что любое допустимое λ ограничено числом M .

Пусть $\lambda_0 = \sup \lambda$, где супремум берется по всем возможным допустимым значениям λ . Можно показать, что значение λ_0 также является допустимым. Требование компактности, необходимое для доказательства этого утверждения, выполняется, так как оператор A вполне непрерывен. Пусть $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, а f_n — ненулевая неотрицательная функция, удовлетворяющая условиям $\int f_n = 1$ и $Af_n \geq \lambda_n f_n$. Функ-

ции f_n равномерно ограничены ввиду (13.3.16). Кроме того, поскольку A сохраняет положительность и линейность, мы имеем $Ag_n \geq \lambda_n g_n$, где $g_n = Af_n$ — равностепенно непрерывное семейство функций (теорема 13.3.2), интегралы которых равномерно ограничены снизу в соответствии с (13.3.2). Для того чтобы показать, что f_0 является допустимым значением, можно использовать любую предельную точку g_n .

Предположим, что f_0 ненулевая неотрицательная непрерывная функция, такая, что $Af_0 \geq \lambda_0 f_0$. Покажем, что в этом соотношении всегда имеет место равенство. Предположим противное; тогда, поскольку A преобразует ненулевые неотрицательные непрерывные функции в строго положительные непрерывные функции, мы получаем, что $Ag_0 \geq (\lambda_0 + \epsilon) g_0$ для $g_0 = Af_0$ и $\epsilon > 0$. Это противоречит определению λ_0 .

Покажем теперь, что λ_0 равно спектральному радиусу. Для этого достаточно показать, что любое другое собственное число λ^* меньше по модулю чем λ_0 . Но если $Af^* = \lambda^* f^*$, то $A|f^*| \geq \lambda^* |f^*|$, где $|f^*| = |f^*(\xi)|$, так что из самого определения λ_0 мы можем заключить, что $\lambda_0 \geq |\lambda^*|$. Наконец, покажем, что любая собственная функция $\bar{f}$, соответствующая собственному значению λ_0 , является кратным f_0 . Не умаляя общности, мы можем предположить, что функция $\bar{f}$ вещественная. Так как функция f_0 строго положительна, мы можем найти такую константу γ , что функция $f_0 + \gamma \bar{f}$ неотрицательна для $a \leq \xi \leq b$ и равна нулю для остальных ξ . Так как функция

$$A(f_0 + \gamma \bar{f}) = \lambda_0(f_0 + \gamma \bar{f})$$

строго положительна или равна нулю, мы получаем, что $\bar{f}$ кратна f_0 , как и утверждалось. Это заканчивает доказательство.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы вывести абстрактный ряд Неймана для интегрального уравнения второго рода с ядром A .

► Теорема 13.3.4. Если $\lambda > \lambda_0(A)$, то

$$\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n},$$

где $A^0 = I$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n} f = g$$

представляет собой равномерно сходящийся ряд для любой ограниченной положительной функции f и что

$$\left(I - \frac{A}{\kappa}\right)g = f.$$

Пусть f_0 — строго положительная непрерывная собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_0(A)$. Такая собственная функция существует вследствие теоремы 13.3.3. Так как f_0 — строго положительная непрерывная функция, мы можем определить константу c так, что

$$f \leq c f_0.$$

Но A сохраняет положительность и, следовательно,

$$A^n f \leq c \lambda_0^n f_0.$$

Отсюда мы видим, что ряд равномерно и абсолютно ограничен, с точностью до постоянного множителя, сходящейся геометрической прогрессией. Прямая проверка равенства $(I - A/\lambda)g = f$ не вызывает затруднений; таким образом, доказательство теоремы 13.3.4 закончено.

Наш следующий результат относится к поведению $\lambda_0(A)$ как функции A . Именно пусть $\tilde{A}$ означает другой интегральный оператор, порожденный ядром $\tilde{A}(\xi, \eta)$, определенным на квадрате $a' \leq \xi, \eta \leq b'$ ($a' \leq a, b' \geq b$) и удовлетворяющим (13.3.1a) — (13.3.1в) на более широком интервале. Предположим, кроме того, что

$$\tilde{A}(\xi, \eta) \geq A(\xi, \eta) \quad (a \leq \xi, \eta \leq b).$$

Покажем, что

$$\lambda_0(\tilde{A}) \geq \lambda_0(A). \quad (13.3.3)$$

Следует напомнить, что $\lambda_0(A)$ было определено в доказательстве теоремы 13.3.3 как наибольшее допустимое значение λ , для которого $Af \geq \lambda f$, где функция f непрерывна, $f \geq 0$ и

$$\int_a^b f = 1.$$

Небольшое видоизменение нашего анализа допускает такую же характеристику $\lambda_0(A)$ для всех функций f , удовлетворяющих тому же условию нормировки, но имеющих разрывы только первого рода.

Величина $\lambda_0(\tilde{A})$ может быть охарактеризована подобным же образом. Пусть λ допустимо для A , и пусть f обозначает соответ-

ствующую функцию проверки. Распространим f на интервал $[a', b']$, полагая $f = 0$ вне $[a, b]$. Тогда

$$\int_{a'}^{b'} \tilde{A}(\xi, \eta) f(\eta) d\eta \geq \int_a^b A(\xi, \eta) f(\eta) d\eta \geq \lambda f(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b);$$

это же неравенство тривиально выполняется на $[a', b']$. Следовательно, любое допустимое λ для A является допустимым и для $\tilde{A}$, что и выражает неравенство (13.3.3).

Теми же способами мы можем проверить свойства непрерывности $\lambda_0(A)$ и ее собственной функции, как функции A . Формальные детали этих выкладок мы опускаем.

Мы заканчиваем этот пункт замечанием о том, что T_a и U_a , определенные в (13.2.2) и (13.2.3), удовлетворяют условиям (13.3.1a) — (13.3.1в). Условие (13.3.1a) выполняется вследствие условия (в) п. 13.2; условие (13.3.1б) очевидно, а справедливость условия (13.3.1в) устанавливается следующим образом: предположим, что $\xi_2 > \xi_1$ и $\xi_2 - \xi_1 < \varepsilon$; тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b |T(\xi_1, \eta) - T(\xi_2, \eta)| d\eta &\leq \int_a^{\xi_1 - \varepsilon} |T(\xi_1, \eta) - T(\xi_2, \eta)| d\eta + C\varepsilon + \\ &+ \int_{\xi_2 + \varepsilon}^b |T(\xi_1, \eta) - T(\xi_2, \eta)| d\eta, \end{aligned}$$

где C — фиксированная постоянная. Но оператор T равномерно непрерывен в соответствующих треугольных областях интеграла, стоящего справа, и, следовательно,

$$\int_a^b |T(\xi_1, \eta) - T(\xi_2, \eta)| d\eta \rightarrow 0, \text{ когда } |\xi_1 - \xi_2| \rightarrow 0.$$

Применяя теорему 13.3.3, мы получаем равенство $T_a f^{(a)} = \lambda(a) f^{(a)}$, где $\lambda(a)$ — наибольшее собственное значение оператора T_a и $f^{(a)}$ — положительная непрерывная собственная функция, нормализованная таким образом, что $\int f^{(a)}(\xi) d\xi = 1$.

Другие утверждения, т. е. свойства (2) и (3) на стр. 521, следуют из теорем 13.3.1 — 13.3.4. Покажем, например, что $\lambda(a)$ — непрерывная монотонно-убывающая функция a . Монотонность $\lambda(a)$ легко следует из (13.3.3). Остается показать, что $\lambda(a) \leq \lambda(a') + \varepsilon$ для заранее заданного $\varepsilon > 0$, когда a' достаточно близко к a и

$a' > a$. Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} \lambda(a) f^{(a)}(\eta) &= \int_a^1 T(\xi, \eta) f^{(a)}(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \int_{a'}^1 T(\xi, \eta) f^{(a)}(\xi) d\xi + \delta, \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

справедливость которого следует из равномерной ограниченности $f^{(a)}(\xi)$ для $a' < \xi < a$; здесь, очевидно, $\delta > 0$ стремится к нулю, когда $a' - a \rightarrow 0$. Ввиду того что $f^{(a)}(\eta)$ равномерно ограничена снизу (в a и a') для всех $a' \leq \eta \leq 1$, когда $a' - a \leq \varepsilon$ (в противном случае может быть опровергнута строгая положительность ядра T), мы можем переписать (13.3.4) в виде

$$[\lambda(a) - \varepsilon] f^{(a)}(\eta) \leq \int_{a'}^1 T(\xi, \eta) f^{(a)}(\xi) d\xi \quad (a' \leq \eta \leq 1)$$

для подходящего ε , где $\varepsilon \rightarrow 0$, когда $a' \rightarrow a$. Следовательно, значение $\lambda(a) - \varepsilon$ допустимо для $T_{a'}$, и поэтому $\lambda(a') \geq \lambda(a) - \varepsilon$. Более тщательный анализ этого доказательства показывает, что $\lambda(a)$ — строго монотонная функция. Оставшиеся части свойств (2) и (3) доказываются аналогичными методами. Эти доказательства предоставляются читателю в качестве упражнений.

13.4. Доказательство существования.

Оптимальные стратегии для ядер группы 1

► Лемма 13.4.1. Если $L(1, 1) \leq M(1, 1)$, то точка $\{1, 1\}$ является седловой точкой (дает пару чистых оптимальных стратегий) ядра $K(\xi, \eta)$, и оба игрока имеют оптимальную стратегию (I_1) .

Доказательство. Условие (б) (стр. 512) предполагает, что $M(1, 1) \geq \Phi(1) \geq L(1, 1)$, а условие (в) предполагает, что $M(1, \eta) \geq M(1, 1)$ и $L(\xi, 1) \leq L(1, 1)$. Следовательно,

$$K(1, \eta) \geq \Phi(1) \geq K(\xi, 1) \quad (\text{для всех } \xi, \eta)$$

и

$$K(1, \eta) \geq K(1, 1) \geq K(\xi, 1) \quad (\text{для всех } \xi, \eta).$$

Последнее уравнение показывает, что точка $\{1, 1\}$ является седловой. Значение игры равно $\Phi(1)$.

Оптимальные стратегии для ядер группы 2

► Лемма 13.4.2. Если $L(1, 1) > M(1, 1)$ и существует такое ξ_0 ($0 \leq \xi_0 < 1$), что $L(\xi_0, \xi_0) = M(\xi_0, \xi_0)$, то существуют оптимальные стратегии следующего вида: плотности f_a, g_a на общем интервале $[a, 1]$ и возможный скачок в 1 для одного из двух игроков.

Доказательство. Лемма 13.2.2 утверждает, что в интервале $(\xi_0, 1)$ существуют такие a и a^* , что $\lambda(a) = 1$, $\mu(a^*) = 1$. Кроме того, поскольку спектральный радиус является строго убывающей функцией [свойство (2), стр. 521], то из $a > a^*$ следует $\mu(a) < 1$, из $a = a^*$ следует $\lambda(a) = \mu(a) = 1$, а из $a < a^*$ следует $\mu(a^*) = 1$ и $\lambda(a^*) < 1$.

Рассмотрим случай $\lambda(a) = 1$, $\mu(a) < 1$. Так как $\lambda(a) = 1$, уравнение $T_a f_a = f_a$ имеет строго положительное решение f_a . Нормируем эту функцию так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_a^1 f_a(\xi) d\xi = 1,$$

и положим

$$u(a) = \int_a^\eta L(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi + \int_\eta^1 M(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi. \quad (13.4.1)$$

Ясно, что $u(a)$ не зависит от η ($a \leq \eta \leq 1$), так как дифференцирование приводит к равенству

$$\begin{aligned} [L(\eta, \eta) - M(\eta, \eta)] \{f_a(\eta)\} + \int_a^\eta L_\eta(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi + \\ + \int_\eta^1 M_\eta(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi = 0, \end{aligned}$$

которое равносильно выражению

$$f_a - T_a f_a = 0.$$

Распространим $f_a(\xi)$ за интервал $[a, 1]$, полагая вне этого интервала $f_a(\xi) = 0$. Если игрок I применяет стратегию f_a , а игрок II — чистую стратегию, сосредоточенную в η ($0 \leq \eta \leq a$), то выигрыш игрока I равен

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi = \int_a^1 M(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi \geq \int_a^1 M(\xi, a) f_a(\xi) d\xi = u(a).$$

Неравенство возникает здесь как следствие условия (в), наложенного на ядро $K(\xi, \eta)$. С другой стороны, если $a \leq \eta \leq 1$, то выигрыш определяется посредством (13.4.1). Следовательно, игрок I может получить выигрыш, равный по крайней мере $u(a)$.

Чтобы определить стратегию игрока II, положим

$$g = (I - U_a)^{-1} q_1,$$

где q_1 является функцией из (13.2.3). Так как $\mu(a) < 1$, функция g существует и может быть вычислена с помощью ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (U_a)^n q_1.$$

Пусть

$$c = \int_a^1 g(\eta) d\eta$$

и $\delta = 1/(1 + c)$. Наконец, пусть $g_a(\eta) = \delta g(\eta)$ ($a \leq \eta \leq 1$); и $g_a(\eta) = 0$ для остальных η .

Из этого определения следует, что $y^0 = (g_a, \delta I_1)$ является стратегией игрока II. Покажем, что эта стратегия оптимальна. По определению функции g_a , имеет место равенство

$$(I - U_a) g_a = \delta q_1 \quad (a \leq \xi \leq 1).$$

Положим

$$w(a, \delta) = \delta L(\xi, 1) + \int_a^{\xi} M(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta + \int_{\xi}^1 L(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta \quad (13.4.2)$$

$$(a \leq \xi \leq 1).$$

Тогда после дифференцирования видно, что выражение $w(a, \delta)$ постоянно и не зависит от ξ . Анализ, параллельный анализу, проведенному для равенства (13.4.1), приводит к соотношению

$$\int_a^1 K(\xi, \eta) dy^0(\eta) < w(a, \delta) \quad (0 \leq \xi < a),$$

так как уравнение (13.4.2) представляет выигрыш игрока I для $a \leq \xi \leq 1$. Для $\xi = 1$ выигрыш равен

$$w(a, \delta) + \delta [\Phi(1) - L(1, 1)] \leq w(a, \delta).$$

Игрок II, применяя стратегию y^0 , может помешать игроку I получить выигрыш, больший чем $w(a, \delta)$. Но

$$\begin{aligned} w(a, \delta) &= w(a, \delta) \int_a^1 dx^0(\xi) = \int_a^1 \int_a^1 K(\xi, \eta) dx^0(\xi) dy^0(\eta) = \\ &= u(a) \int_a^1 dy^0(\eta) = u(a), \end{aligned}$$

где x^0 — стратегия с плотностью $f_a(\xi)$. Следовательно, значение игры равно $u(a)$, и стратегии x^0 и y^0 оптимальные.

Для того чтобы завершить доказательство леммы, мы должны рассмотреть случаи $\lambda(a) = \mu(a) = 1$ и $\lambda(a^*) < 1$, $\mu(a^*) = 1$. Ясно, что если $\lambda(a^*) < 1$ и $\mu(a^*) = 1$, то рассуждение, параллельное предыдущему, покажет, что решение g_{a^*} задачи $U_{a^*} g_{a^*} = g_{a^*}$ на отыскание собственной функции является оптимальной стратегией игрока II, в то время как стратегия вида $(f_{a^*}, \beta I_1)$ оптимальна для игрока I. Если $\lambda(a) = \mu(a) = 1$, то доказательство более ясное и простое: оптимальные стратегии состоят только из плотностей, полученных как решения задач на отыскание собственных функций $T_a f_a = f_a$ и $U_a g_a = g_a$.

Заметим, что пример 2 (стр. 510—513) относится к группе 2, случай Б, при $a = 1/3$.

► Лемма 13.4.3. Если $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi)$ ($0 \leq \xi \leq 1$) и существует значение a ($0 \leq a < 1$), для которого либо $\lambda(a) = 1$, либо $\mu(a) = 1$, то имеет место один из трех случаев В, С или D табл. 13.1 и существуют оптимальные стратегии указанного в таблице вида.

Доказательство. Так как $\lambda(a)$ и $\mu(a)$ убывают при $a \rightarrow 1$ непрерывно и монотонно до нуля, то существует значение a' ($0 \leq a' \leq 1$), для которого либо $\lambda(a') = 1$, а $\mu(a') < 1$, либо $\lambda(a') = \mu(a') = 1$, либо $\lambda(a') < 1$, а $\mu(a') = 1$. Дальнейшее доказательство совпадает теперь с доказательством предыдущей леммы.

Итак, мы доказали существование и указали вид оптимальных стратегий для ядер группы 2 в табл. 13.1.

Обратимся теперь к играм, ядра которых принадлежат к группе 3. Так как мы исчерпали все другие возможности, мы можем предполагать в дальнейшем, что $L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi)$ ($0 \leq \xi \leq 1$), $\lambda(0) < 1$, $\mu(0) < 1$.

При этих предположениях операторы T_a и U_a являются вполне определенными, строго положительными преобразованиями для любого

$a (0 \leq a \leq 1)$. Кроме того, для любого a существуют операторы $(I - T_a)^{-1}$ и $(I - U_a)^{-1}$, которые преобразуют положительные непрерывные функции в строго положительные функции. Из соотношения $\lambda(a) < 1$ следует, что $(I - T_a)^{-1} p = \sum T_a^n p$ и что оператор $(I - T_a)^{-1}$ непрерывен по a [см. свойство (3), стр. 521]; следовательно, если $f_a = (I - T_a)^{-1} p$ ¹⁾, то

$$\lim_{a \rightarrow 1} (I - T_a)^{-1} p = I^{-1} p = p;$$

при этом сходимость равномерна по ξ и, таким образом,

$$\lim_{a \rightarrow 1} \int_a^1 f_a(\xi) d\xi = \lim_{a \rightarrow 1} \int_a^1 p(\xi) d\xi = 0 \quad (13.4.3)$$

для любой непрерывной функции p . Аналогичные замечания справедливы для $(I - U_a)^{-1}$.

Построим теперь семейство стратегий игры следующим образом. Положим

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (I - T_a)^{-1} p_0, \quad \varphi_1 = (I - T_a)^{-1} p_1, \\ f_a &= (I - T_a)^{-1} (\alpha p_0 + \beta p_1) = \alpha \varphi_0 + \beta \varphi_1, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta \geq 0$, а p_0, p_1 — функции, определенные соотношением (13.2.2). Предполагается, что параметры α, β всегда связаны соотношением

$$\alpha \int_a^1 \varphi_0 + \beta \int_a^1 \varphi_1 = 1 - \alpha - \beta. \quad (13.4.4)$$

Ясно, что при такой нормировке $x = (\alpha I_0, f_a, \beta I_1)$ является стратегией в игре. Для каждого $\eta (a \leq \eta \leq 1)$ образуем функцию

$$\begin{aligned} u(a, \alpha, \beta) &= \alpha L(0, \eta) + \beta M(1, \eta) + \int_a^\eta L(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi + \\ &\quad + \int_\eta^1 M(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (13.4.5)$$

которая не зависит от η , так как, дифференцируя это выражение по η , мы получаем $\alpha p_0 + \beta p_1 = (I - T_a) f_a$. Кроме того, ввиду моно-

¹⁾ Заметим, что функция $(I - T_a)^{-1} p$ в этом доказательстве определена для всех η из $[0, 1]$.

тонности и непрерывности функций $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ [условие (в), стр. 517] мы имеем

$$u(a, \alpha, \beta) < \alpha L(0, \eta) + \beta M(1, \eta) + \int_a^1 M(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi \quad (13.4.6)$$

$$(0 \leq \eta < a).$$

Подобным же образом мы определяем плотность

$$g_a = (I - U_a)^{-1}(\gamma q_0 + \delta q_1) = \gamma \psi_0 + \delta \psi_1$$

и нормируем ее так, чтобы

$$\gamma \int_a^1 \psi_0 + \delta \int_a^1 \psi_1 = 1 - \gamma - \delta \quad (13.4.7)$$

и $y = (\gamma I_0, g_a, \delta I_1)$ было стратегией. Аналогичные рассуждения показывают, что

$$w(a, \gamma, \delta) = \gamma M(\xi, 0) + \delta L(\xi, 1) + \int_a^\xi M(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta +$$

$$+ \int_\xi^1 L(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta \quad (a \leq \xi \leq 1) \quad (13.4.8)$$

не зависит от ξ и что

$$w(a, \gamma, \delta) > \gamma M(\xi, 0) + \delta L(\xi, 1) + \int_a^1 L(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta \quad (0 < \xi < a).$$

Для $0 < \eta < 1$ уравнения (13.4.5) и (13.4.6) описывают выигрыш игрока I, когда он применяет стратегию x , а игрок II применяет чистую стратегию η . Поэтому мы имеем

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) \geq u(a, \alpha, \beta) \quad (0 < \eta < 1).$$

Подобным же образом получаем соотношение

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dy(\eta) \leq w(a, \gamma, \delta) \quad (0 < \xi < 1).$$

Мы имеем теперь в нашем распоряжении пять параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a$ [подчиненных только ограничениям, наложенным равенствами

(13.4.4) и (13.4.7), и условиям $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ и $0 \leq a \leq 1$, которые, как мы покажем, могут быть выбраны в каждом из случаев Д—И группы 3 так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

$$u(a; \alpha, \beta) = w(a; \gamma, \delta),$$

$$\int_0^1 K(0, \eta) d\gamma(\eta) \leq w(a; \gamma, \delta), \quad \int_0^1 K(1, \eta) d\gamma(\eta) \leq w(a; \gamma, \delta)$$

и

$$\int_0^1 K(\xi, 0) d\alpha(\xi) \geq u(a; \alpha, \beta), \quad \int_0^1 K(\xi, 1) d\alpha(\xi) \geq u(a; \alpha, \beta).$$

Когда эти условия выполнены, мы имеем

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) d\alpha(\xi) \geq u(a, \alpha, \beta) = v = w(a, \gamma, \delta) \geq \int_0^1 K(\xi, \eta) d\gamma(\eta)$$

для всех ξ и η , так что v — значение игры, а x и y — оптимальные стратегии игроков.

В оставшейся части этого пункта следует иметь в виду, что $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ и $0 \leq a \leq 1$. Заметим особо, что мы можем принять α или β равными нулю; в этом случае $\beta \int_a^1 \varphi_1 = 1 - \beta$ или $\beta = \left(1 + \int_a^1 \varphi_1\right)^{-1}$, так что β — непрерывная функция a . В более общем случае мы можем требовать, чтобы α и β имели фиксированное отношение r ($0 \leq r \leq \infty$); в этом случае α — непрерывная функция a и, следовательно, $u(a; \alpha, \beta)$ — непрерывная функция a . Справедливы аналогичные замечания относительно γ и δ .

► Лемма 13.4.4. Если

$$L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi) \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

и

$$\lambda(0) < 1, \quad \mu(0) < 1,$$

то

$$u(0, \alpha, \beta) - w(0, \gamma, \delta) = \alpha\gamma [L(0, 0) - M(0, 0)] + \\ + \beta\delta [M(1, 1) - L(1, 1)].$$

Доказательство. Подставляя $a=0$ в уравнения (13.4.5) и (13.4.8) и подставляя в эти уравнения $\eta=0$, $\xi=0$, $\eta=1$, $\xi=1$,

мы получаем

$$u(0, \alpha, \beta) = \alpha L(0, 0) + \beta M(1, 0) + \int_0^1 M(\xi, 0) f_0(\xi) d\xi,$$

$$w(0, \gamma, \delta) = \gamma M(0, 0) + \delta L(0, 1) + \int_0^1 L(0, \eta) g_0(\eta) d\eta,$$

$$u(0, \alpha, \beta) = \alpha L(0, 1) + \beta M(1, 1) + \int_0^1 L(\xi, 1) f_0(\xi) d\xi,$$

$$w(0, \alpha, \beta) = \gamma M(1, 0) + \delta L(1, 1) + \int_0^1 M(1, \eta) g_0(\eta) d\eta.$$

Если мы умножим (13.4.5) на g_0 , а (13.4.8) на f_0 и проинтегрируем, то получим

$$(1 - \gamma - \delta) u(0, \alpha, \beta) =$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \int_0^1 L(0, \eta) g_0(\eta) d\eta + \beta \int_0^1 M(1, \eta) g_0(\eta) d\eta + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) f_0(\xi) g_0(\eta) d\eta d\xi, \end{aligned}$$

$$(1 - \alpha - \beta) w(0, \gamma, \delta) =$$

$$\begin{aligned} &= \gamma \int_0^1 M(\xi, 0) f_0(\xi) d\xi + \delta \int_0^1 L(\xi, 1) f_0(\xi) d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) f_0(\xi) g_0(\eta) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

Умножая первые четыре уравнения соответственно на γ , α , δ и β , мы можем освободиться от интегралов в последних двух выражениях; производя вычитание, мы получаем

$$u(0, \alpha, \beta) - w(0, \gamma, \delta) =$$

$$= \alpha\gamma [L(0, 0) - M(0, 0)] + \beta\delta [M(1, 1) - L(1, 1)]. \quad (13.4.9)$$

Оптимальные стратегии для ядер группы 3

Мы рассматриваем ядра, которые в дополнение к свойствам, перечисленным выше, удовлетворяют условию $L(0, 1) < M(1, 0)$.

► Лемма 13.4.5. Для любого r существует a , для которого

$$u(a, \alpha, 0) = w(a, \gamma, r\gamma).$$

Аналогично существует a' , для которого

$$u(a', \alpha, r\alpha) = w(a', \gamma, 0).$$

Доказательство. Подставляя $\eta = 1$ в (13.4.5) и $\xi = 1$ в (13.4.8), мы получаем

$$u(a, \alpha, \beta) - \alpha L(0, 1) - \beta M(1, 1) - \int_a^1 L(\xi, 1) f_a(\xi) d\xi = 0,$$

$$w(a, \gamma, \delta) - \gamma M(1, 0) - \delta L(1, 1) - \int_a^1 M(1, \eta) g_a(\eta) d\eta = 0.$$

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать a настолько близким к 1, чтобы

$$\left| u(a, \alpha, \beta) - \alpha L(0, 1) - \beta M(1, 1) - L(1, 1) \int_a^1 f_a(\xi) d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left| w(a, \gamma, \delta) - \gamma M(1, 0) - \delta L(1, 1) - M(1, 1) \int_a^1 g_a(\eta) d\eta \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Мы видели в (13.4.3), что, когда $a \rightarrow 1$,

$$\int_a^1 f_a \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \int_a^1 g_a \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что для a , достаточно близких к 1,

$$|u(a, \alpha, \beta) - w(a, \gamma, \delta) - \{\alpha L(0, 1) + \beta M(1, 1) - \gamma M(1, 0) - \delta L(1, 1)\}| < \varepsilon \quad (13.4.10)$$

для любых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, удовлетворяющих условиям (13.4.4) и (13.4.7).

По предположению, $L(0, 1) < M(1, 0)$, а в силу монотонности

$$L(0, 1) < L(1, 1), \quad M(1, 1) < M(1, 0).$$

Следовательно,

$$\alpha L(0, 1) + \beta M(1, 1) - \gamma M(1, 0) - \delta L(1, 1) \leq (\alpha - \delta) L(0, 1) - (\gamma - \beta) M(1, 0).$$

Кроме того,

$$1 - \alpha - \beta = \int_a^1 f_a \rightarrow 0, \quad \text{когда} \quad a \rightarrow 1,$$

так что $\alpha + \beta \rightarrow 1$. Аналогично $\gamma + \delta \rightarrow 1$ при $a \rightarrow 1$; следовательно, $a - \delta \rightarrow \gamma - \beta$. Но мы предположили, что $L(0, 1) < M(1, 0)$, откуда следует, что

$$\alpha L(0, 1) + \beta M(1, 1) - \gamma M(1, 0) - \delta L(1, 1) < 0$$

для a , достаточно близких к 1. Если мы подставим это соотношение в (13.4.10), то получим неравенство

$$u(a, \alpha, \beta) - w(a, \gamma, \delta) < 0$$

для a , близких к 1.

С другой стороны, лемма 13.4.4 утверждает, что

$$u(0, \alpha, \beta) - w(0, \gamma, \delta) =$$

$$= \alpha \gamma [L(0, 0) - M(0, 0)] + \beta \delta [M(1, 1) - L(1, 1)].$$

Если $\beta = 0$, то из $L(0, 0) > M(0, 0)$ следует, что

$$u(0, \alpha, 0) - w(0, \gamma, \delta) \geq 0.$$

Наконец, поскольку $u(a, \alpha, 0) - w(a, \gamma, r\gamma)$ является непрерывной функцией a , последние два неравенства гарантируют существование значения a' , для которого

$$u(a', \alpha, 0) = w(a', \gamma, r\gamma).$$

Второе утверждение мы можем установить, полагая выше $\delta = 0$.

► Лемма 13.4.6. В условиях леммы 13.4.4 и при $\Phi(0) = L(0, 0)$ игрок I имеет оптимальную стратегию $x = (\alpha I_0, f_0)$, а игрок II имеет оптимальную стратегию $y = (g_0, \delta I_1)$.

Доказательство. Если мы положим $\beta = \gamma = 0$, то в силу леммы 13.4.4 мы будем иметь $u(0, \alpha, 0) = w(0, 0, \delta) = v$. Остается проверить, что

$$\int K(\xi, 0) dx(\xi) \geq v, \quad \int K(\xi, 1) dx(\xi) \geq v,$$

$$\int K(0, \eta) dy(\eta) \leq v, \quad \int K(1, \eta) dy(\eta) \leq v,$$

где $x = (\alpha I_0, f_0)$ и $y = (g_0, \delta I_1)$. По предположению, $\Phi(0) = L(0, 0)$. Тогда в силу (13.4.5)

$$\int K(\xi, 0) dx(\xi) = \alpha \Phi(0) + \int_0^1 M(\xi, 0) f_0(\xi) d\xi =$$

$$= \alpha L(0, 0) + \int_0^1 M(\xi, 0) f_0(\xi) d\xi = u(0, \alpha, 0).$$

Ввиду того что $\beta = 0$, из (13.4.5) следует равенство

$$\int_0^1 K(\xi, 1) dx(\xi) = v.$$

Равенство $\gamma = 0$ вместе с (13.4.8) дает

$$\int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) = v.$$

Наконец, поскольку $M(1, 1) \leq \Phi(1) \leq L(1, 1)$, должно быть

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(1, \eta) dy(\eta) &= \delta \Phi(1) + \int_0^1 M(1, \eta) g_0(\eta) d\eta \leq \\ &\leq \delta L(1, 1) + \int_0^1 M(1, \eta) g_0(\eta) d\eta = w(0, 0, \delta), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Следующая лемма доказывается сходным образом.

► Лемма 13.4.7. В условиях леммы 13.4.4 и при $\Phi(0) = M(0, 0)$ игрок I имеет оптимальную стратегию $x = (f_0, \beta I_1)$, а игрок II имеет оптимальную стратегию $(\gamma I_0, g_0)$.

► Лемма 13.4.8. Существует такое значение S_0 , $M(0, 0) < S_0 < L(0, 0)$, что при $\Phi(0) = S_0$ существуют оптимальные стратегии вида, указанного в случае Ж табл. 13.1.

Доказательство. Положим $\beta = \delta = 0$ и найдем значение a , для которого $w(a, \gamma, 0) = u(a, \alpha, 0)$. Стратегии $x = (\alpha I_0, f_a)$ и $y = (\gamma I_0, g_a)$ теперь полностью описаны. Найдем такое значение S_0 (зависящее от L и M), что если $\Phi(0) = S_0$, то стратегии x и y оптимальны, $v = u(a, \alpha, 0) = w(a, \gamma, 0)$ является значением игры. Чтобы сделать это, заметим сначала, что для $\beta = \delta = 0$ уравнения (13.4.5) — (13.4.8) означают, что

$$v = u(a, \alpha, 0) \leq \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) \quad (0 < \eta \leq 1),$$

$$v = w(a, \gamma, 0) \geq \int_0^1 K(\xi, \eta) dy(\eta) \quad (0 < \xi \leq 1)$$

со строгим неравенством в подинтервалах $0 < \eta < a$ и $0 < \xi < a$. Рассмотрим теперь выигрыш для $\eta = 0$, как функцию от $\Phi(0)$. Если $\Phi(0) = L(0, 0)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(\xi, 0) dx(\xi) &= \alpha \Phi(0) + \int_a^1 M(\xi, 0) f_a(\xi) d\xi = \\ &= \alpha L(0, 0) + \int_a^1 M(\xi, 0) f_a(\xi) d\xi > u(a, \alpha, 0) = v, \end{aligned} \quad (13.4.11)$$

при этом последнее неравенство является следствием (13.4.6). С другой стороны, если $\Phi(0) = M(0, 0)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) &= \gamma \Phi(0) + \int_a^1 L(0, \eta) g_a(\eta) d\eta = \\ &= \gamma M(0, 0) + \int_a^1 L(0, \eta) g_a(\eta) d\eta < w(a, \gamma, 0) = v; \end{aligned}$$

и поскольку $\alpha > 0$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) &= \\ &= \alpha \int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) + \int_0^1 \int_a^1 K(\xi, \eta) f_a(\xi) d\xi dy(\eta) < \\ &< \alpha v + (1 - \alpha) v = v. \end{aligned}$$

Изменяя порядок интегрирования, мы получаем

$$\begin{aligned} \gamma \int_0^1 K(\xi, 0) dx(\xi) + \int_0^1 \int_a^1 K(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta dx(\xi) &= \\ &= \gamma \int_0^1 K(\xi, 0) dx(\xi) + (1 - \gamma) v < v. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\Phi(0) = M(0, 0)$ должно быть

$$\int_0^1 K(\xi, 0) dx(\xi) < v. \quad (13.4.12)$$

Поскольку

$$\int_0^1 K(\xi, 0) dx(\xi)$$

— непрерывная монотонная функция от $\Phi(0)$, соотношения (13.4.11) и (13.4.12) показывают, что существует значение S_0 для $\Phi(0)$, для которого

$$\int_0^1 K(\xi, 0) dx(\xi) = v.$$

Остается проверить, что при $\Phi(0) = S_0$ имеет место равенство

$$\int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) = v,$$

которое легко доказывается с помощью следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} v &= \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) = \\ &= \alpha \int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) + \int_a^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) f_a(\xi) dy(\eta) d\xi = \\ &= \alpha \int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) + (1 - \alpha) v. \end{aligned}$$

► Лемма 13.4.9. В условиях леммы 13.4.4 и при $L(0, 0) > \Phi(0) > S_0$ игроки I и II имеют соответственно оптимальные стратегии $x = (\alpha I_0, f_a)$ и $y = (\gamma I_0, g_a, \delta I_1)$; в условиях леммы 13.4.4 и при $S_0 > \Phi(0) > M(0, 0)$ игроки I и II имеют соответственно оптимальные стратегии $(\alpha I_0, f_a, \beta I_1)$ и $(\gamma I_0, g_a)$.

Доказательство. Предположим, что значение a , равное a_0 , использованное в предыдущей лемме, равно тому наименьшему a , для которого $u(a, \alpha, 0) = w(a, \gamma, 0)$. Поэтому если $0 < a < a_0$, то из леммы 13.4.4 следует, что $u(a, \alpha, 0) > w(a, \gamma, 0)$. Для того чтобы доказать первое утверждение (случай Е в табл. 13.1), мы сначала заметим, что если β взято равным нулю, то

$$\alpha = \left(1 + \int_a^1 \varphi_0 \right)^{-1},$$

Положим

$$h(a) = \frac{1}{\alpha} \left(u(a, \alpha, 0) - \int_a^1 M(\xi, 0) f_a(\xi) d\xi \right).$$

Ввиду равенства (13.4.5) $h(0) = L(0, 0)$, и по лемме 13.4.8 $h(a_0) = S_0$. Следовательно, так как $h(a)$ непрерывна, из $S_0 < \Phi(0) < L(0, 0)$ следует существование a ($0 < a < a_0$), для которого $h(a) = \Phi(0)$. Для этого значения a возьмем $x = (\alpha I_0, f_a)$; тогда

$$\int_0^1 K(\xi, 0) dx(\xi) = \alpha \Phi(0) + \int_a^1 M(\xi, 0) f_a(\xi) d\xi = u(a, \alpha, 0).$$

Так как $\beta = 0$, мы имеем также

$$\int_0^1 K(\xi, 1) dx(\xi) = u(a, \alpha, 0).$$

Если мы возьмем $\gamma = 0$ и $y = (g_a, \delta I_1)$, то получим

$$\begin{aligned} u(a, \alpha, 0) &= \int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) = \\ &= \alpha \int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) + \int_a^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) f_a(\xi) dy(\eta) d\xi = \\ &= \alpha \int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) + (1 - \alpha) w(a, 0, \delta). \end{aligned}$$

Но

$$\int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) = \delta L(0, 1) + \int_a^1 L(0, \eta) g_a(\eta) d\eta < w(a, 0, \delta).$$

Следовательно, $u(a, \alpha, 0) < w(a, 0, \delta)$. С другой стороны, из выбора a_0 в лемме 13.4.8 и неравенства $a < a_0$ следует, что $u(a, \alpha, 0) > w(a, \gamma, 0)$. Теперь ясно, что мы можем найти стратегию $(\bar{\gamma} I_0, g_a, \bar{\delta} I_1) = \bar{y}$, для которой $w(a, \gamma, \delta) = u(a, \alpha, 0)$, где a имеет то же значение, что и раньше, и $0 < \bar{\gamma} < \gamma$, $0 < \bar{\delta} < \delta$. Обозначим для простоты новую стратегию также через $y = (\gamma I_0, g_a, \delta I_1)$ и проверим, что стратегии x , y оптимальны, а $v = u(a, \alpha, 0)$ — значение игры. Соотношение

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) \geq u(a, \alpha, 0) = v$$

уже было установлено, а (13.4.8) показывает, что

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dy(\eta) \leq w = v$$

для $0 < \xi < 1$. Наконец,

$$\begin{aligned} \int K(1, \eta) dy(\eta) &= \gamma M(1, 0) + \delta \Phi(1) + \int_a^1 M(1, \eta) g_a(\eta) d\eta \leq \\ &\leq \gamma M(1, 0) + \delta L(1, 1) + \int_a^1 M(1, \eta) g_a(\eta) d\eta = \\ &= w = v, \end{aligned}$$

и поскольку

$$\int_0^1 \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) = v,$$

мы заключаем, что

$$v = \alpha \int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) + (1 - \alpha) v.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 K(0, \eta) dy(\eta) = v,$$

и доказательство закончено.

С помощью аналогичных рассуждений устанавливаются оптимальные стратегии для случая 3 в табл. 13.1; таким образом, описание оптимальных стратегий для ядер группы 3 завершено.

Мы не рассматривали ядра, для которых

$$L(\xi, \xi) > M(\xi, \xi) \quad (0 \leq \xi \leq 1),$$

$$\lambda(0) < 1 \quad \text{и} \quad \mu(0) < 1$$

и

$$L(0, 1) \geq M(1, 0),$$

т. е. группу 4. Необходимые рассуждения в этом случае являются видоизменением рассуждений, применяемых при анализе ядер группы 3; детали мы опускаем. Обратим внимание читателя на то, что единственность оптимальных стратегий, указанных в табл. 13.1, является содержанием задач 16—19.

13.5. Бесшумная дуэль с произвольными функциями меткости. В качестве приложения к общей теории мы решим бесшумную дуэль с произвольными функциями меткости. Рассмотрим двух противников, каждому из которых разрешается выстрелить один раз. Игрок I стреляет с меткостью $P_1(\xi)$, а игрок II — с меткостью $P_2(\eta)$. Мы предполагаем, что функции P_1 и P_2 непрерывны, что $P'_1(\xi) > 0$, $P'_2(\eta) > 0$

в $[0, 1]$ и что $P_1(0) = P_2(0) = 0$, $P_1(1) = P_2(1) = 1$. Выигрыш игрока I равен 1, если он попадет в противника, -1 , если противник в него попадет, а сам он промахнется, и 0 в случае, если оба промахнутся или оба попадут. Функция выигрыша игрока I имеет тогда следующий вид:

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} P_1(\xi) - P_2(\eta) + P_1(\xi)P_2(\eta), & \xi < \eta, \\ P_1(\xi) - P_2(\xi), & \xi = \eta, \\ P_1(\xi) - P_2(\eta) - P_1(\xi)P_2(\eta), & \xi > \eta. \end{cases}$$

Ядро, очевидно, удовлетворяет здесь условиям (б) и (в), стр. 517.

Условия леммы 13.2.2 выполняются при $\xi_0 = 0$. Следовательно, существуют такие a и b , что $\lambda(a) = 1$ и $\mu(b) = 1$. Определим a и f , удовлетворяющие условию $T_af = f$. Уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_a^t \left(\frac{-P_2'(t)[-1 + P_1(\xi)]}{2P_1(t)P_2(t)} \right) f(\xi) d\xi + \\ &\quad + \int_t^1 \left(\frac{-P_2'(t)[-1 - P_1(\xi)]}{2P_1(t)P_2(t)} \right) f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{P_2'(t)}{2P_1(t)P_2(t)} \left(\int_a^1 f(\xi) d\xi - \int_a^t P_1(\xi) f(\xi) d\xi + \int_t^1 P_1(\xi) f(\xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (13.5.1)$$

Если мы нормируем f так, чтобы выполнялось условие

$$\int_a^1 f(\xi) d\xi = 1,$$

и положим $h(\xi) = P_1(\xi)f(\xi)$, то последнее уравнение можно будет записать в виде

$$\frac{2h(\xi)}{1 - \int_a^\xi h(t) dt + \int_\xi^1 h(t) dt} = \frac{P_2'(\xi)}{P_2(\xi)}. \quad (13.5.2)$$

Интегрируя, мы получаем

$$1 - \int_a^\xi h(t) dt + \int_\xi^1 h(t) dt = \frac{k}{P_2(\xi)}.$$

Дифференцирование по ξ приводит к равенствам

$$2h(\xi) = 2f(\xi)P_1(\xi) = \frac{kP_2'(\xi)}{[P_2(\xi)]^2}$$

и, следовательно,

$$f(\xi) = \frac{kP'_2(\xi)}{P_1(\xi)[P_2(\xi)]^2}, \quad (13.5.3)$$

где $2k_1 = k$.

Функция f является решением дифференциального уравнения, полученного путем дифференцирования соотношения (13.5.2). Определим теперь число a так, чтобы f было решением первоначального интегрального уравнения. Подставляя (13.5.3) в (13.5.2), мы получаем

$$\frac{k_1}{P_2(\xi)} = \frac{1}{2} \left(1 + k_1 \left(\frac{2}{P_2(\xi)} - \frac{1}{P_2(a)} - \frac{1}{P_2(1)} \right) \right)$$

или

$$\frac{1}{k_1} = 1 + \frac{1}{P_2(a)}.$$

Последняя формула вместе с требованием нормировки f приводит к следующему соотношению для определения a :

$$\frac{1}{k_1} = 1 + \frac{1}{P_2(a)} = \int_a^1 \frac{P'_2(\xi) d\xi}{P_1(\xi)[P_2(\xi)]^2}. \quad (13.5.4)$$

Ясно, что значение a , лежащее в единичном интервале и удовлетворяющее (13.5.4), совпадает со значением a , для которого $\lambda(a) = 1$.

Сходные рассуждения показывают, что значение b , для которого $\mu(b) = 1$, и соответствующая нормированная собственная функция g определяются из уравнений

$$g(\eta) = \frac{k_2 P'_1(\eta)}{P_2(\eta)[P_1(\eta)]^2} \quad (13.5.5)$$

и

$$\frac{1}{k_2} = 1 + \frac{1}{P_1(b)} = \int_b^1 \frac{P'_1(\eta) d\eta}{P_2(\eta)[P_1(\eta)]^2}. \quad (13.5.6)$$

Необходимо отметить, что уравнения, которые определяют a и b , имеют единственные решения в интервале $0 \leq \xi \leq 1$; чтобы доказать справедливость этого утверждения, достаточно показать, что функция

$$r(z) = \int_z^1 \frac{P'_1(\xi)}{P_2(\xi)P_1^2(\xi)} d\xi - \frac{1}{P_1(z)}$$

строго убывает от ∞ до -1 , когда z пробегает единичный интервал. Очевидно, что

$$r'(z) = -\frac{1 - P_2(z)}{P_2(z)} \cdot \frac{P'_1(z)}{P_1^2(z)} < 0,$$

и с помощью простой проверки мы получаем, что

$$r(0) = +\infty \quad \text{и} \quad r(1) = -1.$$

Способ получения оптимальных стратегий изложен в доказательстве леммы 13.4.2. Мы последуем его предписаниям.

Сначала вычислим a и b при помощи (13.5.4) и (13.5.6) и выберем большее из этих двух чисел. (Если a и b равны, то оптимальная стратегия является плотностью для каждого игрока. Этот случай опущен как простейший и предоставлен читателю в качестве упражнения.) Предположим, для определенности, что a — большее из этих двух чисел. Тогда $f(\xi)$, записанное в (13.5.3), является оптимальной стратегией игрока I. Чтобы получить оптимальную стратегию игрока II, положим $g_a = (I - U_a)^{-1} \delta q_1$; таким образом, g_a является решением неоднородного уравнения

$$(I - U_a) g_a = \delta q_1.$$

Записывая это уравнение подробно, получаем

$$\begin{aligned} g_a(\eta) - \int_a^\eta \frac{P'_1(\eta) [1 - P_2(t)]}{2P_1(\eta) P_2(\eta)} g_a(t) dt - \\ - \int_\eta^1 \frac{P'_1(\eta) [1 + P_2(t)]}{2P_1(\eta) P_2(\eta)} g_a(t) dt = \delta \frac{2P'_1(\eta)}{2P_1(\eta) P_2(\eta)}. \end{aligned}$$

Перестановка членов этого выражения с учетом нормировки

$$\int_a^1 g_a(\eta) d\eta = 1 - \delta,$$

как в лемме 13.4.2, дает нам

$$\begin{aligned} g_a(\eta) = \frac{P'_1(\eta)}{2P_1(\eta) P_2(\eta)} \left(2\delta + 1 - \delta - \int_a^\eta P_2(t) g_a(t) dt + \right. \\ \left. + \int_\eta^1 P_2(t) g_a(t) dt \right). \end{aligned}$$

Из сопоставления этого уравнения с (13.5.1) немедленно следует

$$g_a(\eta) = \frac{kP'_1(\eta)}{P_2(\eta) [P_1(\eta)]^2}.$$

Замечательным является здесь следующий факт: плотность в оптимальной стратегии игрока II отличается от решения уравнения $U_b g = g$ только постоянной нормирования k и областью определе-

ния, которой теперь является интервал $[a, 1]$. Если мы подставим полное выражение для g_a в интегральное уравнение и проинтегрируем, то найдем, что k и δ связаны соотношением

$$k \left(\frac{1}{P_1(a)} + 1 \right) = 1 + \delta.$$

Последнее уравнение вместе с уравнением нормировки

$$\int_a^1 \frac{k P_1'(t) dt}{P_2(t) [P_1(t)]^2} = 1 - \delta$$

полностью определяет постоянные k и δ . Обращение к лемме 13.4.2 или простая проверка убеждают нас в том, что (f_a) и $(g_a, \delta I_1)$ — оптимальные стратегии. Значение игры, вычисленное в соответствии с (13.4.1), равно

$$v = u(a) = \frac{1 - 3 P_2(a)}{P_2(a) \int_a^1 \frac{P_2'(t) dt}{P_1(t) P_2^2(t)}}.$$

В качестве частного примера рассмотрим $P_1(\xi) = \xi$ и $P_2(\xi) = \xi^n$ ($n \geq 1$). Если мы подставим эти функции в (13.5.4) и (13.5.6), проинтегрируем и упростим, то найдем, что a и b являются корнями уравнений

$$(2n + 1) a^{n+1} + (n + 1) a - n = 0,$$

$$(n + 2) b^{n+1} + (n + 1) b^n - 1 = 0.$$

Мы уже показали, что каждое из этих уравнений должно иметь точно один корень между 0 и 1. Кроме того, если $n > 1$, то в интервале $0 \leq \xi \leq 1$ график первого уравнения всегда лежит ниже графика второго уравнения, а разность между ними равна

$$(n - 1) \xi^{n+1} - (n + 1) \xi^n + (n + 1) \xi - n + 1.$$

Эта величина отрицательна при $\xi = 0$. Кроме того, по правилу знаков Декарта мы знаем, что она имеет не более чем три положительных корня, которые, очевидно, находятся в точке $\xi = 1$, являющейся тройным корнем. Отсюда следует, что корень первого уравнения больше, чем корень второго уравнения. Если $n = 1$, то оба корня равны и $a = 1/3$. (Пример 2, п. 13.1.)

Может представить интерес рассмотрение конкретных функций меткости обоих игроков. Возьмем $P_1(\xi) = \xi$ и $P_2(\xi) = P(\xi)$. Пусть α — положительная вероятность выстрела игрока I в момент 1, а β — соответствующая вероятность для игрока II; v , как обычно, означает значение игры. Интервал, содержащий спектр оптимальных стратегий, обозначается через $[a, 1]$.

В следующей таблице функции P расположены в порядке убывания, именно функция $P(\xi)$ в (б) меньше, чем $P(\xi)$ в (а) для $0 \leq \xi \leq 1$, и т. д. В этом правиле имеется два исключения: $P(\xi)$ в (в) меньше, чем $P(\xi)$ в (б) только для $3 - \sqrt{6} < \xi < 1$, и $P(\xi)$ в (е) один раз пересекается с каждой из других функций $P(\xi)$.

	$P(\xi)$	a	α	β	v
(а)	ξ	0,333	0	0	0
(б)	$\frac{2\xi^2}{1+\xi^2}$	0,409	0	0,0764	0,1021
(в)	$\frac{\xi(3-\xi)}{2(2-\xi)}$	0,372	0,0063	0	0,0838
(г)	$\frac{\xi}{2-\xi}$	0,414	0	0	0,172
(д)	ξ^2	0,481	0	0,0729	0,2481
(е)	$\frac{2\xi^3}{4\xi^2-3\xi+1}$	0,415	0	0,1741	0,028

13.6. Задачи.

1. Решить бесшумную дуэль, в которой каждый игрок имеет одну и ту же строго монотонно возрастающую функцию меткости $P(\xi)$, где $P(0) = 0$, а $P(1) = 1$.

Указание: преобразовать игру в примере 2 п. 13.1, вводя новые переменные $\tilde{\xi} = P(\xi)$, $\tilde{\eta} = P(\eta)$.

2. Найти критическую точку a и скачок β для бесшумной дуэли, где $P_1(t) = t$, $P_2(t) = t^3$ и $P_1(t) = t$, $P_2(t) = t^4$.

3. Проверить таблицу решений, приведенную выше.

4. Хорошенькая девушка должна прийти на железнодорожную станцию в момент t ($0 \leq t \leq 1$), выбираемый случайно с равномерным распределением. Каждый из двух игроков (игрок I и игрок II) приходит на станцию только один раз и должен немедленно уйти. Если в момент прихода одного из игроков девушка находится на станции, то она уходит с этим игроком. Тот, кто уходит с девушкой, выигрывает тем самым единицу у своего противника. Если же ни один из игроков не уходит с девушкой, то выигрыш равен нулю. Когда игроки должны прибыть на станцию? Найти оптимальные стратегии. (Можно провести интерпретацию этой задачи в терминах примера о публикации книг, стр. 428.)

5. Решить бесшумную дуэль с равными функциями меткости

$$(P_1(t) = P_2(t) = t),$$

предполагая, что каждый игрок может произвести свой выстрел с вероятностью p_i ($i = 1, 2$).

6. Решить задачу 5 в предположении, что выигрыш игрока I равен α , если выживет он один, β , если выживет один игрок II, $\alpha + \beta$, если не выживет ни один, и 0, если выживут оба. Предположить, что $\alpha > 0$ и $\beta < 0$.

7. Рассмотреть игру

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi + \eta & \text{при } \xi \leq \eta, \\ \xi - \eta & \text{при } \xi > \eta. \end{cases}$$

Решить ее методами этой главы, хотя она и не является в строгом смысле игрой с выбором момента времени.

8. Крупная фирма конкурирует с мелкой с целью получить большой контракт. В момент t фирма, которая тратит на рекламу m долларов, может заключить контракт с вероятностью $mp(t)$, где $p'(t) > 0$ для всех t и $p(0) = 0$. Фирмы имеют на рекламу соответственно l и s долларов. Мы предполагаем, что $lp(t) \leq 1$ и $sp(t) \leq 1$ для всех t . Каждая фирма должна планировать свои действия в момент $t = 0$ и должна полностью использовать свой бюджет на рекламу за один раз. Интервал времени, на котором происходит дуэль, нормализован в $[0, 1]$. Выигрыш большой фирмы равен $+1$, если контракт заключает она одна. Если контракт не заключен или его получают сразу обе фирмы, то выигрыш равен нулю. Если контракт получает мелкая фирма, то выигрыш большой фирмы равен -1 . Сформулировать игру и решить ее.

9. Число t выбирается случайно с равномерным распределением на $(0, 1)$. Два игрока выбирают одновременно соответственно числа ξ и η ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$). Выигрыш игрока I равен $K(\xi, \eta)$, где

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi + t + \eta \leq \frac{3}{2}, \\ -1, & \text{если } \xi + t + \eta > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Найти оптимальные стратегии.

10. Описать решение для бесшумной дуэли с монотонно возрастающими функциями меткости $P_1(t)$ и $P_2(t)$, предполагая, что $P_1(0) > 0$, $P_2(0) > 0$ и $P_1(1) = P_2(1) = 1$.

11. Предполагая, что все неравенства в условии (в) на стр. 517 изменяют знак, описать, как изменяется вид оптимальных стратегий. Указание: ввести новые переменные, заменив ξ на $1 - \xi$ и η на $1 - \eta$.

12. Показать, что в общей игре с выбором момента времени класса II точка 1 не может быть скачком для оптимальных стратегий обоих игроков, если только $\{1, 1\}$ не является седловой точкой.

13. Пусть $A(\xi, \eta)$ имеет непрерывные вторые частные производные, определенные на треугольнике $0 \leq \xi \leq \eta \leq 1$, и такие, что $A_\xi(\xi, \eta) > 0$ и $A_\eta(\xi, \eta) < 0$. Пусть

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} A(\xi, \eta) & \text{при } 0 \leq \xi < \eta \leq 1, \\ 0 & \text{при } \xi = \eta, \\ -A(\eta, \xi) & \text{при } 0 \leq \eta < \xi \leq 1. \end{cases}$$

Показать, что если $A(1, 1) \leq 0$, то стратегия I_1 оптимальна для обоих игроков. Показать также, что если $A(0, 1) \geq 0$, то стратегия I_0 оптимальна для обоих игроков.

14. Показать, что если $A(1, 1) > 0$ и $A(0, 1) < 0$, то оптимальные стратегии для ядра задачи 13 имеют вид $(\alpha I_0, f_a)$, где $\alpha \geq 0$, а f_a — непрерывная плотность на интервале $a \leq t \leq 1$.

15. Найти интегральные уравнения, решением которых является плотность f_a задачи 14, и показать, что если

$$A(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n p_i(\xi) q_i(\eta),$$

то интегральные уравнения могут быть заменены системой дифференциальных уравнений.

Следующие четыре задачи касаются единственности оптимальных стратегий игроков в играх с выбором момента времени класса II.

16. Доказать, что если x представляет собой любую оптимальную стратегию игрока I, которая не является компонентой седловой точки, то x непрерывна на внутренности единичного интервала.

Указание: использовать разрыв $K(\xi, \eta)$ на диагонали и наличие у игрока II оптимальной стратегии вида $(\gamma I_0, g_a, \delta I_1)$, которая является устойчивой на интервале $[a, 1]$.

17. Используя задачу 16, доказать, что если $x(\xi)$ является оптимальной стратегией игрока I, то $x(\xi)$ абсолютно непрерывна на $a < \xi < 1$, а $x'(\xi)$ непрерывна на этом интервале.

18. Используя результаты задач 16 и 17, доказать, что оптимальная стратегия игрока I единственна.

19. Для игры, рассмотренной в предыдущих трех задачах, доказать, что оптимальная стратегия игрока II единственна.

20. Пусть в игре с выбором момента времени класса II $\Phi(0)$ и $\Phi(1)$ не лежат между соответствующих значений L и M , но K удовлетворяет другим условиям п. 13.2. Доказать, что игра имеет значение, хотя достижимые оптимальные стратегии могут не существовать.

21. Доказать, что если $K(\xi, \eta)$ является игрой с выбором момента времени класса II, удовлетворяющей условиям (13.0.1), так что

$$L_{\xi\xi}(\xi, \eta) \leq 0, \quad M_{\xi\xi}(\xi, \eta) \leq 0, \quad L_{\xi}(t, t) > M_{\xi}(t, t)$$

и $L'(t, t) > M'(t, t)$, то плотность решения для игрока II является непрерывной убывающей функцией.

Комментарии и библиография к главе 13

Изучение игр типа тактических дуэлей началось в 1948 году. Корпорация РЭНД собрала в то время коллектив из математиков, статистиков, экономистов и социологов, задача которого состояла в том, чтобы проанализировать значение и структуру „неопределенностей войны“ и построить схему для оптимизации будущих операций в экономике нападения и обороны в войне. Одним из побочных результатов изучения тактических приемов ведения войны, составивших часть программы, было решение многочисленных примеров игр с выбором момента времени. Название „игры с выбором момента времени“¹⁾ для этого класса тактических дуэлей было в действительности предложено позже, в 1950 году Шифманом [2], который указал на их широкую практическую применимость. Двумя другими членами этой группы, которые внесли большой вклад в постановку и решение различных вариантов тактических дуэлей, были Блекуэлл и Гиршик. В результате этой работы в определенных кругах создано мнение, что основные концепции теории военного тактического маневрирования следует пересмотреть в свете соображений, подсказанных решениями некоторых игр с выбором момента времени.

Это послужило источником интересного и обширного класса игр, требующих для их полного решения широкого применения теории положительных линейных преобразований. Первоначальные работы по этим играм наметили путь к более широкому классу игр на единичном квадрате, ядра которых (или их производные) имеют определенный вид разрыва вдоль диагонали. Последнее обстоятельство и характерно для игр с выбором момента времени.

13.1. Отдельные примеры игр с выбором момента времени, которые были решены в течение краткой истории этого класса игр, слишком многочисленны, чтобы их перечислять. Среди наиболее плодотворных исследователей теории игр с выбором момента времени следует назвать Блекуэлла, Гиршика, Шепли, Беллмана, Гликсберга, Белцера и др. Первые три примера, описанные в этом пункте, принадлежат Блекуэллу и Гиршику ([1], гл. 2). Четвертый пример взят из работы Беллмана и Гиршика [1].

13.2. Общая симметричная игра с выбором момента времени с одним действием была решена Шифманом [2], который показал, что решение, одинаковое для обоих игроков, может быть получено в результате решения некоторого интегрального уравнения второго рода. Карлин [2] распространил эти методы на решение общей игры с выбором момента времени. Предположение о различии ресурсов и возможностей двух игроков приводит к новым решениям, которые не могут быть предугаданы на основе изучения симметричных ядер. В то время как симметричная игра с выбором момента

¹⁾ Имеется в виду термин „games of timing“. — *Прим. перев.*

времени включает четыре категории решений, несимметричный случай содержит их четырнадцать. Метод решения игр с выбором момента времени в обоих случаях существенно опирается на теорию положительных интегральных преобразований.

13.3. В этом пункте излагается теория линейных интегральных преобразований с положительным ядром. Эта теория имеет длинную историю. Фробениус [1] исследовал дискретный случай, который соответствует положительному матричному преобразованию, переводящему конечномерное пространство в себя. Некоторые интегральные обобщения этой теории впервые указал Иенч. Абстрактная разработка этих идей, в которой рассматриваются линейные операторы в банаховых пространствах, оставляющие инвариантным конус, была предложена Крейном и Рутманом [1], которые приводят также обширную библиографию по этому вопросу ¹⁾.

Характеризация наибольшего собственного значения положительного линейного оператора, указанная в доказательстве теоремы 13.3.3, по-видимому, является новой. Она принадлежит совместно Боненбласту и Карлину. (См. также п. 16.2.)

13.4. Доказательства этого пункта представляют собой более подробные изложения доказательств, которые содержатся в статье Карлина [2].

13.5. Решение общей бесшумной дуэли с произвольными функциями меткости принадлежит Блекуэллу [1]. Он решает эту игру путем подходящего обобщения метода устойчивой стратегии (см. п. 13.5). У нас этот пример появляется как приложение общей теории.

Таблица на стр. 551 принадлежит Бельзеру [1].

13.6. Задача 6 была предложена Блекуэллом и Гиршиком [1]. Задачи 13—15 принадлежат Шифману [2].

¹⁾ По этому поводу см. монографию М. А. Красносельского [1]. — *Прим. перев.*

ИГРЫ С ВЫБОРОМ МОМЕНТА ВРЕМЕНИ

(ПРОДОЛЖЕНИЕ)

14.1. Игры с выбором момента времени; класс I. В предыдущей главе мы рассмотрели игры с выбором момента времени, в которых в распоряжении каждого игрока имеется лишь частичная информация. Например, в бесшумной дуэли ни один из игроков не знает, выстрелили в него или нет (если только выстрел противника не достиг цели). Вследствие этого недостатка информации можно ожидать, что игроки должны будут некоторым образом провести рандомизацию на множестве чистых стратегий, и мы видели, что это на самом деле так. С другой стороны, в шумной дуэли каждый игрок знает, когда стреляет его противник. Оптимальными стратегиями являются чистые стратегии для каждого игрока, и ядро игры имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} l(\xi) & \text{при } \xi < \eta, \\ \varphi(\xi) & \text{при } \xi = \eta, \\ m(\eta) & \text{при } \xi > \eta, \end{cases} \quad (14.1.1)$$

где $c \geq l'(\xi) \geq \delta > 0$ и $-c \leq m'(\eta) \leq -\delta < 0$, $l(1) > m(1)$ и $l(0) < m(0)$; функция $\varphi(\xi)$ ограничена, но в остальном произвольна; предполагается, что $l(\xi)$ и $m(\eta)$ имеют непрерывные вторые производные. Итак, любая игра типа (14.1.1) будет называться игрой с выбором момента времени с полной информацией или, в соответствии с нашей предыдущей терминологией, игрой с выбором момента времени класса I.

Из свойств монотонности функции $l(\xi)$ и $m(\eta)$, очевидно, следует, что существует единственное значение a_0 , $0 < a_0 < 1$, такое, что $m(a_0) = l(a_0)$. Далее следует основная теорема, касающаяся игр с выбором момента времени класса I.

► **Теорема 14.1.1.** *Игра (14.1.1) имеет значение $v = l(a_0) = m(a_0)$, а оптимальные стратегии x^* и y^* описываются следующим образом. Если $\varphi(a_0) > v$, то $x^*(\xi) = x_{a_0}$, а игрок II не*

имеет достижимой оптимальной стратегии; ϵ -оптимальная стратегия для игрока II имеет плотность в достаточно малом интервале справа от a_0 . Если $\varphi(a_0) = v$, то $x^* = y^* = I_{a_0}$ (вырожденное распределение, сконцентрированное в точке a_0). Если $\varphi(a_0) < v$, то $y^*(\eta) = u_{a_0}$, а игрок I не имеет достижимой оптимальной стратегии; ϵ -оптимальная стратегия для игрока I имеет плотность на произвольно малом интервале справа от a_0 .

Доказательства этих утверждений будут рассмотрены в п. 14.3. Идея их состоит в том, чтобы трактовать ядро (14.1.1) как предельный случай ядер, имеющих структуру игр с выбором момента времени класса II. Так как предельный переход затрудняется наличием разрыва ядра вдоль диагонали, анализ должен быть проведен с некоторой осторожностью.

Условия $l'(\xi) > 0$ и $m'(\eta) < 0$ естественны для игр с выбором момента времени (см. следующий пункт). Однако, как может показаться на первый взгляд, условия $l(1) > m(1)$ и $l(0) < m(0)$ введены несколько произвольно. Поэтому, чтобы охватить все другие возможности, мы описываем решения без ограничений, наложенных на значение ядра в крайних точках.

Пусть $K(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 14.1.1, только вместо требования $l(1) > m(1)$ и $l(0) < m(0)$ мы предполагаем, что $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ лежат между соответствующими значениями l и m ; тогда оптимальные стратегии задаются следующим образом:

(а) Если $l(1) < m(1)$, то точка $\{1, 1\}$ является седловой, стратегия I_1 оптимальна для обоих игроков.

(б) Если $l(0) > m(0)$, то точка $\{0, 0\}$ — седловая и $x = y = I_0$.

(в) Если требования, содержащиеся в подпунктах (а) и (б) не выполняются, то ядро удовлетворяет условиям теоремы 14.1.1.

В случаях (а), (б) и (в), если на отношение $\varphi(0)$ к $\varphi(1)$ не налагаются никакие условия, может быть показано, что игра с ядром $K(\xi, \eta)$ не обязательно имеет значение.

14.2. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим шумную дуэль между двумя противниками, меткость которых задается функциями $P_1(\xi)$ и $P_2(\eta)$, определенными на интервале $[0, 1]$. Предполагается, что обе эти функции строго возрастают, имеют непрерывные положительные производные и $P_1(0) = P_2(0) = 0$, а $P_1(1) = P_2(1) = 1$. В конце дуэли игрок I выигрывает величину w , значение которой определяется следующим образом: если выживет только игрок I, то $w = \alpha$, если выживет только игрок II, то $w = \beta$, если выживут оба игрока, то $w = 0$, если не выживет ни один, то $w = \gamma$. Мы предполагаем, что $\alpha > \beta$.

Ядро $K(\xi, \eta)$ составляется, как математическое ожидание w . Таким образом,

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} (\alpha - \beta) P_1(\xi) + \beta, & \xi < \eta, \\ \alpha P_1(\xi) + \beta P_2(\xi) + (\gamma - \alpha - \beta) P_1(\xi) P_2(\xi), & \xi = \eta, \\ \alpha - (\alpha - \beta) P_2(\eta), & \xi > \eta. \end{cases}$$

Из предположения $\alpha > \beta$ следует, что $K(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 14.1.1. Число a_0 является решением уравнения

$$(\alpha - \beta) P_1(\xi) + \beta = \alpha - (\alpha - \beta) P_2(\xi) = v.$$

Следовательно, a_0 — решение уравнения $P_1(\xi) + P_2(\xi) = 1$ и

$$\begin{aligned} v &= (\alpha - \beta) P_1(a_0) + \beta = (\alpha - \beta) P_1(a_0) + \beta [P_1(a_0) + P_2(a_0)] = \\ &= \alpha P_1(a_0) + \beta P_2(a_0). \end{aligned}$$

Игрок I будет иметь оптимальную стратегию в том и только в том случае, если $\varphi(a_0) \geq v$ (по теореме 14.1.1) или

$$\alpha P_1(a_0) + \beta P_2(a_0) + (\gamma - \alpha - \beta) P_1(a_0) P_2(a_0) \geq \alpha P_1(a_0) + \beta P_2(a_0).$$

Это равносильно тому, что x_{a_0} является оптимальной стратегией игрока I в том и только в том случае, если $\gamma - \alpha - \beta \geq 0$, а y_{a_0} — оптимальная стратегия игрока II в том и только в том случае, если $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$.

Пример 2. Рассмотрим аналогичную шумную дуэль с $\alpha = 1$, $\beta = -1$ и $\gamma = 0$. Однако мы не будем теперь накладывать на функции P_1 и P_2 требование монотонности. Потребуем только, чтобы эти функции были непрерывными. В этих условиях, если игрок I стреляет в момент ξ раньше игрока II, то игроку II нет необходимости ждать момента $\eta = 1$, чтобы выстрелить; очевидно, он выстрелит, когда его функция меткости достигнет максимума в интервале $[\xi, 1]$, в котором изменяется η . Оптимальным моментом выстрела для игрока II является любой момент θ из $[\xi, 1]$, для которого

$$P_2(\theta) = M_2(\xi) = \max_{t \geq \xi} P_2(t).$$

Ожидаемый выигрыш игрока I равен

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} P_1(\xi) - [1 - P_1(\xi)] M_2(\xi) & \text{при } \xi < \eta, \\ P_1(\xi) - P_2(\xi) & \text{при } \xi = \eta, \\ -P_2(\eta) + [1 - P_2(\eta)] M_1(\eta) & \text{при } \xi > \eta, \end{cases}$$

где

$$M_1(\eta) = \max_{t \geq \eta} P_1(t).$$

Упрощая обозначения, мы получаем

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} f(\xi) & \text{при } \xi < \eta, \\ \varphi(\xi) & \text{при } \xi = \eta, \\ g(\eta) & \text{при } \xi > \eta, \end{cases}$$

где $f(\xi) = P_1(\xi) - [1 - P_1(\xi)] M_2(\xi)$ и т. д.

Для решения этой игры удобно ввести две вспомогательные функции:

$$F(\xi) = \max_{t \leq \xi} f(t), \quad G(\eta) = \min_{t \leq \eta} g(t).$$

Заметим, что $F(\xi)$ возрастает, а $G(\eta)$ убывает, но не обязательно строго. Рассмотрим отдельно три возможности.

Случай 1. Существует значение a_0 , $0 \leq a_0 \leq 1$, для которого $F(a_0) = G(a_0)$. Мы утверждаем, что число $v = F(a_0) = G(a_0)$ — значение игры, ядро которой равно $K(\xi, \eta)$, в том смысле, что $\inf \sup = \sup \inf$. Доказательство этого утверждения проводится следующим образом.

Пусть b — то наименьшее значение η , для которого $F(\xi) = F(a_0)$, а c — наименьшее значение η , для которого $G(\eta) = G(a_0)$. Ясно, что $f(b) = F(b) = F(a_0)$ и $g(c) = G(c) = G(a_0)$. Вычислим теперь выигрыш игрока I, когда он применяет стратегию x_b , а игрок II применяет чистую стратегию η :

(1) если $\eta < b$, то

$$K(b, \eta) = g(\eta) \geq \min_{t \leq \eta} g(t) = G(\eta) \geq G(b) \geq G(a_0) = v;$$

(2) если $\eta = b$, то $K(b, b) = \varphi(b)$;

(3) если $\eta > b$, то $K(b, \eta) = f(b) = F(a_0) = v$.

Аналогично если игрок II применяет стратегию y_c , а игрок I — стратегию ξ , то выигрыш игрока I вычисляется следующим образом:

(1) если $\xi < c$, то

$$K(\xi, c) = f(\xi) \leq \max_{t \leq \xi} f(t) = F(\xi) \leq F(c) \leq F(a_0) = v;$$

(2) если $\xi = c$, то $K(c, c) = \varphi(c)$;

(3) если $\xi > c$, то $K(\xi, c) = g(c) = G(a_0) = v$.

Теперь сразу ясно, что если $\varphi(b) \geq v$ и $\varphi(c) \leq v$, то чистые стратегии x_b и y_c оптимальны, а v является значением игры. Эти решения, вообще говоря, неединственны.

Для других значений $\varphi(b)$ и $\varphi(c)$ достижимые оптимальные стратегии могут и не существовать. Однако, как показано в теореме 14.1.1, в этом случае могут быть построены ϵ -оптимальные стратегии. Действительно, используя в качестве смешанной стратегии равномерное распределение на малом интервале $[b - \delta, b + \delta]$, игрок I может гарантировать себе по крайней мере $v - \epsilon$ незави-

симо от η для любого $\epsilon > 0$. Аналогичный анализ показывает, что игрок II может помешать игроку I получить выигрыш, больший чем $v + \epsilon$. Таким образом, v является значением игры.

Случай 2. $G(t) < F(t)$ ($0 \leq t \leq 1$). Здесь $g(0) < f(0)$, и точка $\{0, 0\}$ является седловой в том и только в том случае, если $g(0) \leq \leq f(0) \leq f(0)$. Очевидно, что

$$K(0, \eta) = \begin{cases} \varphi(0) & \text{при } \eta = 0, \\ f(0) \geq \varphi(0) & \text{при } \eta > 0 \end{cases}$$

и

$$K(\xi, 0) = \begin{cases} \varphi(0) & \text{при } \xi = 0, \\ g(0) \leq \varphi(0) & \text{при } \xi > 0. \end{cases}$$

Если такая седловая точка существует, то ясно, что $v = \varphi(0)$, и I_0 (вырожденное распределение, сконцентрированное в нуле) есть оптимальная стратегия для каждого из игроков.

Случай 3. $G(t) > F(t)$ ($0 \leq t \leq 1$). В этом случае

$$g(1) \geq \min_{t \leq 1} g(t) = G(1) > F(1) = \max_{t \leq 1} f(t) \geq f(1).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что $\{1, 1\}$ является седловой точкой в том и только в том случае, если $\varphi(1)$ лежит между $G(1)$ и $F(1)$. Тогда $v = \varphi(1)$, а стратегия I_1 оптимальна для каждого из игроков.

14.3*. Доказательство теоремы 14.1.1. Для ясности изложения рассмотрим сначала две леммы.

► **Лемма 14.3.1.** *Описываемая соотношениями (14.1.1) игра $K(\xi, \eta)$ имеет значение в том смысле, что*

$$\inf_y \sup_x \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) = v = \sup_x \inf_y \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta).$$

Доказательство. Рассмотрим семейство игр с ядрами

$$K_n(\xi, \eta) = K(\xi, \eta) + \frac{1}{n} K^*(\xi, \eta),$$

где $K^*(\xi, \eta)$ удовлетворяет условиям теоремы 13.2.1. Тогда

$$K_n(\xi, \eta) = \begin{cases} l(\xi) + \frac{1}{n} L^*(\xi, \eta) & \text{при } \xi < \eta, \\ \varphi(\xi) + \frac{1}{n} K^*(\xi, \xi) & \text{при } \xi = \eta, \\ m(\eta) + \frac{1}{n} M^*(\xi, \eta) & \text{при } \xi > \eta, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. Ясно, что $K_n(\xi, \eta)$ обладает теми же характеристиками, что и $K^*(\xi, \eta)$, и оптимальными стратегиями, описанными в табл. 13.1. Из предположений, касающихся $l(\xi)$ и $m(\eta)$, сразу вытекает, что для каждого достаточно большого n существует такое значение ξ_n ($0 < \xi_n < 1$), что

$$l(\xi_n) + \frac{1}{n} L^*(\xi_n, \xi_n) = m(\xi_n) + \frac{1}{n} M^*(\xi_n, \xi_n)$$

и $\xi_n \rightarrow a_0$. Следовательно, единственными случаями табл. 13.1 (стр. 525), которые могут здесь встретиться, являются случаи Б, В и Г. В этих случаях условие (б) на стр. 517 оказывается несущественным. Оптимальные стратегии в игре $K_n(\xi, \eta)$ имеют вид $(f_{a_n}, \beta_n I_1), (g_{a_n}, \delta_n I_1)$, где $\xi_n < a_n < 1$, и либо β_n , либо δ_n равно нулю. Таким образом, для бесконечного числа индексов n либо β_n , либо δ_n равно нулю; для определенности предположим, что для таких индексов $\beta_n = 0$. Тогда, ограничиваясь подходящей подпоследовательностью, мы можем предположить, что $\beta_n = 0$, $a_n \rightarrow a$, и $v_n \rightarrow v$, где v_n — значение игры $K_n(\xi, \eta)$, а a и v — предельные точки соответствующих последовательностей.

Проверим теперь, что это число v удовлетворяет условиям леммы. Так как $v_n \rightarrow v$, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_1(\varepsilon)$, что для всех $n > n_1(\varepsilon)$

$$\int K_n(\xi, \eta) dx_n(\xi) \geq v_n \geq v - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, так как $K_n(\xi, \eta)$ сходится равномерно к $K(\xi, \eta)$, для $n \geq n_2(\varepsilon)$ должно иметь место неравенство

$$\int [K(\xi, \eta) - K_n(\xi, \eta)] dx_n(\xi) \geq -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для достаточно больших n

$$\int K(\xi, \eta) dx_n(\xi) \geq v - \varepsilon$$

и аналогично

$$\int K(\xi, \eta) dy_n(\eta) \leq v + \varepsilon.$$

Но из последних двух уравнений следует, что

$$\sup_x \inf_y \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) \geq v \geq \inf_y \sup_x \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta).$$

Так как противоположное неравенство ($\inf \sup \geq \sup \inf$) выполняется всегда, лемма доказана.

► Лемма 14.3.2. $v = m(a_0) = l(a_0)$.

Доказательство. Оптимальные стратегии $x_n = (f_{a_n})$ игры $K_n(\xi, \eta)$ удовлетворяют интегральному уравнению (13.2.2). После

некоторых простых преобразованиях это интегральное уравнение принимает вид

$$m'(\eta) \int_{\eta}^1 f_{a_n}(\xi) d\xi + [l(\eta) - m(\eta)] f_{a_n}(\eta) + \rho_n(\eta) + \lambda_n(\eta) f_{a_n}(\eta) = 0, \quad (14.3.1)$$

где $\rho_n(\eta)$ и $\lambda_n(\eta)$ стремятся равномерно к нулю, когда $n \rightarrow \infty$. Обращаясь к теореме выбора Хелли (п. В. 3), мы можем предположить (снова заменяя нашу последовательность, если это необходимо, подпоследовательностью), что существует распределение x_0 , для которого $x_n(\xi) \rightarrow x_0(\xi)$ в любой точке непрерывности ξ распределения x_0 . Следовательно, интегрируя (14.3.1) в промежутке $[\eta, 1]$, где

$$1 > \eta \geq a + \delta \quad (\delta > 0) \quad \text{и} \quad a \geq a_0,$$

мы получаем для достаточно больших n

$$\int_{\eta}^1 \frac{-m'(t)}{l(t) - m(t)} [1 - x_n(t)] dt = 1 - x_n(\eta) + \varepsilon_n(\eta),$$

где $\varepsilon_n(\eta)$ стремится равномерно к нулю.

Так как $\xi_n < a_n < 1$ и $\xi_n \rightarrow a_0$, то $a_0 \leq a$, и поэтому $\frac{m'(t)}{l(t) - m(t)}$ ограничено для $t \geq a + \delta$. Следовательно,

$$1 - x_0(\eta) = \int_{\eta}^1 \frac{-m'(t)}{l(t) - m(t)} [1 - x_0(t)] dt$$

в любой точке непрерывности η распределения x_0 . Отсюда с помощью обычных рассуждений получаем, что $1 - x_0(\eta) = 0$ для $1 > \eta \geq a + \delta$. Заметим сначала, что

$$1 - x_0(\eta) \leq M \int_{\eta}^1 [1 - x_0(t)] dt \leq M(1 - \eta)$$

для всех η , которые являются точками непрерывности x_0 . Итерация этого неравенства (которая возможна, так как точки разрыва x_0 образуют множество меры нуль) приводит к неравенству

$$1 - x_0(\eta) \leq \frac{M^n (1 - \eta)^n}{n!} \rightarrow 0.$$

Таким образом, $x_0(\eta) = 1$ в любой точке непрерывности для $1 > \eta \geq a + \delta$. Так как $x_0(\eta)$ монотонно возрастает, то $x_0(1) = 1$; а так

как число точек разрыва счетно, мы заключаем, что $x_0(\eta) = 1$ для всех $\eta \geq a + \delta$. Но δ произвольно и, следовательно, $x_0(\eta) = 1$, если $\eta > a$. С другой стороны, если $\eta < a$, то $x_n(\eta) = 0$ для больших n . Следовательно, в промежутке $\eta < a$ мы имеем $x_0(\eta) = 0$, и поэтому $x_0 = I_a$.

Покажем теперь, что $a = a_0$. В противном случае $a > a_0$ и $l(\eta) > m(\eta)$ для $\eta \geq a > a_0$. Но последнее неравенство позволяет нам вывести из уравнения (14.3.1) равномерную ограниченность функций f_{a_n} для больших n , так что x_n не может сходиться к $x_0 = I_a$.

Наконец, для $\eta > a_0$ интеграл $\int K(\xi, \eta) dx_n(\xi)$ стремится к v . Следовательно,

$$v = \int K(\xi, \eta) dx_0(\xi) = K(a_0, \eta) = l(a_0) = m(a_0).$$

При доказательстве этой леммы мы фактически проверили, что I_{a_0} является оптимальной стратегией игрока I, если $\varphi(a_0) \geq m(a_0)$. Аналогичное утверждение справедливо и для оптимальной стратегии игрока II.

Чтобы завершить доказательство теоремы 14.1.1, нам остается показать, что единственно возможной оптимальной стратегией для каждого игрока является чистая стратегия в точке a_0 .

Предположим, что x — оптимальная стратегия в игре $K(\xi, \eta)$, и покажем, что $x(\xi) = 0$ для $\xi < a_0$. Действительно, если $x(\xi_0) > 0$ для некоторого $\xi_0 < a_0$, то в силу $a_n \rightarrow a_0$ мы имеем

$$\int K(\xi, \eta) dy_n(\eta) = l(\xi) \leq l(\xi_0) \quad \text{для } \xi \leq \xi_0 \text{ и } n \geq n_0.$$

Кроме того, поскольку $K_n(\xi, \eta)$ сходится равномерно к $K(\xi, \eta)$ и $v_n \rightarrow v$, для любого $\epsilon > 0$ и $n \geq n(\epsilon)$ мы имеем

$$\int K(\xi, \eta) dy_n(\eta) \leq v + \epsilon$$

для всех ξ . Так как $l'(\xi) \geq \delta$, то $\delta(a_0 - \xi_0) \leq l(a_0) - l(\xi_0)$. Поэтому если мы положим

$$\epsilon = \frac{\delta}{2} x(\xi_0)(a_0 - \xi_0) > 0,$$

то будем иметь

$$\int K(\xi, \eta) dy_n(\eta) \leq l(\xi_0) \leq l(a_0) - \delta(a_0 - \xi_0) = v - \delta(a_0 - \xi_0)$$

для $\xi \leq \xi_0$ и $n \geq n_0$. Следовательно, для $n \geq \max \{n(\varepsilon), n_0\}$ оказывается

$$\begin{aligned} & \int \int K(\xi, \eta) dy_n(\eta) dx(\xi) \leq \\ & \leq x(\xi_0)[v - \delta(a_0 - \xi_0)] + [1 - x(\xi_0)](v + \varepsilon) < \\ & < x(\xi_0)[v + \varepsilon - \delta(a_0 - \xi_0)] + [1 - x(\xi_0)](v + \varepsilon) < \\ & < v + \varepsilon - x(\xi_0)(a_0 - \xi_0)\delta < \\ & < v - \frac{\delta}{2} x(\xi_0) \cdot (a_0 - \xi_0) < v, \end{aligned}$$

так что стратегия x не может быть оптимальной.

Так как $x(\xi) = 0$ для $\xi < a_0$, мы можем положить $x = \alpha I_{a_0} + \tilde{x}$, где функция $\tilde{x}$ непрерывна в a_0 , $\tilde{x}(a_0) = 0$ и $\tilde{x}(1) = 1 - \alpha$. Для $\eta > a_0$ и η , принадлежащих множеству точек непрерывности $\tilde{x}$, мы имеем

$$\begin{aligned} & \int K(\xi, \eta) dx(\xi) = \\ & = \alpha l(a_0) + \int_{a_0}^{\eta} l(\xi) d\tilde{x}(\xi) + m(\eta)[1 - \alpha - \tilde{x}(\eta)] \geq v = l(a_0) = m(a_0), \end{aligned}$$

так что

$$\int_{a_0}^{\eta} [l(\xi) - l(a_0)] d\tilde{x}(\xi) = [m(\eta) - m(a_0)][1 - \alpha - \tilde{x}(\eta)] \geq 0.$$

Так как

$$c(\eta - a_0) \geq l(\eta) - l(a_0) \geq \delta(\eta - a_0),$$

а функция $\tilde{x}$ непрерывна в a_0 , мы имеем

$$\int_{a_0}^{\eta} [l(\xi) - l(a_0)] d\tilde{x}(\xi) = o(\eta - a_0);$$

поскольку, далее,

$$m(\eta) - m(a_0) \leq -\delta(\eta - a_0) < 0,$$

то

$$\begin{aligned} 0 \leq \delta(\eta - a_0)[1 - \alpha - \tilde{x}(\eta)] & \leq -[m(\eta) - m(a_0)][1 - \alpha - \tilde{x}(\eta)] \leq \\ & \leq \int_{a_0}^{\eta} [l(\xi) - l(a_0)] d\tilde{x}(\xi) = o(\eta - a_0), \end{aligned}$$

так что $1 - \alpha - \tilde{x}(\eta) \rightarrow 0$, когда $\eta \rightarrow a_0$ по множеству точек непрерывности $\tilde{x}$. Таким образом, $\tilde{x}(\eta) = 1 - \alpha$ для $\eta > a_0$, и $\tilde{x} = (1 - \alpha)I_{a_0}$. Так как предполагалось, что функция $\tilde{x}$ непрерывна в точке a_0 , должно быть $\alpha = 1$.

Точно такое же рассуждение в применении к игроку II дает, что только I_{a_0} может являться его оптимальной стратегией. Остальные утверждения теоремы 14.1.1 теперь могут быть получены немедленно.

14.4*. Игры с выбором нескольких моментов времени. Задачи, рассмотренные в этом пункте, принадлежат к общему классу бесшумных дуэлей, с той особенностью, что каждый игрок в принципе может действовать в течение игры более одного раза. Хотя эти игры, подобно другим бесшумным дуэлям, отражают большое число проблем, связанных с конкуренцией, нам будет удобно применять к ним военную терминологию.

Рассмотрим сражение между двумя самолетами, которое происходит в пределах досягаемости одного самолета другим, с момента $t = 0$ и продолжается до $t = 1$. Первый самолет несет n единиц боеприпасов („выстрелов“), и если в момент t производится выстрел, то враг будет уничтожен с вероятностью $P(t)$. Второй самолет несет m единиц боеприпасов, и соответствующая вероятность для него равна $Q(t)$. Оба игрока знают m и n , а также функции P и Q , однако во время игры ни один из игроков не знает, сколько раз его противник уже успел выстрелить и промахнуться. Выигрыш каждого игрока равен 1, если выживет он один, нулю, если выживут оба или не выживет ни один, и -1 , если выживет только противник. Удобно, как и раньше, сделать интуитивно правдоподобные предположения, что P и Q строго возрастают и непрерывно дифференцируемы, что $P(0) = Q(0) = 0$ и $P(1) = Q(1) = 1$.

Стратегии и выигрыши. Если игрок I производит в момент $t = \xi_i$ свой i -й выстрел, то его стратегия описывается вектором $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$; этот вектор подчинен ограничению $0 \leq \xi_1 \leq \dots \leq \xi_n \leq 1$, и любой вектор, удовлетворяющий этим неравенствам, представляет собой чистую стратегию. Точно так же чистые стратегии игрока II соответствуют векторам $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$, где $0 \leq \eta_1 \leq \dots \leq \eta_m \leq 1$. Функция выигрыша $K(\xi, \eta)$ может быть построена способами, изложенными в п. 13.1. Однако при анализе любой частной игры удобно использовать не одну такую функцию, а семейство функций $K(\xi, \eta)$, зависящих от любого числа переменных $\xi_1, \dots, \xi_r$ и $\eta_1, \dots, \eta_s$. В дальнейшем переменные ξ и η приписываются соответственно игрокам I и II и рассматриваются, как существенно различные символы. В соответствии с этой договоренностью $K(\xi_1, \dots$

..., ξ_r ; $\eta_1, \dots, \eta_s$) будет всегда обозначать выигрыш игрока I, если он стреляет в моменты $\xi_1, \dots, \xi_r$, в то время как игрок II стреляет в моменты $\eta_1, \dots, \eta_s$. Например, $K(\xi_1) = P(\xi_1)$, $K(\eta_1) = -Q(\eta_1)$, а $K(\xi_1, \eta_1)$ является функцией выигрыша бесшумной дуэли, описываемой уравнением (13.5.1), где P_1 заменяется на P , а P_2 на Q . В этих терминах выигрыш может быть рекуррентно записан так:

$$K(\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_m) = \\ = \begin{cases} P(\xi_1) + [1 - P(\xi_1)] K(\xi_2, \dots, \xi_n; \eta_1, \dots, \eta_m) & \text{при } \xi_1 < \eta_1, \\ -Q(\eta_1) + [1 - Q(\eta_1)] K(\xi_1, \dots, \xi_n; \eta_2, \dots, \eta_m) & \text{при } \eta_1 < \xi_1. \end{cases}$$

При $\eta_1 = \xi_1$ можно брать среднее значение этих двух функций. Рассмотрение семейства функций K не только упрощает определение функций выигрыша, но также позволяет нам выделить влияние каждой из компонент стратегий на общую функцию выигрыша. Это можно проиллюстрировать следующим примером, который выделяет влияние переменной η на значение $K(\xi_1, \xi_2; \eta)$; справедливость формулы может быть проверена простым вычислением:

$$K(\xi_1, \xi_2; \eta) - K(\xi_1, \xi_2) = \\ = \begin{cases} \prod_{i=1}^2 [1 - P(\xi_i)] Q(\eta) & \text{при } \xi_1 < \xi_2 < \eta, \\ -[1 - P(\xi_1)] Q(\eta) [1 + K(\xi_2)] & \text{при } \xi_1 < \eta < \xi_2, \\ -Q(\eta) [1 + K(\xi_1, \xi_2)] & \text{при } \eta < \xi_1 < \xi_2. \end{cases} \quad (14.4.1)$$

Характеристика решения. Рассмотрим теперь выигрыши, получаемые игроками, когда они выбирают стратегии x и y , удовлетворяющие следующим условиям:

$$(1) \quad x(\xi) = \prod_{i=1}^n x_i(\xi_i) \quad \text{и} \quad y(\eta) = \prod_{j=1}^m y_j(\eta_j).$$

Это эквивалентно поиску оптимальной стратегии, которая обладает тем свойством, что моменты выстрелов независимы. Другими словами, x_1 и x_2 представляют собой одномерные распределения моментов соответственно 1-го и 2-го выстрелов.

Существование именно таких оптимальных стратегий правдоподобно в силу полного отсутствия информации у каждого игрока о моментах выстрелов его противника.

(2) Областью определения каждого x_i является интервал $[a_i, a_{i+1}]$, а областью определения каждого y_j — интервал $[b_j, b_{j+1}]$. Кроме того, $a_1 > 0$, $b_1 > 0$ и $a_{n+1} = b_{m+1} = 1$. Мы должны обязательно

иметь $a_1 = b_1$, так как если бы было $a_1 > b_1$, то игрок II только улучшил бы свои шансы, ожидая момента a_1 , чтобы выстрелить; и аналогичное соображение справедливо для игрока I.

(3) Все эти распределения непрерывны, за исключением x_n и y_m , которые могут иметь скачки α и β соответственно при $\xi_n = 1$ и $\eta_m = 1$.

Сопоставим рассматриваемым стратегиям величины D_i и E_j , определенные следующим образом:

$$D_i = \int_{a_i}^{a_{i+1}-} P(t) dx_i(t) \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$E_j = \int_{b_j}^{b_{j+1}-} Q(t) dy_j(t) \quad (j = 1, \dots, m).$$

Основные свойства этих стратегий формулируются в следующих двух леммах. Ради простоты формулировок доказательства этих лемм ограничены случаем, когда $n = 2$ и $m = 1$. В этом случае уже проявляются все характерные особенности общей задачи при умеренной запутанности обозначений. Доказательства изложены так, что они могут быть немедленно обобщены итерацией или индукцией. Рассмотрение тождеств $\int K(\xi, \eta) dx \equiv \underline{v}$ и $\int K(\xi, \eta) dy \equiv \bar{v}$ опирается на лемму 10.2.1.

► Лемма 14.4.1. *Распределения x и y удовлетворяют тождествам*

$$\int K(\xi_1, \xi_2; \eta) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2) \equiv \underline{v} \quad (b \leq \eta < 1)$$

и

$$\int K(\xi_1, \xi_2; \eta) dy(\eta) \equiv \bar{v} \quad (a_i \leq \xi_i < a_{i+1}; \quad i = 1, 2)$$

в том и только в том случае, если выполняются следующие условия:

• (1) *распределения x_1 , x_2 и y абсолютно непрерывны, за исключением точек $\xi_2 = 1$, $\eta = 1$, и имеют плотности*

$$x'_i(t) = h_i \frac{Q'(t)}{Q^2(t) P(t)} \quad (a_i \leq t < a_{i+1}; \quad i = 1, 2),$$

$$y'(t) = k_i \frac{P'(t)}{P^2(t) Q(t)} \quad (a_i \leq t < a_{i+1}; \quad i = 1, 2);$$

(2) постоянные a_1, a_2, b_1, b_2 ($b_2 = 1$), $h_1, h_2, k_1, k_2, \alpha$ и β удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1, \\ 2h_2 &= 2\alpha + 1 - D_2, & h_1 &= [1 - D_1] h_2, \\ 2k_2 &= 2\beta + 1 - E, & k_1 &= [1 - P(a_2)] k_2. \end{aligned}$$

Доказательство. Интегрируя обе части (14.4.1) по x и упрощая, мы получаем

$$\begin{aligned} & \int K(\xi_1, \xi_2; \eta) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2) - \int K(\xi_1, \xi_2) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2) = \\ & = \begin{cases} -(1 - D_1) Q(\eta) \left(2 \int_{\eta}^1 P(\xi_2) dx_2(\xi_2) + 1 - D_2 \right) & \text{при } a_2 \leq \eta < 1, \\ -Q(\eta) \left(2 \int_{\eta}^{a_2} P(\xi_1) dx_1(\xi_1) + (1 - D_1)(1 + D_2) \right) & \text{при } a_1 \leq \eta \leq a_2, \\ -Q(\eta) [1 + D_1 + (1 - D_1) D_2] & \text{при } 0 \leq \eta \leq a_1, \\ (1 - D_1)(1 - D_2 + \alpha) & \text{при } \eta = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (14.4.2)$$

Правая часть этого равенства непрерывна, за исключением точки $\eta = 1$ (напомним, что x_2 может иметь скачок в $\xi = 1$), а зависимость от η выражена явно. Очевидно, интеграл

$$\int K(\xi_1, \xi_2; \eta) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2)$$

не может быть постоянным для $0 < \eta < a_1$. Мы можем, следовательно, заключить, что $a_1 \leq b$. Рассмотрение двух других членов показывает, что интеграл $\int K dx$ постоянен для $b \leq \eta < 1$ в том и только в том случае, когда существуют такие постоянные h_1 и h_2 , что

$$\begin{aligned} Q(\eta) \left(2 \int_{\eta}^1 P(\xi_2) dx_2(\xi_2) + 1 - D_2 \right) &= 2h_2 \quad \text{при } a_2 \leq \eta < 1, \\ Q(\eta) \left(2 \int_{\eta}^{a_2} P(\xi_1) dx_1(\xi_1) + (1 - D_1)(1 + D_2) \right) &= 2h_1 \quad \text{при } a_1 \leq \eta \leq a_2 \\ \text{и } h_2(1 - D_1) &= h_1. \end{aligned}$$

(14.4.3)

Интегрируя по частям, мы сразу видим, что x_1 и x_2 соответственно на $a_1 \leq \eta \leq a_2$ и на $a_2 \leq \eta < 1$ абсолютно непрерывны и имеют непрерывную плотность. Затем, деля обе части (14.4.3) на $Q(\eta)$ и дифференцируя, мы получаем, что

$$x'_i(t) = h_i Q'(t) [Q^2(t) P(t)]^{-1} \quad (a_i \leq t \leq a_{i+1}; i = 1, 2).$$

Если выражение для x'_i снова подставить в (14.4.3), то интегралы могут быть вычислены полностью, откуда становится видно, что равенство (14.4.3) справедливо только при $2h_2 = 2\alpha + 1 - D_2$ и $h_1 = [1 - D_1] h_2$.

Характеристика у аналогична, только вместо (14.4.1) нужно использовать уравнения, которые связывают $K(\xi_1, \xi_2; \eta)$ и $K(\xi_1; \eta)$; это выявит зависимость от ξ_2 и, таким образом, охарактеризует $y(t)$ для $a_2 \leq t < 1$. Дальнейшее применение этих методов выявляет зависимость от ξ_1 и характеризует $y(t)$ в интервале $a_1 \leq t \leq a_2$. Простое перечисление случаев приводит к равенству

$$K(\xi_1, \xi_2; \eta) = K(\xi_1, \eta) + \begin{cases} [1 - P(\xi_1)] P(\xi_2) [1 + Q(\eta)] & \text{при } \xi_2 < \eta, \\ [1 - P(\xi_1)] P(\xi_2) [1 - Q(\eta)] & \text{при } \eta < \xi_2. \end{cases}$$

Фиксируя ξ_1 и ξ_2 в промежутках $a_1 \leq \xi_1 \leq a_2$ и $a_2 \leq \xi_2 < 1$, мы получаем для стратегии у следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \int K(\xi_1, \xi_2; \eta) dy(\eta) + E = \\ = P(\xi_2) [1 - P(\xi_1)] \left(1 - E + 2 \int_{\xi_2}^1 Q(\eta) dy(\eta) \right) + \\ + P(\xi_1) \left(1 - E + 2 \int_{\xi_1}^1 Q(\eta) dy(\eta) \right). \end{aligned} \quad (14.4.4)$$

Если потребовать, чтобы обе части равенства (14.4.4) были в указанной области тождественно равны некоторой постоянной, то с помощью соответствующего дифференцирования легко выводим, что

$$y'_i(t) = k_i \frac{P'(t)}{P^2(t) Q(t)} \quad (a_i \leq t \leq a_{i+1}).$$

Подстановка в (14.4.4) приводит к эквивалентным условиям $2k_2 = 2\beta + 1 - E$ и $k_1 = [1 - P(a_2)] k_2$, что и требовалось. Этим доказательство леммы 14.4.1 завершено.

► Лемма 14.4.2. Если

$$\int K(\xi_1, \xi_2; \eta) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2) \equiv \underline{v}$$

для $b \leq \eta < 1$, то

$$\int K(\xi_1, \xi_2; \eta) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2) \geq \underline{v}$$

для всех η . Если

$$\int K(\xi_1, \xi_2; \eta) d\eta = \bar{v}$$

для $a_1 \leq \xi_1 \leq a_2 \leq \xi_2 < 1$, то

$$\int K(\xi_1, \xi_2; \eta) d\eta \leq \bar{v}$$

для всех ξ_1 и ξ_2 .

Доказательство. В доказательстве предыдущей леммы было установлено, что при $0 < \eta \leq a_1$ имеет место равенство

$$\int K dx = \int K(\xi_1, \xi_2) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2) - Q(\eta)[1 + D_1 + (1 - D_1)D_2].$$

Ясно, что справа стоит убывающая функция от η , которая по условию достигает значения $\underline{v}$ при $\eta = a_1$. Следовательно, величина

$\int K(\xi_1, \xi_2; \eta) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2)$ превышает $\underline{v}$ для всех $\eta < a_1$. Наконец, выигрыш, полученный в результате использования стратегии x против чистой стратегии $\eta = 1$, очевидно, равен

$$\int K(\xi_1, \xi_2) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2) - (1 - D_1)(1 - D_2 + \alpha).$$

Но, устремляя в равенстве (14.4.2) η к единице, мы получаем

$$\underline{v} = \int K(\xi_1, \xi_2) dx_1(\xi_1) dx_2(\xi_2) - (1 - D_1)(2\alpha + 1 - D_2),$$

и, следовательно, первое неравенство выполняется везде. Доказательство другого неравенства аналогично. Следует заметить, что строгое неравенство выполняется везде, за исключением областей $b \leq \eta \leq 1$ и $a_1 \leq \xi_1 \leq a_2 \leq \xi_2 \leq 1$.

Из леммы 14.4.2 немедленно следует, что стратегии x и y оптимальны в том и только том случае, когда одна из них непрерывна в 1. Ибо если x непрерывна в 1, то тождество $\int K dx \equiv \underline{v}$ выполняется в замкнутом интервале $b \leq \eta \leq 1$, откуда следует, что $\int \int K dx dy \equiv \underline{v}$. Кроме того, если x непрерывна в 1, то тождество $\int K d\eta \equiv \bar{v}$ выполняется относительно x почти всюду, так что $\int \int K dx dy \equiv \bar{v}$. Таким образом, $\underline{v} = \bar{v}$, и выводом леммы 14.4.2 является утверждение о том, что стратегии x и y оптимальны. То же рассуждение применяется, когда y непрерывна.

Существование решения. Последние две леммы свели задачу нахождения оптимальных стратегий к задаче нахождения решения системы уравнений. Анализ этой системы ничего не выигрывает от конкретизации значений m и n , напротив, последующие замечания могут показаться при этом более искусственными. Поэтому сейчас уместно вернуться к произвольным значениям n и m . В этой общей форме лемма 14.4.1 утверждает, что нужные плотности $x'_i(t)$ и $y'_j(t)$ всегда кратны соответственно $Q'(t)[Q^2(t)P(t)]^{-1}$ и $P'(t)[P^2(t)Q(t)]^{-1}$. Кроме того, постоянные h и k , на которые умножаются эти функции, изменяются только в точках $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$. В точке a_i постоянный множитель, соответствующий функции x , умножается на $1 - D_{i-1}$, а множитель, соответствующий функции y , — на $[1 - P(a_i)]$. Аналогично в каждой точке b_j постоянный множитель, соответствующий функции y , умножается на $1 - E_{j-1}$, а множитель, соответствующий функции x , — на $[1 - Q(b_j)]$. Таким образом, если мы рассматриваем $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ как произвольные параметры и полагаем

$$f^*(t) = \prod_{b_j > t} [1 - Q(b_j)] \frac{Q'(t)}{Q^2(t)P(t)}, \quad (14.4.5a)$$

$$g^*(t) = \prod_{a_i > t} [1 - P(a_i)] \frac{P'(t)}{P^2(t)Q(t)}, \quad (14.4.5b)$$

то условие (1) леммы 14.4.1 утверждает, что плотности x'_i и y'_j имеют вид

$$x'_i(t) = h_i f^*(t) \quad (a_i \leq t < a_{i+1}; i = 1, \dots, n), \quad (14.4.6a)$$

$$y'_j(t) = k_j g^*(t) \quad (b_j \leq t < b_{j+1}; j = 1, \dots, m). \quad (14.4.6b)$$

Уравнения в условии (2) леммы 14.4.2 заменяются при этом уравнениями

$$2h_n = 2\alpha + 1 - D_n, \quad (14.4.7a)$$

$$2k_m = 2\beta + 1 - E_m, \quad (14.4.7b)$$

$$h_i = [1 - D_i] h_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (14.4.8a)$$

$$k_j = [1 - E_j] k_{j+1} \quad (j = 1, \dots, m-1), \quad (14.4.8b)$$

$$a_1 = b_1, \quad (14.4.9)$$

а условие непрерывности (1) задается в виде

$$\alpha\beta = 0. \quad (14.4.10)$$

Предыдущие результаты теперь могут быть обобщены следующим образом: любая пара оптимальных стратегий x и y , удовлетворяющая условиям (1), (2) и (3) (см. стр. 566), должна удовлетворять уравнениям (14.4.5) — (14.4.10), и обратно, любое решение этих

уравнений, которое является стратегией, является также оптимальной стратегией. Кроме того, поскольку плотности, заданные соотношениями (14.4.6), всегда положительны, любое решение системы уравнений является стратегией в том и только в том случае, когда α и β неотрицательны и имеют место равенства

$$h_n \int_{a_n}^1 f^*(t) dt + \alpha = 1, \quad (14.4.11a)$$

$$k_m \int_{b_m}^1 g^*(t) dt + \beta = 1, \quad (14.4.11b)$$

$$h_i \int_{a_i}^{a_{i+1}} f^*(t) dt = 1 \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (14.4.12a)$$

$$k_j \int_{b_j}^{b_{j+1}} g^*(t) dt = 1 \quad (j = 1, \dots, m-1). \quad (14.4.12b)$$

В соотношениях (14.4.7) и (14.4.8) удобно записать D_i и E_j прямо в терминах f^* , g^* , α и β и вычислить h_i и k_j с помощью уравнений (14.4.11) и (14.4.12). При этом мы получим следующие уравнения:

$$2(1 - \alpha) = \int_{a_n}^1 [1 + \alpha - (1 - \alpha)P(t)] f^*(t) dt, \quad (14.4.13a)$$

$$2(1 - \beta) = \int_{b_m}^1 [1 + \beta - (1 - \beta)Q(t)] g^*(t) dt, \quad (14.4.13b)$$

$$\frac{1}{h_{i+1}} = \int_{a_i}^{a_{i+1}} [1 - P(t)] f^*(t) dt \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad (14.4.14a)$$

$$\frac{1}{k_{j+1}} = \int_{b_j}^{b_{j+1}} [1 - Q(t)] g^*(t) dt \quad (j = 1, \dots, m-1). \quad (14.4.14b)$$

Существование решения полной системы уравнений (14.4.9) — (14.4.14) может быть легко установлено. К этому результату важно добавить, что уравнения (14.4.5a), (14.4.5b) имеют смысл независимо от числа параметров $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_m$ (и даже в том случае, когда параметров нет вовсе!). Кроме того, пока параметры находятся строго внутри единичного интервала, все интегралы в (14.4.13a) —

(14.4.14б) сходятся при стремлении к нулю их нижних пределов. Следовательно, если α ($\alpha < 1$) и $b_1, \dots, b_m$ ($b_m < 1$) — заданные параметры, то a_n может быть получено из (14.4.13а), h_n — из (14.4.11а), a_{n-1} — из (14.4.14а) и т. д. Далее, если α фиксировано, то a_n является монотонно убывающей функцией b_m (интеграл убывает) и $a_n \rightarrow 0$, когда $b_m \rightarrow 1$; аналогично если $b_1, \dots, b_m$ фиксированы, то a_n является возрастающей функцией α и $a_n \rightarrow 1$ при $\alpha \rightarrow 1$.

Пусть теперь α и β — любые параметры, удовлетворяющие условиям $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha\beta = 0$ и $0 \leq \beta < 1$. Считая, что в определениях f^* и g^* параметры отсутствуют, вычислим a_n и b_m из (14.4.13а) и (14.4.13в). Обозначим эти решения через a_n^0 и b_m^0 и предположим для определенности, что $a_n^0 > b_m^0$. Затем положим $a_n^* = a_n^0$, а $b_m^0 = 0$ и вычислим решение h_n из уравнения (14.4.11а). Используя a_n^* как единственный параметр в определении f^* и g^* из (14.4.13) и (14.4.14а), найдем затем значения величин b_m и a_{n-1} и обозначим их через a_{n-1}^1 и b_m^1 . Легко проверить, что $b_m^1 < b_m^0 < a_n^*$. Для определенности предположим, что $b_m^1 < a_{n-1}^1$, положим $a_{n-1}^* = a_{n-1}^1$. Этот процесс можно продолжить, используя предыдущие отмеченные звездочкой буквы, как параметры, и вычисляя на каждом этапе новое a_i^k и новое b_j^k . Если $a_i^k \leq b_j^k$, то полагаем $b_j^* = b_j^k$; а если $a_i^k > b_j^k$, то $a_i^* = a_i^k$. В этом процессе каждый параметр меньше, чем вычисленные ранее, и не влияет на их значения, так как функции f^* или g^* , существенные для вычисления, от него не зависят. Следовательно, получающиеся числа являются совместными в том смысле, что если в качестве параметров используются a_i^* , то получаются те же значения b_j^* , и наоборот. Таким образом, эти числа образуют решение полной системы уравнений, за исключением уравнения $a_1^* = b_1^*$.

Наконец, для значений α , близких к 1 (при $\beta = 0$), выполняются соотношения $a_n^* \rightarrow 1$, $b_m^* \rightarrow 0$ и $b_1^* < b_m^* < a_1^*$; аналогично для β , близких к 1, $a_1^* < b_1^*$. Так как b_1^* и a_1^* — непрерывные функции от α и β , существует решение для полной системы. Если равенство $\alpha = \beta = 0$ приводит к неравенству $a_1^* < b_1^*$, то получается решение с $\alpha > 0$, $\beta = 0$; если же из равенства $\alpha = \beta = 0$ следует неравенство $b_1^* < a_1^*$, то получается решение с $\alpha = 0$, $\beta > 0$.

Пример 1. Если $P(t) = Q(t) = t$ и $n = 2$, $m = 1$, то

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{1 + 2\sqrt{1 + \sqrt{1/3}}}, \quad a_2 = \frac{1}{1 + 2\sqrt{1/3}},$$

$$\alpha = 2 - \sqrt{3}, \quad \beta = 0.$$

Пример 2. Если $P(t) = Q(t) = t$ и $n = m$, то

$$a_{n-k} = \frac{1}{2k+3} = b_{n-k}.$$

14.5*. Бабочкообразные ядра. Игра с выбором момента времени с одним действием была охарактеризована ядром вида

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta) & \text{при } \xi < \eta, \\ \Phi(\xi) & \text{при } \xi = \eta, \\ M(\xi, \eta) & \text{при } \xi > \eta, \end{cases} \quad (14.5.1)$$

где $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ являются подходящими монотонными функциями по каждой из переменных, а $K(\xi, \eta)$ может иметь разрыв на диагонали. Для таких игр мы определили общий вид оптимальных стратегий и нашли, что они в каждом случае состояли из плотности и некоторых скачков на концах интервала. Метод анализа каждый раз сводился к решению соответствующих интегральных уравнений второго рода. В этом пункте мы покажем, как распространить метод интегральных уравнений на решение игр с ядрами вида (14.5.1), которые сами непрерывны, но их первые производные могут иметь разрыв на диагонали, причем обе функции L и M должным образом вогнуты (но не обязательно монотонны). Именно мы предполагаем, что функция $K(\xi, \eta)$ имеет вид, описываемый соотношением (14.5.1), и непрерывна для всех $0 \leq \xi, \eta \leq 1$; это означает, что $L(\xi, \xi) = \Phi(\xi) = M(\xi, \xi)$. Дополнительно сделаем следующие предположения:

(а) в своих областях задания функции $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ имеют непрерывные третьи частные производные;

(б) производные $L_{\xi\xi}(\xi, \eta)$, $L_{\eta\eta}(\xi, \eta)$ строго отрицательны при $\xi \leq \eta$, а $M_{\xi\xi}(\xi, \eta)$, $M_{\eta\eta}(\xi, \eta)$ строго отрицательны при $\xi \geq \eta$. Другими словами, каждая из функций $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$ строго вогнута по каждой из переменных в своей области определения.

Заметим, в частности, что, поскольку может иметь место разрыв первых частных производных, ядро $K(\xi, \eta)$ не обязательно вогнуто по каждой из переменных на единичном квадрате. В качестве альтернативы к условию (б) мы могли бы потребовать, чтобы $M_{\xi\xi}$, $M_{\eta\eta}$, $L_{\xi\xi}$ и $L_{\eta\eta}$ были положительными в соответствующих треугольниках. Это требование приводит к аналогичной теории, точные выводы которой предоставляется сделать читателю.

$$(в) \quad L_{\eta}(t, t) - M_{\eta}(t, t) > 0 \quad \text{и} \quad M_{\xi}(t, t) - L_{\xi}(t, t) > 0.$$

Для выпуклых M и L условие (в) заменяется условием

$$M_{\eta}(t, t) - L_{\eta}(t, t) > 0 \quad \text{и} \quad L_{\xi}(t, t) - M_{\xi}(t, t) > 0.$$

Условие (в) можно считать выражением „бабочкообразности“ ядра в окрестности диагонали.

Перед формулировкой основной теоремы этого пункта напомним некоторые из обозначений, использованных для теории игр с выбором момента времени класса II, которые здесь также будут удобны. Стратегия x , состоящая из плотности f в интервале $[a, b]$ и скачков величины α и β в двух точках $c \leq a$ и $d \geq b$ соответственно, запишется в виде $x = (\alpha I_c, f_{ab}, \beta I_d)$. Подобным же образом мы интерпретируем $y = (\gamma I_e, g_{ab}, \delta I_d)$. Символ I_c снова будет использоваться для обозначения вырожденного распределения, сосредоточенного в точке c .

► Теорема 14.5.1. *В условиях, записанных выше, все оптимальные стратегии бабочкообразных игр имеют следующий вид: существует единственный интервал $[a, b]$, такой, что любая оптимальная максимизирующая стратегия x равна $(\alpha I_a, f_{ab}, \beta I_b)$ и любая минимизирующая стратегия y равна $(\gamma I_0, g_{ab}, \delta I_1)$. Кроме того, если $0 < a < 1$, то $\alpha > 0$ и если $0 < b < 1$, то $\beta > 0$; вообще же $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$. Плотности f_{ab} и g_{ab} получаются как ряды Неймана или как собственные функции интегральных операторов.*

Существование оптимальных стратегий для игры с ядром $K(\xi, \eta)$ следует из задачи 3 гл. 10, которая утверждает, что игра с непрерывным ядром, определенным на единичном квадрате, всегда имеет решение. Мы обратим здесь внимание на характеристику вида оптимальных стратегий, указанного в теореме. Значение игры будет обозначаться, как обычно, через v . Доказательство теоремы 14.5.1 подразделяется на ряд лемм.

► Лемма 14.5.1. *Существует единственный интервал $[a, b]$, являющийся спектром любой оптимальной стратегии максимизирующего игрока. Если этот интервал невырожденный, то он является также (с возможным дополнением 0 или 1) спектром любой оптимальной стратегии минимизирующего игрока. Если $a = b$, то любая оптимальная стратегия минимизирующего игрока концентрируется в точках $a, 0$ и 1 .*

Доказательство. Пусть x и y представляют собой соответственно оптимальные стратегии максимизирующего и минимизирующего игроков. Если (c, d) — открытый интервал x -меры нуль и $0 < c < d < 1$, то легко проверяется, что интеграл $\int K(\xi, \eta) dx(\xi)$ является строго вогнутой на этом интервале функцией. Следовательно,

$$\int K(\xi, \eta) dx(\xi) > v \quad (c < \eta < d).$$

Это соотношение вместе с леммой 10.2.1 показывает, что спектр любой оптимальной стратегии u не может содержать точек из интервала (c, d) . Следовательно, спектр u должен содержаться в спектре x с возможным дополнением 0 и 1.

Предположим теперь, что c и d принадлежат спектру x , что $c < d$ и что (c, d) имеет x -меру нуль. Тогда для любой оптимальной стратегии u интервал (c, d) имеет и u -меру нуль и легко проверяется, что функция $\int K(\xi, \eta) dy(\eta)$ строго вогнута на этом интервале. Так как последний интеграл является непрерывной функцией ξ и должен в конечных точках c и d иметь значение v , то

$$\int K(\xi, \eta) dy(\eta) > v \quad (c < \xi < d),$$

а это противоречит предположению об оптимальности u . Полученное противоречие показывает, что если c и d принадлежат спектру x , то открытый интервал (c, d) не может иметь x -меру нуль. Следовательно, спектр x должен быть замкнутым интервалом $[a, b]$.

Предположим, что для некоторой оптимальной стратегии x этот интервал невырожденный, т. е. предположим, что $a < b$. Тогда для любой оптимальной стратегии u

$$\int K(\xi, \eta) dy(\eta) \equiv v \quad (a \leq \xi \leq b).$$

Аргументация предыдущего пункта показывает, что никакой подинтервал $[a, b]$ не может иметь u -меру нуль (в противном случае выигрыш был бы строго вогнутым и большим чем v). Следовательно, $[a, b]$ содержится в спектре любой оптимальной стратегии u . Комбинируя этот результат с тем фактом, что спектр любой оптимальной стратегии u (не считая 0 и 1) содержится в спектре x , мы заключаем, что спектр любой оптимальной стратегии u состоит точно из интервала $[a, b]$ с возможным добавлением 0 и 1 и, следовательно (в силу наших выводов, сделанных двумя абзацами выше), что спектр любой оптимальной стратегии x должен содержать невырожденный интервал $[a, b]$. Поэтому он должен содержаться в спектре любой оптимальной стратегии u , так что спектр любой оптимальной стратегии x точно равен $[a, b]$.

Если бы интервал $[a, b]$ был вырожденным для любой оптимальной стратегии x , то он все еще оставался бы единственным. В самом деле, если бы два различных чистых распределения I_a и $I_{a'}$ были бы оба оптимальными, то спектр u содержался бы и в $\{0, a, 1\}$ и в $\{0, a', 1\}$. Спектр u являлся бы поэтому точечным множеством $\{0, 1\}$; следовательно, интеграл $\int K(\xi, \eta) dy(\eta)$ был бы строго вогнутым для $0 \leq \xi \leq 1$, т. е. везде меньшим или равным v и точно

равным v в $\xi = a$ и $\xi = a'$. Эти условия явно противоречивы; следовательно, $a = a'$.

Следующие две леммы устанавливают, что на внутренности $[a, b]$ любая оптимальная стратегия состоит из непрерывной плотности.

► Лемма 14.5.2. *Оптимальная стратегия x игрока I непрерывна внутри $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть η_0 — любая внутренняя точка $[a, b]$. Так как предполагается, что стратегия x оптимальна и мы знаем из леммы 14.5.1, что спектр любой оптимальной стратегии u содержит $[a, b]$, мы заключаем, что $\int K(\xi, \eta) dx(\xi) \equiv v$ для всех η в $[a, b]$. Следовательно,

$$\int \frac{K(\xi, \eta) - K(\xi, \eta_0)}{\eta - \eta_0} dx(\xi) = 0 \quad (\eta \neq \eta_0; \eta, \eta_0 \in [a, b]).$$

По предположению, правая производная $K_{\eta+}$ всюду существует и ограничена; тогда на основании ограниченной сходимости мы получаем

$$\int_0^1 K_{\eta+}(\xi, \eta_0) dx(\xi) = 0.$$

Аналогично мы получаем

$$\int_0^1 K_{\eta-}(\xi, \eta_0) dx(\xi) = 0.$$

Наконец, из того, что везде на $[0, 1]$, за исключением точки $\xi = \eta_0$, имеет место равенство $K_{\eta+}(\xi, \eta_0) - K_{\eta-}(\xi, \eta_0) = 0$, мы выводим, что

$$0 = \int [K_{\eta+}(\xi, \eta_0) - K_{\eta-}(\xi, \eta_0)] dx(\xi) = [L_{\eta}(\eta_0, \eta_0) - M_{\eta}(\eta_0, \eta_0)] \sigma_{\eta_0},$$

где σ_{η_0} — скачок $x(\xi)$ в точке η_0 . По условию (в) $\sigma_{\eta_0} = 0$ и, следовательно, x непрерывна в η_0 , что и требовалось.

► Лемма 14.5.3. *Оптимальная стратегия x игрока I абсолютно непрерывна, а ее плотность x' непрерывна при $a < \xi < b$.*

Доказательство. Предыдущая лемма позволяет нам записать $x = (\alpha_0 I_a, x_0, \beta_0 I_b)$, где x_0 — непрерывная часть x . Так как стратегия x оптимальна, то при $a \leq \eta \leq b$

$$\begin{aligned} v &= \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) = \\ &= \alpha_0 L(a, \eta) + \beta_0 M(b, \eta) + \int_a^{\eta} L(\xi, \eta) dx_0(\xi) + \int_{\eta}^b M(\xi, \eta) dx_0(\xi). \end{aligned} \quad (14.5.2)$$

Непрерывность x_0 делает возможным простое интегрирование по частям, которое приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \int_a^\eta L dx_0 + \int_\eta^b M dx_0 &= \\ &= M(b, \eta) x_0(b) = \int_a^\eta L_\xi(\xi, \eta) x_0(\xi) d\xi - \int_\eta^b M_\xi(\xi, \eta) x_0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

[так как ввиду непрерывности $M(\eta, \eta) = L(\eta, \eta)$, а $x_0(a) = 0$]. Если мы подставим последнее выражение в (14.5.2) и продифференцируем, то получим

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 L_\eta(a, \eta) + \beta_0 M_\eta(b, \eta) + x_0(b) M_\eta(b, \eta) - \\ &\quad - \int_a^\eta L_{\xi\eta}(\xi, \eta) x_0(\xi) d\xi - \int_\eta^b M_{\xi\eta}(\xi, \eta) x_0(\xi) d\xi - \\ &\quad - [L_\xi(\eta, \eta) - M_\xi(\eta, \eta)] x_0(\eta). \end{aligned}$$

Но поскольку $L_\xi - M_\xi \leq -\epsilon < 0$, из последнего уравнения и предположения (а) следует, что функция $x_0(\eta)$ абсолютно непрерывна. Если мы продифференцируем последнее уравнение еще раз — этот шаг является законным ввиду предположения (а), — мы выведем, что x'_0 непрерывна. Подобным же образом доказывается следующая лемма.

► Лемма 14.5.4. *Оптимальная стратегия у игрока II абсолютно непрерывна с непрерывной плотностью внутри $[a, b]$.*

► Лемма 14.5.5. *Максимизирующие оптимальные стратегии имеют вид $x = (\alpha I_a, f_{ab}, \beta I_b)$, где $\alpha > 0$, когда $0 < a < 1$, $\beta > 0$, когда $0 < b < 1$, и во всех случаях $\alpha, \beta \geq 0$.*

Доказательство. Леммы 14.5.1 — 14.5.3 совместно утверждают, что любая оптимальная стратегия x имеет указанный вид. Остается показать, что если $0 < a < 1$, то x имеет скачок в точке $\xi = a$. Предположим противное; тогда производная от функции $h(\eta) = \int K(\xi, \eta) dx(\xi)$ в точке $\eta = a$ существует. Но если производная в точке $\eta = a$ существует, то она должна быть там равна нулю, так как $h(\eta) = v$ при $a \leq \eta \leq b$. Далее, при $0 < \eta < a$ функция $h(\eta)$ строго вогнута; следовательно, последнее утверждение дает нам, что $\int K(\xi, \eta) dx(\xi) < v$ для $0 < \eta < a$, а это противоречит оптимальности x . Аналогичное рассуждение применимо и к концевой точке b , если она находится внутри единичного интервала.

► Лемма 14.5.6. Любая оптимальная минимизирующая стратегия u имеет вид

$$u = (\gamma I_0, g_{ab}, \delta I_1), \quad \text{где } \gamma, \delta \geq 0.$$

Доказательство. Лемма 14.5.4 утверждает, что оптимальная стратегия u абсолютно непрерывна в открытом интервале (a, b) . Остается только показать, что функция u непрерывна в точке $\xi = a$, если $0 < a < 1$, и непрерывна в точке $\xi = b$, если $0 < b < 1$. Рассуждая, как в лемме 14.5.2, мы выводим сначала, что

$$\int K_{\xi+}(a, \eta) d\eta = 0.$$

Кроме того,

$$\int K(a, \eta) d\eta = v, \quad \int K(\xi, \eta) d\eta \leq v \quad (\xi < a).$$

Поэтому

$$\int \frac{K(a, \eta) - K(\xi, \eta)}{a - \xi} d\eta \geq 0 \quad (\xi < a),$$

и, переходя к пределу, мы получаем неравенство

$$\int K_{\xi-}(a, \eta) d\eta \geq 0.$$

Следовательно,

$$0 \geq \int [K_{\xi+}(a, \eta) - K_{\xi-}(a, \eta)] d\eta = [M_{\xi}(a, a) - L_{\xi}(a, a)] \sigma_a,$$

где σ_a есть u -мера точки a . Так как $\sigma_a \geq 0$ и мы предположили, что $M_{\xi}(a, a) - L_{\xi}(a, a) > 0$, мы должны заключить, что $\sigma_a = 0$. Подобное рассуждение применяется и к точке b , если $0 < b < 1$.

Интегральные уравнения. Мы хотим теперь получить плотности f_{ab} и g_{ab} , как решения интегральных уравнений. Если мы используем обозначения $f = f_{ab}$ и $g = g_{ab}$, то тождества

$$v \equiv \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) \quad (a \leq \eta \leq b),$$

$$v \equiv \int_0^1 K(\xi, \eta) dy(\eta) \quad (a \leq \xi \leq b)$$

примут вид

$$v \equiv \alpha L(a, \eta) + \int_a^{\eta} L(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \int_{\eta}^b M(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \beta M(b, \eta),$$

$$v \equiv \gamma M(\xi, 0) + \int_a^{\xi} M(\xi, \eta) g(\eta) d\eta + \int_{\xi}^b L(\xi, \eta) g(\eta) d\eta + \delta L(\xi, 1).$$

Два последовательных дифференцирования первого тождества приводят соответственно к тождествам

$$0 \equiv \alpha L_{\eta}(a, \eta) + \int_a^{\eta} L_{\eta}(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \int_{\eta}^b M_{\eta}(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \beta M_{\eta}(b, \eta)$$

и

$$0 \equiv \alpha L_{\eta\eta}(a, \eta) + \int_a^{\eta} L_{\eta\eta}(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \int_{\eta}^b M_{\eta\eta}(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \\ + \beta M_{\eta\eta}(b, \eta) + [L_{\eta}(\eta, \eta) - M_{\eta}(\eta, \eta)] f(\eta).$$

Если мы последнее тождество разделим на ненулевой коэффициент $L_{\eta} - M_{\eta}$ и переставим члены, то получим

$$f - T_{ab}f = \alpha p_a + \beta p_b, \quad (14.5.3)$$

где

$$T_{ab}f = \int_a^{\eta} \frac{-L_{\eta\eta}(\xi, \eta) f(\xi) d\xi}{(L_{\eta} - M_{\eta})(\eta, \eta)} + \int_{\eta}^b \frac{-M_{\eta\eta}(\xi, \eta) f(\xi) d\xi}{(L_{\eta} - M_{\eta})(\eta, \eta)}, \\ p_a = \frac{-L_{\eta\eta}(a, \eta)}{(L_{\eta} - M_{\eta})(\eta, \eta)}, \quad p_b = \frac{-M_{\eta\eta}(b, \eta)}{(L_{\eta} - M_{\eta})(\eta, \eta)}.$$

Аналогичное дифференцирование тождества, выполняемое для g , показывает, что g должно удовлетворять интегральному уравнению

$$g - U_{ab}g = \gamma q_0 + \delta q_1, \quad (14.5.4)$$

где

$$U_{ab}g = \int_a^{\xi} \frac{-M_{\xi\xi}(\xi, \eta) g(\eta) d\eta}{(M_{\xi} - L_{\xi})(\xi, \xi)} + \int_{\xi}^b \frac{-L_{\xi\xi}(\xi, \eta) g(\eta) d\eta}{(M_{\xi} - L_{\xi})(\xi, \xi)}, \\ q_0 = \frac{-M_{\xi\xi}(\xi, 0)}{(M_{\xi} - L_{\xi})(\xi, \xi)}, \quad q_1 = \frac{-L_{\xi\xi}(\xi, 1)}{(M_{\xi} - L_{\xi})(\xi, \xi)}.$$

Для определения функций f и g должны быть использованы интегральные уравнения (14.5.3.) и (14.5.4). Легко проверить, что операторы T_{ab} и U_{ab} являются строго положительными и вполне непрерывными линейными преобразованиями. [Общая теория положительных операторов, изложенная в п. 13.3, предусматривает различные характеристики спектрального радиуса $\lambda(T_{ab})$.] Еще одной такой характеристикой, справедливой только для строго положительных линейных операторов, является следующая¹⁾:

$$\lambda(T_{ab}) = \inf \{ \lambda \mid T_{ab}f \leq \lambda f \text{ для некоторого } f > 0 \}.$$

¹⁾ Доказательство легко получается с помощью использования собственной функции линейного преобразования, ядро которого является транспонированным ядру, определяющему преобразование T_{ab} .

Существование оптимальной стратегии, удовлетворяющей уравнению (14.5.3) вместе с положительностью p_a и p_b , приводит к неравенству $\lambda(T_{ab}) \leq 1$. Если $0 < a < 1$ или $0 < b < 1$, то из леммы 14.5.5 следует, что $\lambda(T_{ab}) < 1$. Аналогично $\mu(U_{ab}) \leq 1$, где $\mu(U_{ab})$ — спектральный радиус U_{ab} . Вообще говоря, может иметь место как равенство $\mu(U_{ab}) = 1$, так и неравенство $\mu(U_{ab}) < 1$.

Окончательные доказательства утверждений теоремы 14.5.1 почти полностью содержатся в леммах 14.5.1—14.5.5. Утверждение о том, что f_{ab} и g_{ab} выражаются как ряд Неймана или собственные функции, эквивалентно утверждению о том, что $\lambda(T_{ab}) \leq 1$ и $\mu(U_{ab}) \leq 1$ (см. теорему 13.3.4). Доказательство теоремы 14.5.1 тем самым завершено.

Покажем сейчас, как могут быть вычислены различные параметры оптимальных стратегий. Постоянные α , β , a , b можно определить из следующих необходимых соотношений:

$$\alpha + \beta + \int_a^b f_{ab}(t) dt = 1,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \eta^+} \int K(\xi, \eta) dx(\xi) \right|_{\eta=a} = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial \eta^+} \text{ означает производную справа} \right),$$

$$\int K(\xi, 0) dx(\xi) = \int K(\xi, 1) dx(\xi) = \int K(\xi, a) dx(\xi).$$

Здесь f_{ab} вычисляется, как ряд Неймана от оператора T_{ab} , если $\lambda(T_{ab}) < 1$; именно

$$f_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} T_{ab}^n (\alpha p_a + \beta p_b).$$

Если $\lambda(T_{ab}) = 1$, то f_{ab} — положительная собственная функция, соответствующая собственному значению 1.

Постоянные γ и δ вычисляются из соотношений

$$\gamma + \delta + \int_a^b g_{ab}(t) dt = 1,$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \xi} \int K(\xi, \eta) dy(\eta) \right|_{\xi=a} = 0.$$

Наконец, g_{ab} получается как бесконечный ряд

$$g_{ab} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{ab}^n (\gamma q_0 + \delta q_1)$$

при $\mu(U_{ab}) < 1$. В случае $\mu(U_{ab}) = 1$ g_{ab} — соответствующая положительная собственная функция. Справедливость этих выражений уже была установлена в ходе доказательства теоремы 14.5.1.

Проиллюстрируем теорию следующим примером.

Пример. Рассмотрим ядро

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta) = \eta - \xi - \lambda(\xi - \eta)^2, & \xi \leq \eta, \\ M(\xi, \eta) = \xi - \eta - \lambda(\xi - \eta)^2, & \xi \geq \eta, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$. Легко проверяется, что

$$L_{\xi\xi} = L_{\eta\eta} = M_{\xi\xi} = M_{\eta\eta} = -2\lambda$$

и

$$L_{\eta} = 1 + 2\lambda(\xi - \eta), \quad M_{\eta} = -1 + 2\lambda(\xi - \eta),$$

$$\frac{-L_{\eta\eta}}{L_{\eta} - M_{\eta}} = \frac{-M_{\eta\eta}}{L_{\eta} - M_{\eta}} = \frac{2\lambda}{2} = \lambda.$$

Кроме того, легко показать, что это ядро инвариантно при преобразованиях $\xi \rightarrow 1 - \xi$ и $\eta \rightarrow 1 - \eta$. Следовательно, мы будем искать интервал длины c , симметричный относительно $1/2$ и играющий роль $[a, b]$. По тем же соображениям симметрии мы предполагаем, что $\alpha = \beta$; интегральное уравнение (14.5.3) принимает вид

$$2\alpha\lambda = f(\xi) - \int_{\frac{1}{2}-\frac{c}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{c}{2}} \lambda f(t) dt,$$

и, следовательно, $f(\xi) \equiv k$ и $2\alpha\lambda = k - c\lambda k$. Условие нормировки требует, чтобы $ck = 1 - 2\alpha$. Если мы исключим k из последних двух уравнений, то получим $\alpha = \frac{(1-\lambda c)}{2}$. Подстановка этого результата в предыдущее уравнение дает $k = \lambda$. Из условия

$$\int K(\xi, 0) dx(\xi) = \int K(\xi, a) dx(\xi)$$

после простого вычисления следует, что либо $c=1$, либо $c = -1 + \frac{2}{\lambda}$.

Ясно, что если $c=1$, то $a=0$ и $b=1$. Если же $c = -1 + \frac{2}{\lambda}$, то $a = 1 - \frac{1}{\lambda}$ и $b = \frac{1}{\lambda}$; очевидно, что эти значения содержатся в единичном интервале, только если $\lambda > 1$, и для того, чтобы выполнялось неравенство $c \geq 0$, необходимо, чтобы λ удовлетворяло условию $\lambda \leq 2$. Рассмотрим отдельно три случая.

Случай 1: $0 < \lambda \leq 1$. Мы показали, что для этого случая $c=1$, $a=0$ и $b=1$. Так как $\alpha = \frac{(1-\lambda c)}{2}$, то мы имеем $\alpha = \frac{(1-\lambda)}{2}$.

Оптимальная стратегия игрока I равна

$$x = \left(\frac{1-\lambda}{2} I_0, f, \frac{1-\lambda}{2} I_1 \right),$$

где $f = \lambda$ на $[0, 1]$. Так как любая оптимальная стратегия у минимизирующего игрока имеет ту же плотность λ на этом интервале, мы заключаем, что $\gamma + \delta = \alpha + \beta = 2\alpha$. Но ядро игры симметрично относительно точки $\xi = \frac{1}{2}$ и, следовательно, $\gamma = \delta$; это означает, что $y = x$. Наконец, можно утверждать, что эти стратегии единственны: их единственность следует из единственности $f_{ab} = g_{ab} = \lambda$ и из симметрии, которая влечет равенства $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta$.

Случай 2: $1 < \lambda < 2$. Мы уже показали, что в этом случае $c = -1 + 2/\lambda$, $a = 1 - 1/\lambda$ и $b = 1/\lambda$; так как $\alpha = \frac{1-\lambda c}{2}$, мы получаем $\alpha = \frac{(\lambda-1)}{2}$. Стратегии

$$x = \left(\frac{\lambda-1}{2} I_{1-\frac{1}{\lambda}}, f, \frac{\lambda-1}{2} I_{\frac{1}{\lambda}} \right),$$

$$y = \left(\frac{\lambda-1}{2} I_0, f, \frac{\lambda-1}{2} I_1 \right),$$

где $f \equiv \lambda$ на $[1 - 1/\lambda, 1/\lambda]$, оптимальны, и легко показать, что они единственны.

Случай 3: $2 \leq \lambda$. Легко проверить непосредственно, что оптимальные стратегии равны

$$x = (I_{1/2}), \quad y = \left(\frac{1}{2} I_0, \frac{1}{2} I_1 \right).$$

Значение игры равно здесь $1/2 - \lambda(1/2)^2$, а найденные оптимальные стратегии единственные.

Ядра типа бабочки. Ядро называется ядром типа бабочки, если условия (а) и (б) сохраняются, а условие (в) усиливается: функция $L(\xi, \eta)$ строго возрастает по η и строго убывает по ξ , а $M(\xi, \eta)$ строго возрастает по ξ и строго убывает по η . Иначе говоря, новое условие означает, что ядро монотонно вне диагонали. Ядра типа бабочки являются важным частным классом рассматриваемых в этом пункте ядер. Двумя примечательными примерами являются:

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} \varphi(\xi)\psi(\eta) & \text{при } \xi \leq \eta, \\ \varphi(\eta)\psi(\xi) & \text{при } \xi \geq \eta, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &\geq k, & \psi(\xi) &\geq k, \\ \varphi'(\xi) &\leq -k, & \psi'(\xi) &\geq k, & (k > 0) \\ \varphi''(\xi) &\leq -k, & \psi''(\xi) &\leq -k, \end{aligned}$$

причем функции φ и ψ имеют непрерывные третьи производные и

$$K(\xi, \eta) = |\xi - \eta| - \lambda(\xi - \eta)^2 \quad \left(0 < \lambda \leq \frac{1}{2}\right).$$

Приведем без доказательства следующую теорему для ядер типа бабочки.

► Теорема 14.5.2. Если ядро $K(\xi, \eta)$ является ядром типа бабочки, то игроки I и II имеют единственные оптимальные стратегии вида $x = (\alpha I_0, f_0, \beta I_1)$ и $y = (\gamma I_0, g_0, \delta I_1)$ соответственно, где f_0 и g_0 абсолютно непрерывны на всем интервале и получаются как пара решений интегральных уравнений

$$f_0 - T f_0 = \alpha p_0 + \beta p_1,$$

$$g_0 - U g_0 = \gamma q_0 + \delta q_1,$$

где обозначения $T = T_{01}$ и $U = U_{01}$ взяты соответственно из уравнений (14.5.3) и (14.5.4), а p_0, p_1, q_0, q_1 определяются из тех же уравнений.

Кроме того, решение этих интегральных уравнений может быть вычислено в виде ряда Неймана

$$f_0 = \sum_{n=0}^{\infty} T^n (\alpha p_0 + \beta p_1),$$

$$g_0 = \sum_{n=0}^{\infty} U^n (\gamma q_0 + \delta q_1).$$

Постоянные α и β определяются из условия нормирования и из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int K(\xi, \eta) dx(\xi) \Big|_{\eta=0} = 0.$$

Постоянные γ и δ определяются из условия нормирования и из соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int K(\xi, \eta) dy(\eta) \Big|_{\xi=0} = 0.$$

14.6. Задачи.

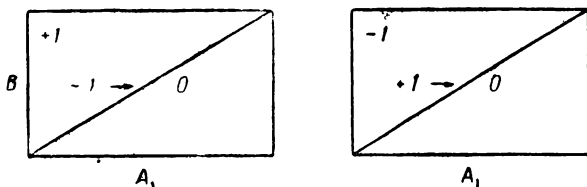
1. Решить шумную дуэль с одним выстрелом для каждого игрока и функциями меткости $P_1(t) = \left| \frac{1}{3} - t \right|$ и $P_2(t) = \frac{1}{2} - \left| \frac{1}{2} - t \right|$, используя метод примера 2 п. 14.1.

2. Решить шумную дуэль между двумя противниками, в которой игроки имеют по одному выстрелу соответственно с вероятностями p_1 и p_2 . Предположить, что функция меткости для каждого игрока равна t и что выигрыш игрока I равен α , если выживет он один, β ,

если выживет один игрок II, $\alpha + \beta$, если не выживет ни один из игроков, и 0, если выживут оба. Предположить, что $\alpha > 0$ и $\beta < 0$.

Указание: эта задача должна быть решена методами гл. 13.

3. Рассмотреть игру, в которой игрок I выбирает точку из отрезков A_1 или A_2 , а игрок II выбирает точку из отрезка B с указанной функцией выигрыша (см. рисунок). Доказать, что эта игра не обладает значением. Интерпретировать эту игру, как шумную дуэль.



4. Проверить, что шумная дуэль с одинаковыми функциями меткости $P(t) = t$ и соответственно m и n выстрелами для игроков I и II имеет следующее решение:

(а) значение равно $\frac{m-n}{m+n}$;

(б) как только выстрел произведен, игроки должны играть оптимально игру с оставшимся числом выстрелов. Если ни один выстрел не сделан до момента $t = \frac{1}{m+n}$, то игрок с большим числом выстрелов должен в этот момент выстрелить один раз. Если же окажется, что он не выстрелил, то его противник должен немедленно выстрелить.

5. Решить задачу 4 для произвольной монотонно возрастающей функции меткости $P(t)$, где $P(0) = 0$ и $P(1) = 1$.

6. Решить игру, ядро которой, определенное на единичном квадрате, равно

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > \eta \text{ или } \eta > \xi + \lambda, \\ \lambda & \text{при } \xi + \lambda \geq \eta \geq \xi, \end{cases}$$

где $\lambda < 1$.

Эта игра имеет следующую интерпретацию. Игроком I размещается препятствие в интервале $[0, 1]$ (который может представлять собой интервал времени). Игрок II запустил баллистическую ракету, летящую от 1 до 0 с постоянной скоростью 1, за исключением интервала длины λ , который она пролетает с увеличенной скоростью. Механизм ракеты таков, что рывок в скорости на ближайший интервал длины λ может быть начат в любой данный момент. Этот момент является чистой стратегией, имеющейся в распоряжении игрока II.

Если ракета летит с единичной скоростью, то встреченное препятствие отклоняет ее от курса с вероятностью 1. Если полет происходит с увеличенной скоростью, то ракета отклоняется с вероятностью λ . Выигрыш игрока I равен вероятности отклонения ракеты.

7. Дать доказательство теоремы 14.5.2, используя теорию положительных преобразований, а также другим способом, используя методы теоремы 14.5.1.

8. Игроки I и II на торгах предлагают неизвестные друг другу цены за контракт, выполнение которого будет стоить им соответственно c_1 и c_2 единиц. Контракт присуждается предложившему более низкую ставку, а если ставки равны, то случайным образом. Найти функции выигрыша каждого из игроков и показать, что если $c_1 = c_2$, то существуют чистые равновесные стратегии.

Эта игра имеет ненулевую сумму. Пусть $K_1(\xi, \eta)$ и $K_2(\xi, \eta)$ означают функции выигрыша соответственно игроков I и II. Пара стратегий $x(\xi)$ и $y(\eta)$ называется оптимальной в смысле ситуаций равновесия, если

$$\int K_1(\xi, \eta) dx(\xi) \geq \int K_1(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) \quad \text{при } 0 < \eta$$

и

$$\int K_2(\xi, \eta) dy(\eta) \geq \int K_2(\xi, \eta) dx(\xi) dy(\eta) \quad \text{при } 0 < \xi.$$

Таково понятие равновесной стратегии. Оно приводит к обычному пониманию оптимальной стратегии, когда $K_2(\xi, \eta) = -K_1(\xi, \eta)$. Заметим, что в этом примере мы предполагаем, что область, в которой могут изменяться ξ и η , является всей вещественной осью.

9. В задаче 8 предположить, что $c_1 \neq c_2$ и что все ставки должны лежать в интервале $[a, \infty)$. Показать, что для любого $a > \max(c_1, c_2)$ существуют оптимальные стратегии (т. е. ситуация равновесия) с непрерывными положительными плотностями в интервале $[a, \infty)$.

Указание: здесь применяются методы бесшумных дуэлей. Попытайтесь определить пару x и y , которая делает интегралы задачи 8 постоянными в интервале $[a, \infty)$.

Комментарии и библиография к главе 14

14.1. Происхождение задач теории шумных дуэлей или игр с выбором момента времени класса I аналогично происхождению бесшумных дуэлей (см. гл. 13). Однако общая шумная дуэль, описанная в этом пункте, первоначально была изучена и решена Гликсбергом [1]. Независимое и более полное определение решения было дано Карлином [2], использовавшим другой подход. Обобщенная шумная дуэль решается равномерной аппроксимацией решения последовательности игр с выбором момента времени класса II с последующим традиционным предельным переходом. Впоследствии была установлена единственность оптимальных стратегий. Анализ этих игр усложняется тем, что один из игроков в них не обязательно обладает достижимой оптимальной стратегией, хотя ϵ -оптимальные стратегии существуют для

любого положительного ε . В силу этого понятие единственности в этом контексте должно быть тщательно определено.

Ввиду того что один игрок не обязательно обладает достижимой оптимальной стратегией, не удивительно, что существуют относительно простые шумные дуэли, которые являются неопределенными в том смысле, что они не имеют значения. Шепли (задача 4 гл. 10) построил несколько таких патологических примеров (см. также Сайон и Вулф [1]).

14.2. Первым примером этого пункта является частый случай общей игры с выбором момента времени класса I. Обобщение шумной дуэли на игры, которые допускают немонотонные функции меткости, принадлежит Блекуэллу [2].

14.3. Мы следуем здесь доказательству Карлина [2].

14.4. Дуэли, включающие несколько возможностей действия, были первоначально введены Блекуэллом и Гиршиком [1] (см. примечания к гл. 13). Они успешно рассмотрели шумную дуэль соответственно с n и m выстрелами для случая равных функций меткости (см. задачу 4). Однако их методы нельзя распространить на асимметричный случай, и никто еще не нашел методов, применимых к этой ситуации. Эта проблема сложна, так как достижимые оптимальные стратегии не обязательно существуют, даже если игра и обладает значением.

Большие успехи были достигнуты в изучении бесшумных дуэлей с несколькими действиями, а именно для естественного обобщения модели из п. 13.2. Решение бесшумной дуэли с одинаковыми функциями меткости и n выстрелами для каждого игрока было первоначально получено из интуитивных соображений. Дальнейшее исследование бесшумной дуэли с равными функциями меткости и числами выстрелов 2 и 1 соответственно для игроков I и II предпринял Пинни во время своих консультаций для корпорации РЭНД. Хотя его результаты и обладали неточностями во второстепенных деталях, но они дали возможность Шепли найти правильное решение [2], в котором он остроумно выделил некоторые из основных особенностей решения общей бесшумной дуэли.

Рестрепо [1] в своей диссертации решил проблему в общем виде. Это решение довольно запутанное — в частности, для определения параметров решения приходится решать огромное число громоздких трансцендентных уравнений. Сложность анализа может помешать некоторым читателям осмыслить важность работы Рестрепо; в действительности, однако, трудоемкость аппарата обусловлена природой проблемы, и трактовка Рестрепо едва ли может быть улучшена. В этом пункте мы рассматриваем результат Рестрепо при доказательстве лемм 14.4.1—14.4.2 для случая, когда числа выстрелов равны 2 и 1, и допуская произвольные монотонные функции точности.

По этому поводу следует заметить, что дуэль с n и m выстрелами не представляет собой исчерпывающего обобщения игр с выбором момента времени класса II. Класс игр с одним действием охватывает многие игры, которые не могут быть представлены в виде дуэлей (ядра в сепарабельной форме). Полное обобщение игр с выбором момента времени на более высокие размерности остается открытой проблемой.

14.5. Примеры игр с ядрами типа бабочки и некоторые из их общих свойств были впервые найдены Гликсбергом и Гроссом [1], которым принадлежит также и образное название. Общая теория и полное решение принадлежат Карлину [2]. Доказательство теоремы 14.5.2 может быть найдено в работе Карлина [2].

14.6. Задача принадлежит Шепли (не опубликовано). Задача 4 принадлежит Блекуэллу и Гиршику [1]. Понятие точки равновесия для игр с ненулевой суммой введено Нэшем [1]. Задачи 8 и 9 были предложены Шепли [3].

РАЗЛИЧНЫЕ ИГРЫ

Мы видели, что для получения информации, касающейся оптимальных стратегий в непрерывной игре, на ее ядро необходимо наложить специальные ограничения. Обычно необходимые ограничения естественно определяются моделью, на которой основана игра. В таких случаях и решения могут быть приближенно угаданы из интуитивных соображений. Однако если мы стремимся к построению полной теории бесконечных игр, важно создать классификацию игр на единичном квадрате без каких-либо ссылок на физическое содержание игры. Читателю следует просмотреть в п. 10.3 предварительный обзор игр, описываемых в этой главе.

Ввиду относительной доступности полиномиальных игр мы рассмотрим сначала те игры, ядра которых являются аналитическими или рациональными функциями. Эти игры исследуются в п. 15.1. Хотя для таких игр и возможно получить некоторую информацию относительно оптимальных стратегий, но эта информация по необходимости ограничена. Существуют некоторые рациональные игры, единственными решениями которых являются очень сложные распределения (например, распределение Кантора).

В п. 15.2 мы рассматриваем игры, ядра которых являются колоколообразными. В этом случае мы можем дать достаточно полное описание оптимальных стратегий. Затем изучение распространяется на так называемые ядра типа Пойа (Т. П), для которых решения напоминают решения бабочкообразных игр (см. п. 14.5).

В последнем пункте этой главы кратко описывается важное понятие игр, инвариантных относительно группы преобразований. Здесь мы пытаемся связать симметрию ядра игры с видом оптимальной стратегии. Принцип инвариантности состоит здесь в сведении в некотором смысле сложных игровых проблем к более простым случаям, но в целом оказывается, что его приложение более связано с изучением задач теории статистических решений. Наше обсуждение инвариантных игр можно рассматривать как введение в более обширную теорию, рассматриваемую в рамках игр на единичном квадрате.

15.1. Игры с аналитическими ядрами. Функция выигрыша $K(\xi, \eta)$ на единичном квадрате, непрерывная по совокупности переменных (ξ и η), называется аналитическим ядром, если (1) для любого фиксированного η она может быть разложена около каждого ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) в сходящийся ряд Тейлора и (2) для любого ξ она может быть разложена около каждого η ($0 \leq \eta \leq 1$) в сходящийся ряд Тейлора. Каждый такой степенной ряд обладает положительным радиусом сходимости.

Многие из теорем об аналитических ядрах описывают спектр оптимальных стратегий. В этом отношении они подобны теоремам, полученным для полиномиальных ядер, но результаты здесь менее точные. Типичной такой теоремой является

► **Теорема 15.1.1.** *Если ядро аналитическое и один из игроков имеет оптимальную стратегию, спектр которой содержит бесконечное число точек, то любая стратегия, оптимальная для другого игрока, является устойчивой.*

Доказательство. Пусть y — любая оптимальная минимизирующая стратегия; положим $h(\xi) = \int K(\xi, \eta) dy(\eta)$. Функция h аналитическая и равна v в любой точке ξ , принадлежащей спектру любой оптимальной стратегии (лемма 10.2.1). Если число этих точек бесконечно, то из аналитичности h следует, что $h(\xi) \equiv v$. Это и означает что y — устойчивая стратегия.

Аналогичное рассуждение может быть использовано, когда спектр, содержащий бесконечное число точек, имеет оптимальные, минимизирующие стратегии.

Дальнейшие, более точные результаты могут быть получены наложением на ядра дополнительных ограничений. Теоремы 15.1.2 и 15.1.3 описывают два таких результата. Другие теоремы предлагаются в виде задач 3 и 4 в конце главы.

► **Теорема 15.1.2.** *Пусть $Q(\xi, \eta)$ — величина, обратная $K(\xi, \eta)$. Если функция $K(\xi, \eta)$ аналитическая на единичном квадрате и существует такое ξ_0 , что $Q_{\xi}(\xi_0, \eta) > 0$ для $0 \leq \eta \leq 1$, то спектр всех оптимальных максимизирующих стратегий является конечным множеством.*

Доказательство. Если бы теорема была неверна, то из предыдущей теоремы следовало бы, что для любой оптимальной стратегии $y(\eta)$

$$\int_0^1 \frac{1}{Q(\xi, \eta)} dy(\eta) = v.$$

Затем, дифференцируя, мы получили бы

$$\int_0^1 \frac{Q_{\xi}(\xi, \eta)}{[Q(\xi, \eta)]^2} d\eta = 0.$$

Но это тождество невозможно для $\xi = \xi_0$, так как подинтегральная функция положительна. Следовательно, теорема справедлива.

► Теорема 15.1.3. Пусть $K(\xi, \eta)$ — аналитическое ядро, которое на единичном квадрате строго положительно. Рассмотрим комплексную переменную ξ и предположим, что на комплексной плоскости существует кривая C , которая связывает 0 с ∞ таким образом, что, когда ξ изменяется вдоль C и $0 \leq \eta \leq 1$, ядро $K(\xi, \eta)$ остается аналитическим и равномерно ограниченным и существует последовательность $\xi_n \in C$, для которой

$$\lim_{\xi_n \rightarrow \infty} |K(\xi_n, \eta)| = 0.$$

Тогда оптимальная стратегия игрока I сосредоточена в конечном множестве точек.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Тогда теорема 15.1.1 утверждает, что для любой оптимальной стратегии $y(\eta)$

$$\int K(\xi, \eta) dy(\eta) = v > 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

Так как левая часть является аналитической функцией для $\xi \in C$, последнее неравенство выполняется для всех $\xi \in C$. Тогда

$$\begin{aligned} v &= \lim_{\xi_n \rightarrow \infty} \int K(\xi_n, \eta) dy(\eta) = \\ &= \int \lim_{\xi_n \rightarrow \infty} K(\xi_n, \eta) dy(\eta) = 0. \end{aligned}$$

Но это невозможно, так как из соотношения

$$\min_{0 \leq \xi, \eta \leq 1} K(\xi, \eta) > 0$$

следует, что $v > 0$.

Пример 1. Пусть

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{1 + \lambda(\xi - \eta)^2},$$

где $\lambda > 0$.

В качестве кривой C мы можем взять вещественную положительную ось ξ . Тогда из теоремы 15.1.3 следует, что оптимальные стратегии игрока I сосредоточены в конечном множестве точек.

В противовес результатам, полученным выше, можно построить игры с простыми ядрами и сложными решениями. Одна из таких игр описана в примере 2. Этот пример иллюстрирует некоторые затруднения, которые возникают в теории непрерывных игр. Он также иллюстрирует некоторые из методов, применяемых при анализе этих игр.

Здесь ядро является рациональной функцией, но единственная оптимальная максимизирующая стратегия есть классическая канторовская функция $C(\xi)$. Эта функция имеет некоторые необычные свойства: она непрерывна всюду и дифференцируема всюду, за исключением несчетного множества точек меры нуль по Лебегу. Кроме того, ее производная равна нулю, всюду где только она определена, однако $C(\xi)$ является функцией распределения. График $C(\xi)$ может быть построен следующим образом: положим $C(0)=0$ и $C(1)=1$. Затем разделим интервал $[0, 1]$ на три равных подинтервала, и в среднем из них, $\left(\frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{2}{3}\right)$, положим $C(\xi) = [C(1) + C(0)]/2$.

Процесс итерируется следующим образом: делим каждый максимальный интервал $[a, b]$, в котором $C(\xi)$ еще не была определена, на три равных подинтервала, и в среднем подинтервале полагаем $C(\xi) = [C(a) + C(b)]/2$. Например, $C(\xi) = \frac{1}{4}$ для $\frac{1}{9} \leq \xi \leq \frac{2}{9}$ и $C(\xi) = \frac{3}{4}$ для $\frac{7}{9} \leq \xi \leq \frac{8}{9}$ и т. д. Формальное определение $C(\xi)$ дано ниже.

Пример 2. В этом примере мы рассматриваем игру с канторовским распределением в качестве единственной оптимальной стратегии. Канторовское распределение как функция распределения может быть охарактеризовано функциональными уравнениями $C\left(\frac{\xi}{3}\right) = \frac{1}{2} C(\xi)$, $C(1 - \xi) = 1 - C(\xi)$ и граничными условиями $C(0) = 0$, $C(1) = 1$. Покажем, что $C(\xi)$ является единственной оптимальной максимизирующей стратегией в игре с рациональным ядром:

$$K(\xi, \eta) = \left(\eta - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right) \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} - \frac{1}{1 + \left(\xi/3 - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} \right).$$

Действительно, $K(\xi, \eta)$ является аналитической функцией ξ и η в окрестности начала координат,

Это ядро кососимметрично относительно $\eta = \frac{1}{2}$. Следовательно, ввиду симметрии любая стратегия y , такая, что $y(1 - \eta) = 1 - y(\eta)$, является устойчивой и

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dy(\eta) \equiv 0. \quad (15.1.1)$$

Чтобы проверить оптимальность $C(\xi)$, достаточно показать, что

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dC(\xi) = 0. \quad (15.1.2)$$

Тот член $K(\xi, \eta)$, который содержит

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)\left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2,$$

сам является кососимметрическим относительно $\xi = \frac{1}{2}$ и не оказывает влияния на интеграл (15.1.2). Следовательно, достаточно показать, что

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} - \frac{1}{1 + \left(\xi/3 - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} \right) dC(\xi) \equiv 0.$$

Справедливость этого уравнения может быть легко установлена путем использования подстановки $\xi' = \xi/3$ и свойств функции $C(\xi)$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dC(\xi)}{1 + \left(\xi/3 - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} &= \int_0^{1/3} \frac{dC(3\xi)}{1 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} = \\ &= 2 \int_0^{1/3} \frac{dC(\xi)}{1 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} = \int_0^{1/3} \frac{dC(\xi)}{1 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} + \\ &\quad + \int_{1/3}^1 \frac{dC(\xi)}{1 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4} = \int_0^1 \frac{dC(\xi)}{1 + \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^4}. \end{aligned}$$

На последнем шаге было использовано постоянство $C(\xi)$ в интервале $\frac{1}{3} \leq \xi \leq \frac{2}{3}$.

Рассмотрим теперь вопрос о единственности. Уравнение (15.1.1) показывает, что стратегия y оптимальна, если $1 - y(\eta) = y(1 - \eta)$

для $0 \leq \eta \leq 1$. Следовательно, любая оптимальная стратегия x должна обладать тем свойством, что

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) \equiv 0 \quad (0 \leq \eta \leq 1).$$

В последнем уравнении ядро $K(\xi, \eta)$ можно представить равномерно сходящимся рядом степеней $(\xi - \frac{1}{2})$, $(\xi/3 - \frac{1}{2})$ и $(\eta - \frac{1}{2})$. В этом представлении из оптимальности стратегии x следует

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^{2n} \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^{4n+1} + \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^{2n+1} \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^{4n+3} \right\} dx(\xi) - \\ - \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\xi/3 - \frac{1}{2} \right)^{2n} \left(\eta - \frac{1}{2} \right)^{4n+1} dx(\xi) \equiv 0. \end{aligned}$$

Левая часть этого уравнения является степенным рядом по $(\eta - \frac{1}{2})$, и этот ряд тождественно равен нулю в интервале $0 \leq \eta \leq 1$. Следовательно, коэффициент при каждой степени $\eta - \frac{1}{2}$ должен быть равен нулю; и так как $4n + 1 \neq 4m + 3$ для любых целых n и m , то

$$\int_0^1 \left(\left(\xi - \frac{1}{2} \right)^{2n} - \left(\xi/3 - \frac{1}{2} \right)^{2n} \right) dx(\xi) = 0 \quad (15.1.3)$$

и

$$\int_0^1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^{2n+1} dx(\xi) = 0. \quad (15.1.4)$$

Обозначая моменты x через $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ и напоминая, что для любого распределения $\mu_0 = 1$, мы можем из (15.1.3) и (15.1.4) последовательно выражать $\mu_1, \mu_2, \dots$ через вычисленные ранее моменты. Этот процесс может быть выполнен для каждого уравнения, так как коэффициент при высшей степени ξ отличен от нуля. Так как все моменты вычисляются путем решения алгебраических уравнений, которые не зависят от x , все оптимальные максимизирующие стратегии имеют одинаковые моменты; так как, наконец, моменты полностью определяют стратегию, существует только одна оптимальная стратегия. Эта стратегия равна, разумеется, $C(\xi)$.

Пример 2 показывает, что существуют игры, ядра которых являются аналитическими функциями, но в которых ни один из игроков не имеет простых решений. Можно построить рациональную игру на единичном квадрате, в которой канторовское распределение является единственной оптимальной стратегией каждого из игро-

ков (см. задачу 11). Еще более патологические примеры можно получить путем ослабления ограничений, налагаемых на ядро. Гликсберг и Гросс построили игру с рациональной функцией выигрыша и с единственными оптимальными стратегиями, которые сосредоточены в счетных плотных множествах (см. примечания в конце главы).

Пример 3. В этом примере мы рассматриваем игру, единственными оптимальными стратегиями которой являются два заданных распределения, ни одно из которых не является функцией, состоящей из конечного числа скачков, а в остальном полностью произвольных.

Пусть x и y — данные распределения, а μ_n и ν_n обозначают n -е моменты x и y . Определим

$$K(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\xi^n - \mu_n)(\eta^n - \nu_n) \quad (0 \leq \xi, \eta \leq 1).$$

Каждый член этого ряда по абсолютной величине меньше, чем соответствующий член ряда $1/2^n$. Следовательно, наш ряд абсолютно и равномерно сходится, и

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(\xi, \eta) dx(\xi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\eta^n - \nu_n) \int_0^1 (\xi^n - \mu_n) dx(\xi) \equiv 0, \\ \int_0^1 K(\xi, \eta) dy(\eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\xi^n - \mu_n) \int_0^1 (\eta^n - \nu_n) dy(\eta) \equiv 0. \end{aligned}$$

В частности, стратегии x и y оптимальны, и значение игры равно нулю. Кроме того, так как x и y не являются кусочно постоянными функциями, а ядро K аналитично, то к этой игре может быть применена теорема 15.1.1. Таким образом, если x^* — любая оптимальная максимизирующая стратегия, то

$$0 \equiv \int K(\xi, \eta) dx^*(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\mu_n^* - \mu_n)(\eta^n - \nu_n),$$

где μ_n^* — n -й момент x^* . Так как ряд тождественно равен нулю, коэффициент при каждой степени η должен равняться нулю. Таким образом, $\mu_n^* = \mu_n$ и $x^* = x$. Аналогично получаем, что и оптимальная стратегия для минимизирующего игрока единственна.

15.2. Колоколообразные ядра. Колоколообразные ядра имеют и обобщают свойства хорошо известной нормальной плотности вероятности $e^{-\xi^2}$, характерное очертание которой напоминает вертикальное сечение колокола и повсеместная встречаемость которой более чем

оправдывает изучение таких ядер. Эта функция является подходящим ядром для игр преследования, в которых преследователь не знает точного местонахождения преследуемого. Например, бомбардировщик, знающий курс, прокладываемый вражеской подводной лодкой, может не знать ее точного расположения, и если бомбардировщик прицеливается в точку ξ , в то время как подводная лодка находится в другой точке η , то ожидаемое повреждение лодки может быть пропорционально $e^{-(\xi-\eta)^2}$ (см. п. 10.4). Решение этой игры может быть получено в явном виде, и, кроме того, из ее анализа можно также извлечь некоторые существенные свойства ядра и тем самым построить общую теорию, применимую к более широкому классу игр. Это обобщение приводит к понятию колоколообразного ядра.

Ядро K называется *колоколообразным*, если $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, а функция φ имеет следующие свойства:

- (1) функция $\varphi(u)$ определена и непрерывна для всех u ;
- (2) для любого n и любого множества значений ξ_i и η_j , таких, что

$$\xi_1 < \dots < \xi_n \quad \text{и} \quad \eta_1 < \dots < \eta_n,$$

определитель матрицы $\|\varphi(\xi_i - \eta_j)\|$ неотрицателен;

- (3) для любого набора чисел $\{\xi_i\}$, где $\xi_1 < \dots < \xi_n$, существует такой набор чисел $\{\eta_j\}$ с $\eta_1 < \dots < \eta_n$, что определитель $\|\varphi(\xi_i - \eta_j)\|$ строго положителен; справедливо и симметричное утверждение, когда задается набор $\{\eta_j\}$.

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du < \infty.$$

Любая функция, удовлетворяющая свойствам (1), (2), (4), называется *частотной функцией Пойа* (Ч. Ф. П.), любая функция, удовлетворяющая всем четырем перечисленным свойствам, называется *регулярной* Ч. Ф. П. Если условия (2) и (3) могут быть заменены более сильным условием $\|\varphi(\xi_i - \eta_j)\| > 0$, то функция называется *правильной частотной функцией Пойа* (П. Ч. Ф. П.). Такие функции, как e^{-u^2} и $e^u - e^{-u}$, являются П. Ч. Ф. П. (см. задачу 5), $e^{-|u|}$ является регулярной Ч. Ф. П. Может быть показано (см. комментарии), что если φ_1 — регулярная Ч. Ф. П. и φ_2 — П. Ч. Ф. П., то свертка

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(u) \varphi_2(x - u) du$$

является П. Ч. Ф. П. В частности, если

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2\sigma}},$$

то, полагая $\sigma \rightarrow 0$, мы видим, что любая регулярная Ч. Ф. П. может быть аппроксимирована посредством П. Ч. Ф. П.

Вариация знака функции f , обозначаемая через $V(f)$, определяется как супремум числа перемен знака последовательности $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$, где ξ_i выбираются произвольно, но расположены в возрастающем порядке, а число n также может быть произвольным. Основная теорема, касающаяся Ч. Ф. П. и установленная Шёнбергом, состоит в следующем: для того чтобы преобразование

$$g(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u-t) f(t) dt$$

не увеличивало вариации знака [т. е. $V(g) \leq V(f)$] при всех ограниченных f с конечным числом разрывов первого рода, необходимо и достаточно, чтобы функция φ являлась Ч. Ф. П. Свойства регулярной Ч. Ф. П., которые интересны для теории игр, устанавливаются следующей последовательностью лемм.

► Лемма 15.2.1. Если φ является регулярной Ч. Ф. П., то для любых вещественных чисел a_j и η_j функция

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi(\xi - \eta_j)$$

имеет не более чем $n-1$ перемен знака.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существуют числа

$$\xi_1, \dots, \xi_{n+1}, \quad \text{для которых при всех } t \quad \xi_t < \xi_{t+1}$$

и

$$f(\xi_t) f(\xi_{t+1}) < 0 \quad (t = 1, \dots, n).$$

Тогда, по определению f ,

$$\begin{vmatrix} f(\xi_1) & f(\xi_2) & \dots & f(\xi_{n+1}) \\ \varphi(\xi_1 - \eta_1) & \varphi(\xi_2 - \eta_1) & \dots & \varphi(\xi_{n+1} - \eta_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi(\xi_1 - \eta_n) & \varphi(\xi_2 - \eta_n) & \dots & \varphi(\xi_{n+1} - \eta_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (15.2.1)$$

Разлагая этот определитель по элементам первой строки, мы получим

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} f(\xi_i) U \left(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{n+1} \right) = 0, \quad (15.2.2)$$

где U означает соответствующий минор в определителе¹⁾. Если φ является П. Ч. Ф. П., то уравнение (15.2.2) сразу приводит к противоречию. В самом деле, поскольку предположение о том, что $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n$, не умаляет общности, все U строго положительны, а все произведения $(-1)^i f(\xi_i)$ имеют один и тот же знак. Таким образом, левая часть (15.2.2) не может быть равна нулю. Если φ не является П. Ч. Ф. П., то достаточно аппроксимировать φ с помощью П. Ч. Ф. П. φ^* . Соответствующая ей функция f^* имела бы столько же перемен знаков, сколько и f .

Замечание 15.2.1. Более тщательный анализ показывает, что, когда φ является П. Ч. Ф. П., число нулей $f(\xi)$ (считая нули четных кратностей дважды) ограничено числом перемен знаков последовательности $\{a_j\}$ при условии, что соответствующие η_j расположены в порядке возрастания $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n$ и что не все a_j равны нулю. Если, кроме того, φ непрерывно дифференцируема бесконечное число раз, то число нулей $f(\xi)$, считая кратные, как обычно, ограничено числом перемен знака последовательности $\{a_j\}$.

► **Лемма 15.2.2.** *Любая вещественная аналитическая положительная функция, являющаяся регулярной Ч. Ф. П., должна быть П. Ч. Ф. П.*

Доказательство. По предположению, $\varphi(\xi - \eta) > 0$, и можно действовать индукцией по порядку определителей. Предположим, что все $n \times n$ -определители строго положительны и что $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$ и $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{n+1}$. Пусть ξ переменная; рассмотрим

$$f(\xi) = \begin{vmatrix} \varphi(\xi_1 - \eta_1) & \dots & \varphi(\xi_1 - \eta_{n+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(\xi_n - \eta_1) & \dots & \varphi(\xi_n - \eta_{n+1}) \\ \varphi(\xi - \eta_1) & \dots & \varphi(\xi - \eta_{n+1}) \end{vmatrix}. \quad (15.2.3)$$

Разлагая этот определитель по элементам последней строки, мы получаем

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \varphi(\xi - \eta_k),$$

где по индуктивному предположению все коэффициенты a_k отличны от нуля, а знаки их чередуются. Если $\hat{f}$ и $\hat{\varphi}$ обозначают преобразо-

¹⁾ По поводу дальнейших деталей, касающихся обозначений, обычно принятых для миноров определителей, см. стр. 769.

вания Фурье функций f и φ , то

$$\hat{f}(s) = \hat{\varphi}(s) \sum_{k=1}^{n+1} a_k e^{ts\eta_k}.$$

Ясно, что $\hat{f}(s)$ не может тождественно равняться нулю, так как и $\hat{\varphi}(s)$, и экспоненциальный полином обращаются в нуль разве лишь в изолированных точках. Следовательно, $f(\xi)$ не равна нулю тождественно. Ввиду того что функция $f(\xi)$ аналитическая, она имеет только изолированные нули и среди них точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Покажем теперь, что функция $f(\xi)$ изменяет знак в точках $\xi_1, \dots, \xi_n$. Для $\xi > \xi_n$ свойство (2) Ч. Ф. П. показывает, что $f(\xi) \geq 0$. Для $\xi_{n-1} < \xi < \xi_n$, меняя местами две последние строки определения (15.2.3), мы видим, что $f(\xi) \leq 0$. То же рассуждение можно применить и к остальным интервалам. Таким образом, функция $f(\xi)$ меняет знак в интервалах $(-\infty, \xi_1)$, (ξ_1, ξ_2) , $\dots$, (ξ_n, ∞) , и, следовательно, она имеет максимальное число перемен знаков, допустимое по лемме 15.2.1.

Наконец, если функция $f(\xi)$ равна нулю в некоторой точке ξ , отличной от $\xi_1, \dots, \xi_n$, то это значение ξ должно быть корнем четной кратности. Предположим для определенности, что $\xi_k < \xi < \xi_{k+1}$ и что в этом интервале $f(\xi) \geq 0$. Тогда функция $g(\xi) = f(\xi) - \varepsilon \varphi(\xi - \eta_i)$ (i произвольно) удовлетворяет условиям леммы 15.2.1. Для достаточно малого ε $g(\xi)$ имеет по крайней мере все перемены знака функции $f(\xi)$ и еще две перемены знака вблизи точки ξ . Это противоречит лемме 15.2.1 и показывает, что $f(\xi)$ может равняться нулю только в $\xi_1, \dots, \xi_n$.

► Лемма 15.2.3. Если φ — регулярная Ч. Ф. П., а производная φ' непрерывна, то функция

$$g(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi'(\xi - \eta_i)$$

имеет не более чем $2n - 1$ перемен знака.

Доказательство. Так как φ' непрерывна, функции

$$g_h(\xi) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n a_i \{\varphi(\xi + h - \eta_i) - \varphi(\xi - \eta_i)\}$$

сходятся равномерно к $g(\xi)$ на любом конечном интервале. Предположим, что g изменяет знак по крайней мере $2n$ раз. Таким образом, для достаточно малого h g_h меняет знак по крайней мере

$2n$ раз. Но это невозможно. В самом деле g_h , очевидно, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{2n} b_j \varphi(\xi - z_j),$$

где $b_j = \pm a_i/h$ и z_j равны либо η_i , либо $\eta_i - h$; поэтому из леммы 15.2.1 следует, что g_h может иметь не более чем $2n - 1$ перемен знака.

15.3. Колоколообразные игры. Игра с ядром K , определенным на единичном квадрате, называется *колоколообразной*, если $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, где φ — положительная аналитическая регулярная Ч. Ф. П. Хотя график $\varphi(t)$ является в самом деле колоколообразным, может оказаться, что сформулированное определение в некоторых случаях является слишком узким: например, оно не охватывает функции, подобные $\psi(t) = 1/(1 + t^2)$, график $\psi(t)$ также является колоколообразным, а соответствующее ей ядро обладает большинством описываемых далее свойств. Тем не менее некоторые из следующих далее доказательств существенно опираются на свойства уменьшения вариации знака Ч. Ф. П., и в настоящее время не существует доказательств, применимых к более общим классам колоколообразных функций. Результаты, которые были получены до настоящего времени, касаются природы спектров оптимальных стратегий колоколообразных игр.

► **Лемма 15.3.1.** *Значение v колоколообразной игры строго положительно, а спектр оптимальных стратегий каждого игрока представляет собой конечное множество точек.*

Доказательство. Значение игры ограничено снизу минимальным значением ядра $K(\xi, \eta)$ на единичном квадрате. Так как функция φ непрерывна, она достигает своего минимума δ , а ввиду того, что эта функция строго положительна, $\delta > 0$. Таким образом, $v \geq \delta > 0$.

Если спектр оптимальных стратегий одного из игроков (скажем, игрока I) имеет бесконечное множество точек, то для любой оптимальной стратегии y

$$\int_0^1 \varphi(\xi - \eta) dy(\eta) = v$$

для бесконечного числа значений ξ на интервале $[0, 1]$. Так как интеграл есть аналитическая функция ξ , то

$$\int_0^1 \varphi(\xi - \eta) dy(\eta) \equiv v$$

для всех ξ . Но любая Ч. Ф. П., согласно свойству (4), при $\xi \rightarrow \infty$ убывает, как экспонента. Поэтому при $\xi \rightarrow \infty$

$$\int_0^1 \varphi(\xi - \eta) d\eta \rightarrow 0,$$

а это противоречит тому, что $v > 0$.

Следует заметить, что эта лемма уже не имеет места, если отбросить предположение об аналитичности; например, ядро $e^{-|\xi - \eta|}$ удовлетворяет всем остальным условиям леммы, но в соответствующей игре нет ни одной оптимальной стратегии с конечным спектром. Эта игра будет рассмотрена в п. 15.4.

► Лемма 15.3.2. *Если существует оптимальная минимизирующая стратегия со спектром, содержащим ровно n точек, то спектр любой оптимальной максимизирующей стратегии состоит из n или $n - 1$ фиксированных точек.*

Доказательство. Пусть y_{η_j} означает, как обычно, стратегию, сосредоточенную только в точке η_j . Тогда любая минимизирующая стратегия с n точками в спектре может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^n a_j y_{\eta_j},$$

и соответствующий выигрыш игрока I равен

$$h(\xi) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi(\xi - \eta_j).$$

Если стратегия оптимальна, то $h(\xi) \leq v$ и $h(\xi) = v$ только в изолированных точках, среди которых находятся точки спектра оптимальных максимизирующих стратегий.

Очевидно, если точка ξ_i принадлежит спектру оптимальной максимизирующей стратегии и лежит внутри единичного интервала, то в точке ξ_i достигается максимум функции $h(\xi)$, так что $h'(\xi)$ должна менять знак в точке ξ_i . Кроме того, между любыми двумя такими точками должен иметься минимум функции $h(\xi)$, и поэтому производная $h'(\xi)$ будет менять также знак между каждыми двумя последовательными максимумами. Следовательно, если спектр оптимальных максимизирующих стратегий содержит внутри единичного интервала $n + 1$ точку, то производная $h'(\xi)$ должна изменить знак по крайней мере $2n + 1$ раз, что противоречит лемме 15.2.3. Такое же противоречие получается, если спектр содержит $n + 1$ точку, включая 0,

или 1, или обе эти точки вместе. В этом случае концевая точка не обязательно максимальная, но так как

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} h(\xi) = 0,$$

максимум должен находиться между $-\infty$ и 0 или между 1 и ∞ .

Аналогичное рассуждение может быть использовано для доказательства того, что спектр любой оптимальной максимизирующей стратегии должен содержать не меньше чем $n-1$ точек. В самом деле, если стратегия

$$\sum_{i=1}^m b_i x_{\xi_i}$$

оптимальная, то соответствующий выигрыш игрока I равен

$$r(\eta) = \sum_{i=1}^m b_i \varphi(\xi_i - \eta).$$

Как и раньше, $r(\eta) \geq v$, $r(\eta) \neq v$ и $r(\eta_j) = v$ ($j = 1, \dots, n$). Здесь также между любыми двумя последовательными точками η_j существует хотя бы один максимум функции $r(\eta)$, и поэтому производная $r'(\eta)$ изменяет знак в этом интервале. Кроме того, каждая точка η_j внутри $[0, 1]$ является точкой минимума функции $r(\eta)$, и поэтому производная $r'(\eta)$ снова меняет знак. Следовательно, общее число перемен знака равно по крайней мере $(n-2) + (n-1) = 2n-3$. Так как максимальное число перемен знака, допускаемое леммой 15.2.3, равно $2m-1$, мы можем сделать вывод, что $m \geq n-1$.

Следующая лемма применима только к тем колоколообразным играм, которые нормированы так, что $\varphi'(0) = 0$. На первый взгляд кажется, что эта нормировка нелогична. Так как функция φ положительна и обращается в нуль на $\pm\infty$, производная φ' должна иметь хотя бы один нуль. Если предположить, что φ' обращается в нуль в точках ξ_1 и ξ_2 , то

$$\varphi(\xi) - \frac{\varphi(\xi_1)}{\varphi(\xi_2)} \varphi(\xi - \xi_1 + \xi_2)$$

будет иметь в ξ_1 двойной корень. Но это невозможно в силу замечания 15.2.1; следовательно, φ' имеет только один нуль. Нормировка $\varphi'(0) = 0$ требует сдвига оси, а такой сдвиг изменяет пространство стратегий. К счастью, многие игры в их естественной постановке уже оказываются нормированными.

► Лемма 15.3.3. Если $\varphi'(0) = 0$, то точки 0 и 1 принадлежат спектру любой оптимальной минимизирующей стратегии, но не принадлежат спектру никакой оптимальной максимизирующей стратегии.

Доказательство. Пусть стратегии

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^m b_i x_{\xi_i} \quad \text{и} \quad y(\eta) = \sum_{j=1}^n a_j y_{\eta_j}$$

оптимальны; здесь $a_i, b_j > 0$, а ξ_i и η_j расположены в порядке возрастания. Для того чтобы показать, что $\eta_1 = 0$, докажем, что любая другая возможность ведет к противоречию.

Случай 1. $0 \leq \xi_1 < \eta_1$. Пусть

$$h(\xi) = \sum_{j=1}^n a_j \varphi(\xi - \eta_j).$$

Так как стратегии x и y оптимальны, то $h(\xi) \leq v$ для любого ξ в единичном интервале и $h(\xi_1) = v$. Из этих условий и равенства $h(-\infty) = 0$ следует, что существует некоторое $\bar{\xi} \leq \xi_1$, для которого $h'(\bar{\xi}) = 0$. Однако такое $\bar{\xi}$ не может существовать в силу того, что нормировка φ потребовала бы неравенства $\varphi'(\bar{\xi} - \eta_j) > 0$ для каждого j , а это противоречит тому, что $h'(\bar{\xi}) = 0$.

Случай 2. $0 < \eta_1 \leq \xi_1$. Пусть

$$r(\eta) = \sum_{i=1}^m b_i \varphi(\xi_i - \eta).$$

Тогда $r(\eta) \geq v$ для всех η в единичном интервале и $r(\eta_1) = v$. Эти условия и тот факт, что $r(\eta) \rightarrow 0$, когда $\eta \rightarrow -\infty$, требуют, чтобы существовало $\bar{\eta} < \eta_1$, для которого $r'(\bar{\eta}) = 0$. Однако неравенства $\xi_i - \bar{\eta} > 0$ и $\varphi'(\xi_i - \bar{\eta}) < 0$ для каждого i противоречат равенству $r'(\bar{\eta}) = 0$; следовательно, такое $\bar{\eta}$ не может существовать.

Отсюда мы можем заключить, что $\eta_1 = 0$, поскольку все другие возможности привели к абсурду. Аналогично доказывается, что $\eta_n = 1$.

Результаты, полученные выше, могут быть несколько улучшены: с помощью аналогичных рассуждений мы можем показать, что

$$0 = \eta_1 < \xi_1 < \eta_2 \quad \text{и} \quad \eta_{n-1} < \xi_n < \eta_n = 1.$$

► Лемма 15.3.4. Если $\varphi'(0) = 0$, то оптимальные стратегии колоколообразной игры единственны.

Доказательство. В соответствии с леммой 15.3.2 следует рассмотреть два случая, в зависимости от того, являются ли числа точек в спектрах всех оптимальных стратегий x и y равными или отличаются на единицу. Предположим сначала, что спектр некоторой оптимальной стратегии x состоит из точек $\xi_1, \dots, \xi_n$, где все ξ_i

существенны, и что любая оптимальная стратегия y состоит из точек $\eta_1, \dots, \eta_n$.

Пусть выражения

$$x = \sum_{i=1}^n a_i x_{\xi_i} \quad \text{и} \quad x^* = \sum_{i=1}^n a_i^* x_{\xi_i}$$

означают две оптимальные стратегии игрока I. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi(\xi_i - \eta_j) = v \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n a_i^* \varphi(\xi_i - \eta_j) = v \quad (j = 1, \dots, n).$$

Вычитая, мы получаем

$$\sum_{i=1}^n (a_i - a_i^*) \varphi(\xi_i - \eta_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, n).$$

Отсюда в силу соотношения $\|\varphi(\xi_i - \eta_j)\| > 0$ немедленно следует, что $a_i^* - a_i = 0$; значит, максимизирующая стратегия единственна. При тех же предположениях мы можем доказать единственность оптимальной стратегии y .

Для того чтобы завершить доказательство, мы должны рассмотреть другой возможный случай, когда спектр всех оптимальных стратегий x сводится к точкам $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, а оптимальные стратегии y охватывают точки $\eta_1, \dots, \eta_n$. Единственность оптимальной стратегии x доказывается здесь, как и выше. Предположим, что стратегии

$$y = \sum_{j=1}^n b_j y_{\eta_j} \quad \text{и} \quad y^* = \sum_{j=1}^n b_j^* y_{\eta_j}$$

оптимальны. В этом случае, как и выше, предполагается, что функции

$$h(\xi) = \sum_{j=1}^n b_j \varphi(\xi - \eta_j) \quad \text{и} \quad h^*(\xi) = \sum_{j=1}^n b_j^* \varphi(\xi - \eta_j)$$

имеют в точках $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ значение v , а их производные равны в этих точках нулю (поскольку ни одна из ξ_i не может совпасть с концевыми точками 0 или 1; см. замечание, следующее за леммой 15.3.3). Мы находим, что функция

$$\psi^*(\xi) = \sum_{j=1}^n (b_j - b_j^*) \varphi(\xi - \eta_j)$$

принимает в точках $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ значение 0, а ее производная также равна нулю в этих точках. Таким образом, ψ^* имеет по крайней мере $2(n-1)$ нулей, учитывая их кратность. Однако если $\psi^*(\xi) \neq 0$, то число нулей (считая кратные), которые может иметь функция ψ^* ,

не превосходит $n - 1$ (см. замечание 15.2.1). Поэтому $\psi^*(\xi) \equiv 0$ и оптимальная стратегия единственна. (Читателю следует обратиться здесь к задаче 10, касающейся вопроса единственности, когда условие нормировки опущено.)

В этом месте представляется целесообразным подытожить наши предыдущие леммы в виде теоремы.

► Теорема 15.3.1. Если $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$ — колоколообразная игра и $\varphi'(0) = 0$, то оптимальные стратегии каждого из игроков единственны и являются кусочно постоянными распределениями с конечным числом скачков, удовлетворяющими следующим условиям:

1) если минимизирующая оптимальная стратегия состоит из n скачков, то максимизирующая оптимальная стратегия составлена либо из n , либо из $n - 1$ скачков;

2) точки 0 и 1 принадлежат спектру оптимальной стратегии y ;

3) первая точка ξ_1 в оптимальной стратегии x разделяет 0 и ближайшую к 0 оптимальную точку η . Последнее значение оптимальной стратегии x ведет себя аналогично относительно точки 1.

► Теорема 15.3.2. Если $\varphi(u) = \varphi(-u)$, то каждая оптимальная стратегия симметрична относительно точки $\frac{1}{2}$. Именно, если точка $\xi(\eta)$ принадлежит спектру оптимальной стратегии, то точка $1 - \xi(1 - \eta)$ также принадлежит ему и скачки, соответствующие этим точкам, равны.

Доказательство. В применении к игроку I теорема утверждает, что если

$$\sum_{i=1}^n a_i x_{\xi_i}$$

— оптимальная стратегия, то

$$\sum_{i=1}^n a_i x_{1-\xi_i}$$

представляет ту же самую стратегию. Ввиду единственности решения эта теорема может быть доказана, если показать, что стратегия

$$\sum_{i=1}^n a_i x_{1-\xi_i}$$

оптимальна. Свойство же оптимальности следует из того факта, что выигрыш в условиях этой стратегии равен

$$\sum_{i=1}^n a_i \varphi(1 - \xi_i - \eta) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(-\xi_i + 1 - \eta) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi[\xi_i - (1 - \eta)] \geq v.$$

Аналогичная аргументация устанавливает симметрию минимизирующей стратегии.

Две последние леммы этого пункта относятся к семействам колоколообразных игр, зависящих от параметра. Ядра этих игр будут иметь вид $K_\lambda(\xi, \eta) = \varphi[\lambda(\xi - \eta)]$ ($\lambda > 0$). В леммах рассматривается число $n(\lambda)$ точек, содержащихся в спектре оптимальной минимизирующей стратегии. Функция φ будет снова обозначать положительную аналитическую регулярную Ч. Ф. П. Значение игры обозначается через $v(\lambda)$.

► Лемма 15.3.5. В любой колоколообразной игре с функцией выигрыша $\varphi[\lambda(\xi - \eta)]$ числа $n(\lambda)$ и $v(\lambda)$ связаны неравенством $v(\lambda) n(\lambda) \geq \varphi(0)$.

Доказательство. Для любой стратегии вида

$$\sum_{j=1}^n b_j y_{\eta_j}$$

найдем индекс, скажем, j_0 , такой, что $b_{j_0} > \frac{1}{n}$. Если стратегия является для ядра $\varphi[\lambda(\xi - \eta)]$ оптимальной, то

$$v(\lambda) \geq \sum_{j=1}^n b_j \varphi[\lambda(\xi - \eta_j)] \geq \frac{1}{n} \varphi[\lambda(\xi - \eta_{j_0})] \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

Полагая $\xi = \eta_{j_0}$, мы получаем желаемый результат.

► Лемма 15.3.6. Если $\lambda \rightarrow \infty$, то значение игры стремится к нулю, а число скачков неограниченно возрастает.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует некоторое λ_0 , для которого $\varphi[\lambda(\xi - \eta)] < \varepsilon$, каковы бы ни были ξ, η и λ , удовлетворяющие соотношениям $|\xi - \eta| \geq \varepsilon$ и $\lambda > \lambda_0$. Кроме того, если

$$|\xi - \eta| < \varepsilon, \quad \text{то} \quad \varphi[\lambda(\xi - \eta)] \leq \varphi_0,$$

где $\varphi_0 = \max_t \varphi(t)$. Таким образом, мы получаем, что

$$\int_0^1 \varphi[\lambda(\xi - \eta)] d\eta < \varepsilon(2\varphi_0 + 1) \quad (\lambda > \lambda_0).$$

Последнее уравнение показывает, что при $\lambda > \lambda_0$ игрок II может помешать игроку I получить выигрыш, больший чем $\varepsilon(2\varphi_0 + 1)$. Так как ε произвольно, то $v(\lambda) \rightarrow 0$ и $n(\lambda) \rightarrow \infty$.

Если $\varphi'(0) = 0$, то можно получить и более точные результаты относительно поведения $n(\lambda)$. Для достаточно малого λ функция $\varphi[(\lambda(\xi - \eta))]$ строго вогнута по каждой из переменных при $0 \leq \xi, \eta \leq 1$, а для таких игр известно, что они обладают оптимальными стратегиями вида $x = x_{\xi_1}$, $y = \alpha y_0 + (1 - \alpha) y_1$ (п. 12.2). Для больших значений λ оба игрока имеют оптимальные стратегии, имеющие хотя бы два скачка, и т. д. Возможно и точное вычисление критических точек, в которых величина спектра $n(\lambda)$ изменяется с возрастанием λ (см. задачи 7 и 8).

15.4. Другие типы непрерывных игр. Ядра типа Пойа. Прямое обобщение колоколообразных игр приводит к рассмотрению ядер типа Пойа (Т. П.), которые, по определению, удовлетворяют следующим условиям:

- 1) ядро $K(\xi, \eta)$ определено и непрерывно на квадрате $0 \leq \xi, \eta \leq 1$;
- 2) для любого n и любого множества чисел ξ_i и η_j , таких, что

$$0 \leq \xi_1 < \dots < \xi_n \leq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq \eta_1 < \dots < \eta_n \leq 1,$$

определитель матрицы $\|K(\xi_i, \eta_j)\|$ неотрицателен.

От понятия ядер Т. П. можно перейти к понятиям регулярных и правильных ядер Т. П., определения которых аналогичны определениям регулярных и правильных частотных функций Пойа. Многие из результатов п. 15.2 и 15.3 могут быть перенесены на ядра Т. П., однако необходимо подчеркнуть, что лемма 15.2.3 не может быть обобщена. Таким образом, существуют игры с ядрами Т. П., оптимальные стратегии которых не обладают теми свойствами оптимальных стратегий колоколообразных игр, которые зависят от справедливости этой леммы. Некоторые свойства ядер Т. П. выделены в задачах 24 и 25.

Ядра типа Грина. Ядром типа Грина (Т. Г.) называется просто отрицательное ядро типа бабочки, т. е. функция $K(\xi, \eta)$ является ядром Т. Г. в том и только в том случае, если $-K(\xi, \eta)$ является ядром типа бабочки (см. п. 14.5, в частности теорему 14.5.2, и задачу 24 этой главы). Так как оптимальные стратегии для ядер типа бабочки всегда являются устойчивыми, то стратегии такого же типа всегда оптимальны для ядер Т. Г.

Ядра типа Грина названы так потому, что они на самом деле являются функциями Грина соответствующих дифференциальных уравнений. Существует большой класс игр с ядрами такого типа. Некоторые из этих игр описаны в следующем примере, который иллюстрирует также фундаментальную связь между оптимальными стратегиями игры и коэффициентами дифференциальных уравнений. В этом

примере мы рассмотрим некоторый класс дифференциальных уравнений и покажем, что соответствующие функции Грина порождают игры, которые имеют легко различимые оптимальные стратегии, не выражаемые аналитически через коэффициенты дифференциальных уравнений.

Пример. Пусть $p(t)$ — положительная и непрерывно дифференцируемая функция, а $q(t)$ — положительная и непрерывная функция на некотором интервале $a \leq t \leq b$, который содержит внутри себя единичный интервал. Пусть φ и ψ — два линейно независимых решения дифференциального уравнения

$$(pu')' - qu = 0 \quad (a \leq t \leq b), \quad (15.4.1)$$

которые удовлетворяют однородным граничным условиям [например, $\varphi(a) = \psi(b) = 0$]. Тогда функция Грина

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} \varphi(\xi)\psi(\eta), & 0 \leq \xi \leq \eta \leq 1, \\ \psi(\xi)\varphi(\eta), & 0 \leq \eta \leq \xi < 1 \end{cases} \quad (15.4.2)$$

может быть интерпретирована, как ядро игры, определенной на единичном квадрате. Если для $0 \leq t \leq 1$ имеют место соотношения $\varphi(t) > 0$, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi''(t) > 0$, $\psi(t) > 0$, $\psi'(t) < 0$ и $\psi''(t) > 0$, то легко проверить, что $K(\xi, \eta)$ на самом деле является ядром Т. Г. В связи с этими обстоятельствами из общей теории ядер Т. Г., совершенно аналогичной теории ядер типа бабочки, следует, что спектром оптимальных стратегий является весь единичный интервал; следовательно, по лемме 10.2.1, каждая оптимальная стратегия должна тождественно давать v . Значит, поскольку $K(\eta, \xi) = K(\xi, \eta)$, любая стратегия, оптимальная для одного игрока, оптимальна и для другого, и тот, кто использует ее, выигрывает v . Поскольку мы рассматриваем игры Т. Г., воспользуемся известной нам теорией игр с ядрами типа бабочки и попытаемся определить оптимальные стратегии, составленные из скачков α и β соответственно в $\xi = 0$ и $\xi = 1$ и положительной плотности f , определенной на единичном интервале. Если такая оптимальная стратегия существует, то она должна быть устойчивой; следовательно,

$$v \equiv \alpha \varphi(0) \psi(\eta) + \int_0^{\eta} \varphi(\xi) \psi(\eta) f(\xi) d\xi + \int_{\eta}^1 \psi(\xi) \varphi(\eta) f(\xi) d\xi + \beta \psi(1) \varphi(\eta).$$

(См. в связи с этим также теорему 14.5.2.) Дифференцируя это уравнение дважды и исключая члены, содержащие интегралы, мы получаем

$$\begin{aligned} \alpha &= v \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} \cdot \frac{1}{\varphi'(0)\psi(0) - \varphi(0)\psi'(0)}, \\ \beta &= -v \frac{\psi'(1)}{\psi(1)} \cdot \frac{1}{\varphi'(1)\psi(1) - \varphi(1)\psi'(1)}, \\ f(t) &= v \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)\psi(t) - \psi'(t)\varphi(t)]^2}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что эта стратегия действительно является устойчивой и, следовательно, оптимальной для каждого из игроков.

Хотя из общей теории успешно выведена формула, явно выражающая оптимальную стратегию, но, возможно, имеет смысл получить более простые выражения для f , α и β на основе использования специфического вида уравнения (15.4.1).

Мы можем непосредственно проверить, что если φ и ψ являются решениями дифференциального уравнения, то производная выражения $p[\varphi'\psi - \psi'\varphi]$ равна нулю, так что $\varphi'\psi - \psi'\varphi = kp^{-1}$ для некоторой постоянной k . Кроме того, умножая уравнения $p\varphi'' + p'\varphi' - q\varphi = 0$ и $p\psi'' + p'\psi' - q\psi = 0$ соответственно на ψ' и φ' , мы можем также проверить, что

$$\psi''\varphi' - \varphi''\psi' = p^{-1}[\varphi'\psi - \psi'\varphi]q = kp^{-2}q.$$

Таким образом, с помощью подстановки мы получаем

$$\alpha = \frac{v}{k} \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)} p(0), \quad f(t) = \frac{v}{k} q(t), \quad \beta = \frac{-v}{k} \frac{\psi'(1)}{\psi(1)} p(1).$$

Число v/k может быть вычислено непосредственно из условия нормировки

$$\int_0^1 dx(\xi) = 1.$$

Два конкретных примера ядер Т. Г. можно получить, рассматривая дифференциальные уравнения $u'' - u = 0$ и $u'' - (1 + t^2)u = 0$ на всей вещественной оси $-\infty < t < \infty$. Решение первого уравнения содержит функции e^t и e^{-t} , которые приводят в соответствии с (15.4.2) к ядру $K(\xi, \eta) = e^{-|\xi - \eta|}$. Это ядро уже появлялось раньше как пример неаналитичной регулярной Ч. Ф. П. В настоящем контексте очевидно, что спектром оптимальных стратегий является весь единичный интервал. Этот пример показывает, что предположение об аналитичности в лемме 15.3.1 не может быть отброшено. Решение второго дифференциального уравнения содержит функции

$$\varphi(t) = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^t e^{-u^2/2} du \quad \text{и} \quad \psi(t) = e^{t^2/2} \int_t^{\infty} e^{-u^2/2} du,$$

которые удовлетворяют всем условиям, требуемым настоящей теорией. Поэтому если

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)\right) \int_{-\infty}^{\xi} e^{-t^2} dt \int_{\eta}^{\infty} e^{-t^2} dt, & \xi \leq \eta, \\ \exp\left(\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)\right) \int_{\xi}^{\infty} e^{-t^2} dt \int_{-\infty}^{\eta} e^{-t^2} dt, & \xi \geq \eta, \end{cases}$$

то часть решения, представляющая собой плотность, равна

$$f(\xi) = k(1 + \xi^2).$$

Интересно заметить, что дифференциальное уравнение $(tu')' - n^2u/t = 0$ имеет фундаментальные решения $\varphi(t) = t^n$ и $\psi(t) = t^{-n} - t^n$. Эти решения нарушают требования положительности в 0 и 1, и оптимальные стратегии для соответствующих ядер не могут быть стратегиями требуемого типа, так как функция $q(t)$ не интегрируема. Однако если игра ограничена квадратом со сторонами $[\delta, 1 - \delta]$, то все условия выполнены и стратегии имеют желаемый вид.

15.5. Инвариантные игры. В этом пункте мы рассматриваем приложения понятия инвариантности к классификации игр. Мы предполагаем существование двух групп преобразований, которые переводят пространства стратегий в себя. Эти преобразования, определяемые сначала для чистых стратегий ξ и η , можно распространить и на смешанные стратегии $x(\xi)$ и $y(\eta)$. В самом деле, любое измеримое преобразование τ , которое переводит ξ в $\tau\xi$, автоматически индуцирует преобразование $x \rightarrow \tau x$, где $\tau x(E) = x(\tau E)$ для любого измеримого множества E (для которого $\tau E = \{\xi | \xi = \tau\xi', \xi' \in E\}$). Мы будем предполагать, что индуцированные преобразования переводят вероятностные меры в вероятностные же меры. Легко проверить, что индуцированные преобразования, обладающие этим свойством, образуют группу преобразований пространства смешанных стратегий в себя. Группа преобразований, переводящая X в себя, будет обозначаться через T , а аналогичная группа преобразований, переводящая Y в себя, будет обозначаться через T' . Последующее обсуждение ограничивается играми на единичном квадрате.

Определение 15.5.1. Игра с ядром $K(\xi, \eta)$ называется *инвариантной при T относительно T'* , если для любого $\tau \in T$ существует такое $\tau' \in T'$, что $K(\tau\xi, \eta) = K(\xi, \tau'\eta)$. Аналогично игра инвариантна при T' относительно T , если для любого $\tau' \in T'$ существует такое $\tau \in T$, что $K(\xi, \tau'\eta) = K(\tau\xi, \eta)$.

Это определение иллюстрируется следующими примерами.

Пример 1. Пусть T и T' — группы преобразований единичного интервала в себя; при этом каждая группа содержит ровно два элемента: тождественное преобразование $\xi \rightarrow \xi$ (или $\eta \rightarrow \eta$) и отображение $\xi \rightarrow 1 - \xi$ (или $\eta \rightarrow 1 - \eta$). Тогда любая игра с ядром $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, где φ — некоторая четная функция, инвариантна относительно T и T' . Мы рассматривали этот пример в связи с колоколообразными играми (стр. 604).

Пример 2. Любая игра с ядром $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, где φ является периодической функцией с периодом 1, называется *конво-*

люционной игрой. Эти игры на единичном квадрате инвариантны относительно группы сдвигов $\tau_a \xi = \xi + a$ (приведенных по модулю 1).

Следующие теоремы описывают некоторые инвариантные свойства решений инвариантных игр. В этом контексте $T(E)$ будет означать множество всех распределений вида τx , где $\tau \in T$, $x \in E$, а E — подмножество X . Множество E называется инвариантным относительно T , если $T(E) = E$. Равенство здесь означает, что множества $T(E)$ и E содержат одни и те же распределения. Аналогично говорят, что стратегия x инвариантна при преобразовании τ , если $\tau x = x$. Здесь равенство означает, что τx и x определяют одну и ту же меру. На интервале $[0, 1]$ любая стратегия полностью определяется своими моментами, и, таким образом, для того чтобы проверить, что x и τx определяют одну и ту же стратегию, достаточно проверить, что $\int \xi^n dx = \int \xi^n d\tau x$ для любого n .

► Лемма 15.5.1. Если $K(\xi, \eta)$ инвариантно при T (или при T'), то множество X_0 (или Y_0) оптимальных стратегий также инвариантно при T (или при T').

Доказательство. Пусть x_0 — оптимальная стратегия, а K инвариантно относительно T . Применяя стратегию τx_0 , игрок I получает выигрыш

$$\int K(\xi, \eta) d\tau x_0(\xi) = \int K(\tau^{-1}\xi, \eta) dx_0(\xi) = \int K[\xi, (\tau^{-1})'\eta] dx_0(\xi) \geq v.$$

Таким образом, стратегия τx_0 оптимальна и $T(X_0) \subset X_0$. Ввиду того что T содержит тождественный элемент, мы имеем $T(X_0) \supset X_0$. Следовательно, $T(X_0) = X_0$.

► Теорема 15.5.1. Если T — компактная топологическая группа, а функция K непрерывна и инвариантна при T , то существует оптимальная стратегия x_0 , которая инвариантна относительно любого преобразования $\tau \in T$.

Доказательство. Пусть $\mu(\tau)$ — мера Хаара группы T , нормированная так, что $\mu(T) = 1$. Пусть далее x — произвольная оптимальная стратегия. Для любого измеримого множества E положим

$$x_0(E) = \int_T x(\tau E) d\mu(\tau).$$

Так как x и μ положительны, $x_0(E)$ тоже всегда положительно. Так как x -мера единичного интервала равна 1, то x_0 -мера еди-

ничного интервала также должна быть равна 1, и, следовательно, x_0 — вероятностная мера. Из инвариантности μ следует, что

$$x_0(\tau_0 E) = \int_T x(\tau \tau_0 E) d\mu(\tau) = \int_T x(\tau \tau_0 E) d\mu(\tau \tau_0) = x_0(E).$$

Таким образом, стратегия x_0 инвариантна относительно T . Наконец, чтобы показать, что стратегия x_0 оптимальна, достаточно заметить, что замена переменной $\xi = \tau\xi$ дает нам

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(\xi, \eta) dx_0(\xi) &= \int_0^1 \int_T K(\xi, \eta) d\mu(\tau) dx(\tau\xi) = \\ &= \int_0^1 \int_T K(\tau^{-1}\xi, \eta) d\mu(\tau) dx(\xi) = \\ &= \int_T \int_0^1 K[\xi, (\tau^{-1})' \eta] dx(\xi) d\mu(\tau) \geq \int_T v d\mu(\tau) = v. \end{aligned}$$

Другой подход к изучению инвариантных стратегий может быть основан на предельном переходе. Этот подход, описываемый ниже, требует, чтобы преобразование τ было непрерывным. Точнее, если дана такая последовательность x_n , что для любой непрерывной функции $h(\xi)$ выполняется соотношение

$$\int h(\xi) dx_n(\xi) \rightarrow \int h(\xi) dx_0(\xi),$$

то для преобразования τ имеет место аналогичный предельный переход

$$\int h(\xi) d\tau x_n(\xi) \rightarrow \int h(\xi) d\tau x_0(\xi).$$

Иногда бывает трудно непосредственно проверить это условие. Однако поскольку

$$\int h(\xi) d\tau x(\xi) = \int h(\tau^{-1}\xi) dx(\xi),$$

достаточно проверить, что преобразование $h(\xi) \rightarrow h(\tau^{-1}\xi)$ сохраняет непрерывность h . Следовательно, достаточно, чтобы функция τ^{-1} была непрерывной на $[0,1]$.

► Лемма 15.5.2. Если преобразование τ_0 непрерывно в определенном выше смысле, а функция K непрерывна и инвариантна при T , то существует оптимальная стратегия x_0 , для которой $\tau_0 x_0 = x_0$.

Доказательство. Пусть x — любая оптимальная стратегия. Построим последовательность стратегий $\{x_n\}$, определенную следующим образом:

$$x_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (\tau_0)^k x.$$

Лемма 15.5.1 утверждает, что все стратегии $(\tau_0)^k x$ оптимальны, а из выпуклости множества всех оптимальных стратегий следует, что каждая стратегия x_n также оптимальна. Кроме того, по теореме Хелли (п. В. 3) существует последовательность x_{n_i} , которая сходится к стратегии x_0 в том смысле, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int h(\xi) [dx_{n_i}(\xi) - dx_0(\xi)] = 0$$

для любой непрерывной функции $h(\xi)$. Следовательно, стратегия x_0 оптимальна, так как функция K непрерывна и стратегия x_{n_i} оптимальна. Далее, для того чтобы показать, что x_0 и $\tau_0 x_0$ определяют одно и то же вероятностное распределение, достаточно установить, что для любой непрерывной функции h левая часть следующего выражения может быть сделана произвольно малой. Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int h(\xi) d[x_0(\xi) - \tau_0 x_0(\xi)] \right| &= \left| \int h(\xi) d[x_0(\xi) - x_{n_i}(\xi)] \right| + \\ &+ \left| \int h(\xi) d[x_{n_i}(\xi) - \tau_0 x_{n_i}(\xi)] \right| + \left| \int h(\xi) d\tau_0[x_{n_i}(\xi) - x_0(\xi)] \right|. \end{aligned}$$

Первый и последний члены в правой части неравенства могут быть сделаны произвольно малыми, если только выбрать i достаточно большим. Второй член также стремится к нулю, так как

$$x_{n_i}(\xi) - \tau_0 x_{n_i}(\xi) = \frac{1}{n_i+1} [x(\xi) - \tau_0^{n_i+1} x(\xi)] \rightarrow 0$$

по вариации. Таким образом, $\int h d(x_0 - \tau_0 x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

► **Теорема 15.5.2.** Если группа T абелева, все преобразования τ непрерывны, а функция K непрерывна и инвариантна при T , то существует оптимальная стратегия x_0 , которая инвариантна относительно любого преобразования $\tau \in T$.

Доказательство. Пусть $X(\tau)$ обозначает для каждого $\tau \in T$ множество всех оптимальных стратегий, которые инвариантны относительно преобразования τ . Пересечение любого конечного числа

этих множеств, скажем $X(\tau_1), \dots, X(\tau_n)$, является множеством всех оптимальных стратегий, которые инвариантны относительно $\tau_1, \dots, \tau_n$.

Существование этих стратегий может быть ввиду абелевости группы T установлено конечной итерацией рассуждений, использованных в лемме 15.5.2. Найдем сначала оптимальную стратегию, которая инвариантна по отношению к τ_1 . Тогда, поскольку множество $X(\tau_1)$ непусто, выпукло и замкнуто в смысле слабой сходимости, мы можем повторить рассуждения леммы 15.5.2, заменяя X_0 на $X(\tau_1)$, и, таким образом, получить оптимальную стратегию, которая инвариантна относительно τ_1 и τ_2 . Продолжение этого процесса очевидно.

Следовательно, множества $X(\tau)$ слабо замкнуты и непусты, а их пересечение в любом конечном числе непусто. Так как пространство всех стратегий слабо компактно, пересечение всех множеств $X(\tau)$ должно содержать по крайней мере одну стратегию x_0 , и эта стратегия удовлетворяет всем условиям теоремы.

Теорема 15.5.2 может быть распространена на случай, когда группа T разрешима.

Закончим эту главу описанием всех решений для игр с конволюционными ядрами, которые периодичны на единичном интервале. Так как группа сдвигов по модулю 1 компактна и оставляет игры инвариантными, мы сразу находим, что мера Хаара $d\xi$ (т. е. равномерное распределение) является оптимальной устойчивой стратегией. Следующая теорема дает необходимый и достаточный критерий для определения того случая, когда мера Хаара является единственной оптимальной стратегией.

► Теорема 15.5.3. Пусть $K(\xi, \eta) = \varphi(\xi - \eta)$, где φ — непрерывная и периодическая функция с периодом 1. Тогда $d\xi$ — единственная оптимальная стратегия для каждого из игроков игры K в том и только в том случае, если для любого $n \neq 0$.

$$\int_0^1 \varphi(t) e^{2\pi i n t} dt \neq 0.$$

Доказательство. Если для некоторого $n \neq 0$

$$\int_0^1 \varphi(t) e^{2\pi i n t} dt = 0,$$

то в силу того, что функция φ вещественна,

$$\int_0^1 \varphi(t) \cos 2\pi n t dt = 0 \text{ и } \int_0^1 \varphi(t) \sin 2\pi n t dt = 0.$$

Кроме того, функция $x(\xi) = 1 + \cos 2\pi n\xi$ неотрицательна, и полный интеграл от нее равен 1. Поэтому она является плотностью некоторого вероятностного распределения. Как стратегия она является оптимальной, так как

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(\xi - \eta) (1 + \cos 2\pi n\xi) d\xi &= \int_0^1 \varphi(\xi - \eta) d\xi + \\ &+ \int_0^1 \varphi(\xi - \eta) \cos 2\pi n\xi d\xi = \int_0^1 \varphi(t) dt = v. \end{aligned}$$

Обратно, предположим, что $\int \varphi(t) e^{2\pi i n t} dt \neq 0$ для $n \neq 0$, и покажем, что оптимальная стратегия единственна. Не умаляя общности, мы можем считать, что значение игры v равно нулю, поскольку игра с ядром $\varphi(\xi - \eta) - v$ имеет значение нуль, и то же самое множество оптимальных стратегий, а также удовлетворяет условию

$$\int [\varphi(t) - v] e^{2\pi i n t} dt \neq 0$$

для $n \neq 0$. Так как $d\xi$ имеет своим спектром весь единичный интервал, любая оптимальная минимизирующая стратегия $y(\eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^1 \varphi(\xi - \eta) dy(\eta) = 0.$$

Следовательно, для любого $n \neq 0$ мы имеем

$$\int_0^1 e^{-2\pi i n \xi} \left(\int_0^1 \varphi(\xi - \eta) dy(\eta) \right) d\xi = 0$$

и

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{-2\pi i n (\xi - \eta)} \varphi(\xi - \eta) e^{-2\pi i n \eta} dy(\eta) d\xi = 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 e^{-2\pi i n u} \varphi(u) du \int_0^1 e^{-2\pi i n \eta} dy(\eta) = 0.$$

По предположению,

$$\int_0^1 e^{-2\pi i n u} \varphi(u) du \neq 0,$$

если $n \neq 0$, поэтому

$$\int_0^1 e^{-2\pi i n \eta} d\eta = 0$$

для $n \neq 0$, и мы заключаем, что $dy(\eta) = c d\eta$. Так как $y(\eta)$ — вероятностное распределение, то $c = 1$. Аналогичные рассуждения устанавливают единственность оптимальной максимизирующей стратегии.

15.6. Задачи. В следующих задачах ядра $K(\xi, \eta)$ всегда определены на единичном квадрате $0 \leq \xi, \eta \leq 1$, если только явно не оговорено противное.

1. Игра с ядром

$$K(\xi, \eta) = \frac{2(\xi + \eta)}{(2\xi + 1)(2\eta + 1)}$$

имеет оптимальную устойчивую стратегию $x(t) = y(t)$ для каждого игрока. Показать, что $x(t)$ должны удовлетворять уравнению

$$\int_0^1 \frac{dx(\xi)}{2\xi + 1} = \frac{1}{2},$$

и найти решение этого уравнения.

2. Показать, что стратегии

$$x(\xi) = \frac{\log(1 + \xi)}{\log 2} \quad \text{и} \quad y(\eta) = \frac{\log(1 + \eta)}{\log 2}$$

оптимальны для ядра

$$K(\xi, \eta) = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{(1 + \xi\eta)^2}.$$

Найти значение игры и показать, что игра не может иметь ни одной оптимальной стратегии с конечным спектром.

3. Пусть $P(\xi, \eta)$ и $Q(\xi, \eta)$ — два полинома и $Q(\xi, \eta) > 0$ для $0 \leq \xi, \eta \leq 1$. Пусть

$$K(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)};$$

предположим, что значение игры с этим ядром равно $v \neq 0$. Предположим далее, что если ξ рассматривается как комплексная переменная, то существует кривая C (в комплексной плоскости), которая достигает ∞ таким образом, что $K(\xi, \eta)$ остается аналитической функцией, когда ξ изменяется вдоль C , а η меняется на $[0, 1]$. Предположим, кроме того, что $|K(\xi, \eta)| \leq M < \infty$ для $\xi \in C$ и что для любого η степень ξ в $Q(\xi, \eta)$ больше, чем степень ξ в $P(\xi, \eta)$. Доказать, что игрок I имеет оптимальную стратегию конечного типа.

4. Пусть ядро

$$K(\xi, \eta) = \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)}$$

удовлетворяет условиям, сформулированным в задаче 3, за исключением того, что (1) v произвольно; и (2) для каждого η степень ξ в $P(\xi, \eta)$ превосходит степень ξ в $Q(\xi, \eta)$. Доказать, что любая оптимальная максимизирующая стратегия является стратегией конечного типа.

5. Показать, что все функции

$$\frac{1}{\operatorname{ch} u}, \quad e^u - e^{-u}, \quad \begin{cases} u^n e^{-u}, & u > 0, \\ 0 & u \leq 0 \end{cases} \quad (n — \text{положительное целое})$$

являются Ч. Ф. П.

6. Решить полностью задачу о бомбардировщике и подводной лодке, в которой функция выигрыша равна $e^{-3(\xi-\eta)^2}$. Здесь ξ — точка прицела, η — истинное положение подводной лодки, а $e^{-3(\xi-\eta)^2}$ — ожидаемая вероятность поражения подводной лодки.

7. В игре с ядром

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{1 + \lambda(\xi - \eta)^2}$$

для достаточно малого λ игрок II имеет оптимальную стратегию, содержащую 0 и 1, а игрок I имеет оптимальную чистую стратегию, сосредоточенную в $\xi = \frac{1}{2}$. Определить наибольшее значение λ , для которого это справедливо.

8. Определить наибольшее значение λ , для которого оптимальная стратегия игрока I для игры с ядром $e^{-\lambda(\xi-\eta)^2}$ является чистой. Найти соотношение, полностью определяющее то наибольшее значение λ , для которого спектр оптимальной стратегии игрока II состоит не более чем из двух точек.

9. Показать, что если φ — регулярная Ч. Ф. П., а φ'' непрерывна, то функция

$$h(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi''(\xi - \eta_i)$$

имеет не более чем $2n$ перемен знака при условии, что $a_i > 0$.

10. Показать, что оптимальная стратегия игрока I в колоколообразной игре единственна [т. е. что она единственна даже если $\varphi'(0) \neq 0$] и что оптимальная стратегия игрока II единственна, если ее спектр содержит не менее трех точек. Привести пример колоколообразной игры, в которой оптимальная стратегия игрока II неединственна.

11. (а) Доказать, что если h — непрерывная вещественная функция вещественной переменной, то

$$\int_0^1 \left(2h\left(\xi\right) - h\left(1 - \frac{\xi}{3}\right) - h\left(\frac{\xi}{3}\right) \right) dC(\xi) = 0,$$

где C — классическое канторовское распределение.

(б) Использовать часть (а) для того, чтобы показать, что если

$$K(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(2\xi^n - \left(1 - \frac{\xi}{3}\right)^n - \left(\frac{\xi}{3}\right)^n \right) \left(2\eta^n - \left(1 - \frac{\eta}{3}\right)^n - \left(\frac{\eta}{3}\right)^n \right),$$

то канторовское распределение является единственной оптимальной стратегией для каждого из игроков.

Указание: использовать способ моментов из примера 2 п. 15.1.

12. Пусть $K(\xi, \eta)$ — непрерывное ядро игры с единственными решениями x и y и значением 0, а U и V — счетные плотные множества, такие, что $\int_U dx = \int_V dy = 0$. Положим

$$K^*(\xi, \eta) = \begin{cases} K(\xi, \eta), & \xi \in U, \quad \eta \in V, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Показать, что $K^*(\xi, \eta) = 0$ почти всюду и что x и y — единственные оптимальные стратегии для $K^*(\xi, \eta)$.

13. Рассмотреть игру, в которой пространства чистых стратегий игроков I и II состоят соответственно из пар (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2) , удовлетворяющих условиям $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1$ и $\eta_1^2 + \eta_2^2 \leq 1$. Пусть ядро $K(\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2)$ имеет вид $h[(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2]$. Показать, что тогда оба игрока имеют оптимальные стратегии, которые инвариантны относительно всех вращений около начала координат.

14. Рассматривая игру

$$K(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2\pi n(\xi - \eta),$$

показать, что множество всех игр с непрерывными ядрами и единственными оптимальными стратегиями для каждого игрока не является открытым множеством.

Указание: использовать теорему 15.5.3.

15. Показать, что стратегии

$$x = y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_{2^{-n}}(\xi)$$

оптимальны для игры с ядром

$$K(\xi, \eta) = \frac{2}{2-\xi\eta} - \frac{2}{4-\xi\eta} - \frac{1}{2-\xi} - \frac{1}{2-\eta}.$$

16. Пусть μ_n — моменты произвольного распределения, и пусть $y = I_0$. Показать, что x и y — единственные оптимальные стратегии для игры с ядром

$$K(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\xi^n - \mu_n) \eta^n \sin \frac{1}{\eta} + e^{-\eta^{-2}}.$$

17. Пусть $x^0(\xi)$ и $y^0(\eta)$ — произвольные распределения на единичном интервале. Проверить, что x^0 и y^0 являются оптимальными стратегиями игроков I и II для игры с ядром

$$K(\xi, \eta) = M(\xi, \eta) - \int_0^1 M(\xi, \eta) dx^0(\xi) - \int_0^1 M(\xi, \eta) dy^0(\eta)$$

при любой непрерывной функции $M(\xi, \eta)$.

18. Пусть функция $h(t) > 0$ нормирована так, что

$$\int_0^1 \int_0^1 h(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1.$$

Рассмотреть игру

$$K(\xi, \eta) = \frac{h(\xi, \eta)}{\int_0^1 h(\xi t) dt \int_0^1 h(\eta t) dt}.$$

Доказать, что

$$x'(\xi) = \int_0^1 h(\xi t) dt \quad \text{и} \quad y'(\eta) = \int_0^1 h(\eta t) dt$$

являются соответственно плотностями оптимальных стратегий игроков I и II.

19. Пусть в условиях задачи 18 $h(t)$ — аналитическая в окрестности начала координат функция, т. е.

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

где $|t| \leq \delta$ и $a_{n_i} \neq 0$, причем $\sum \frac{1}{n_i} = \infty$. Показать, что решение, описанное в задаче 18, единственно.

20. Пусть

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \quad (a_n > 0, 0 \leq t \leq 1)$$

и $y^0(\eta)$ — любое распределение. Доказать, что $y^0(\eta)$ — единственная оптимальная стратегия игрока II в игре с ядром

$$K(\xi, \eta) = \varphi(\xi\eta) - \int_0^1 \varphi(\xi\eta) dy^0(\xi) - \int_0^1 \varphi(\xi\eta) dy^0(\eta).$$

21. Показать, что оптимальные стратегии в задаче 2 единственны.

22. (Необходима для задачи 23.) Пусть μ_n и μ_n^* — n -е моменты двух распределений x и x^* , определенных на единичном интервале. Показать, что если $\mu_{2n} \geq \mu_{2n}^*$ и $\mu_{2n+1} \leq \mu_{2n+1}^*$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то $x = x^*$.

23. Рассмотреть игру с ядром

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} (-1)^n (\xi^n - \mu_n), & \eta = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

которое равно нулю везде, кроме счетного числа вертикалей, на которых

$$\mu_n = \int \xi^n dx^0(\xi).$$

Доказать, что x^0 — единственная оптимальная стратегия для игрока I.

Указание: использовать результат задачи 22.

24. Рассмотрим ядро Т. П., значения которого в окрестности диагонали убывают в направлении от диагонали. Предположим, кроме того, что производные $K_{\xi\xi}$, $K_{\eta\eta}$ строго положительны с каждой стороны диагонали $\xi \leq \eta$ и $\eta \geq \xi$, но не обязательно выпуклы по каждой из переменных на всем единичном квадрате. Доказать, что K является ядром Т. Г.

25. Предположим, что $K(\xi, \eta) = \psi(|\xi - \eta|)$ (предполагается, что функция ψ трижды непрерывно дифференцируема) — ядро Т. П., которое строго выпукло с каждой стороны диагонали и значения которого убывают в направлении от диагонали. Доказать, что K является ядром Т. Г.

26. Построить ядро $K(\xi, \eta)$, для которого единственными оптимальными стратегиями являются функции x и y , состоящие из двух скачков, причем каждая из них имеет по крайней мере один скачок внутри единичного интервала.

27. Построить ядро, единственные оптимальные стратегии которого равны

$$x = \alpha I_0 + (1 - \alpha) I_1 \quad \text{и} \quad y = \beta I_0 + (1 - \beta) I_1,$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$.

28. Показать, что для любого непустого выпуклого слабо* замкнутого множества $\mathcal{F}$ распределений¹⁾ существует последователь-

¹⁾ См. п. В. 3. — Прим. ред.

ность $\{\varphi_n\}$ непрерывных функций и последовательность $\{a_n\}$ вещественных чисел, для которых

$$\mathcal{F} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \mid \int \varphi_n dx \geq a_n \right\}.$$

29. Используя обозначения предыдущей задачи, положим

$$K(\xi, 0) = 0 \quad \text{и} \quad K\left(\xi, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} [\varphi_n(\xi) - a_n].$$

Пусть для $1/(n+1) \leq \eta \leq 1/n$ функция $K(\xi, \eta)$ определяется линейной интерполяцией. Показать, что стратегия $x(\xi)$ оптимальна для игры с ядром $K(\xi, \eta)$ в том и только в том случае, если $x \in \mathcal{F}$.

Комментарии и библиография к главе 15

Необходимость анализа различных частных классов игр вызвана двумя причинами. Во-первых, он содействует задаче классификации игр с точки зрения влияния свойств ядра на вид решения. Это аналогично целям, преследуемым, например, классификацией дифференциальных уравнений. Во-вторых, любая конкретная разработка упрощает и делает более очевидным применение теории бесконечных игр на практике.

15.1. Первые результаты по аналитическим играм, затронутым здесь, принадлежат главным образом Гроссу и Гликсбергу.

Замечательный пример рациональной игры, единственным решением которой является канторовское распределение, принадлежит Гроссу [1] (см. также [4]). Другие странные решения „хороших“ на вид игр см. у Гликсберга и Гросса [2]. Эти авторы показали также, что для любой конкретной пары распределений существует игра с аналитическим ядром, для которой данные распределения являются единственными оптимальными стратегиями. Пример 3 этого пункта является частным случаем их построения.

15.2. В 1951 г. служащий компании Локхид советовался со мной относительно игровой задачи с подводной лодкой, описанной в 10.4. При анализе этого примера стало ясно, что он является представителем более широкого класса игр — именно колоколообразных игр. Ядро $1/[1 + \lambda(\xi - \eta)^2]$ имеет вид, аналогичный виду гауссовского ядра, и природа решений игр с этими ядрами также сходна. Некоторые специальные случаи такого рода можно найти у Мак-Кинси [1], стр. 230.

Ч. Ф. П. были впервые изучены Пойа в связи с задачей характеристики функций, которые могут быть аппроксимированы в данном интервале полиномами, имеющими только вещественные нули. Характер убывания вариации знака этих ядер был широко исследован Шёнбергом [1], а также Гантмахером и Крейном [1]. Значение ядер типа Пойа для теории статистических решений было указано Карлином [4].

15.3. Все результаты этого пункта являются переработкой статьи Карлина [5].

15.4. Теория ядер Грина и Пойа была впервые рассмотрена в работе [5].

15.5. Важность принципа инвариантности в связи со статистическими задачами восходит еще к Питману [1]. Наиболее глубокие приложения этих понятий были разработаны одновременно Хантом и Стейном, когда они освободились от своих обязанностей метеорологов армии США во время второй мировой войны. Эти соображения еще не появились в печати. Тем не менее они стали хорошо известными и привлекли внимание многих статистиков-теоретиков, которые развили многие из их следствий применительно к статистическим задачам. (См. Кифер [1], Кудо [1], Блекуэлл и Гиршик [1] и Пейсаков [1].)

Теорема 15.5.3 принадлежит Савиджу (не опубликовано). Приложение теории инвариантности к играм с двумя разумными противниками рассматривается в работе Карлина [5] в абстрактной форме.

15.6. Задачи 3, 4 и 15—23 принадлежат Гликсбергу и Гроссу (служебные материалы корпорации РЭНД). Задача 11 принадлежит Гроссу [1].

БЕСКОНЕЧНЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ ИГРЫ, РАЗЫГРЫВАЕМЫЕ НЕ НА ЕДИНИЧНОМ КВАДРАТЕ

В большинстве игр, рассмотренных в гл. 11—15, множество чистых стратегий каждого игрока отождествлялось с единичным интервалом вещественной оси. В качестве множества всех стратегий в таких играх рассматривалось множество вероятностных распределений, определенных на пространстве чистых стратегий. Чистые стратегии обычно обладали некоторой конкретной интерпретацией, которая использовалась в процессе решения игры. Например, в играх с выбором момента времени чистые стратегии представляли собой возможные моменты времени, которые могли быть выбраны для совершения некоторого действия. В некоторых выпуклых играх чистая стратегия обозначала долю ресурсов, употребленную любым из двух (или более) возможных способов.

В этой и последующих главах мы рассмотрим класс игр, которые не могут быть описаны ядром, определенным на подмножествах евклидовых пространств, но для которых пространство стратегий каждого игрока может быть погружено в то или иное классическое функциональное пространство. Такие игры являются все же играми категории I в соответствии с нашей классификацией, приведенной в гл. 10 (см. стр. 417).

Мы отложим исследование игр категории II, пространства стратегий которых значительно шире, чем пространства, изучаемые здесь. Анализ этих игр сложен, он вынуждает нас, например, столкнуться с нерешенной математической проблемой выяснения понятия меры на функциональных пространствах. Игры этого класса будут рассматриваться в следующем томе.

Игры, рассматриваемые в этой главе, могут быть интерпретированы, как тактические дуэли, в которых допускается непрерывное ведение огня. В играх с выбором момента времени, рассмотренных в более ранних главах, каждый игрок имел одну возможность или самое большее конечное число возможностей, чтобы действовать. В этой главе мы позволим по крайней мере одному из игроков действовать непрерывным образом. Читателю следует снова обратиться

к примеру, приведенному в п. 10.4, как к одному из случаев игр этого класса.

В настоящей главе мы дадим решение этого примера и рассмотрим обобщение этой игры, которое может быть интерпретировано как дуэль двух пулеметчиков.

Отдельные примеры, рассматриваемые здесь, не охватывают общей теории. К несчастью, однако, для решения таких игр общей теории не существует, а имеется лишь более или менее полезный аппарат, который часто является эффективным при решении специальных дуэлей с непрерывным огнем. Этот аппарат будет формализован в следующей главе при изучении моделей покера. В этой главе мы сконцентрируем наше внимание на выявлении действия этого аппарата в двух упомянутых выше примерах. Потребность же в развитии некоторой единой теории, охватывающей эти примеры в качестве частных случаев, остается неудовлетворенной.

Вследствие природы ограничений, налагаемых на интенсивность огня, необходимым инструментом в нашем анализе будет хорошо известная лемма Неймана — Пирсона.

16.1. Предварительные результаты (лемма Неймана — Пирсона). В этой главе мы докажем лемму Неймана — Пирсона в ее простейшей форме и покажем, как она может быть использована для решения двух простых задач. Ее приложение к некоторой частной нелинейной вариационной задаче рассматривается в следующем пункте как иллюстрация метода, который следует использовать в игровых задачах п. 16.3 и 16.5.

Задача Неймана — Пирсона. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — две неотрицательные функции, интегрируемые относительно некоторой σ -конечной меры μ , определенной на интервале $0 \leq t \leq T$, причем функция $g(t)$ нормирована так, что

$$\int_0^T g(t) d\mu(t) = 1.$$

В классе $\mathcal{A}$ измеримых функций $\varphi(t)$, подчиненных почти всюду ограничению $0 \leq \varphi(t) \leq M$, для которых

$$\int \varphi(t) g(t) d\mu(t) \leq \alpha \quad (0 < \alpha < M), \quad (16.1.1)$$

мы должны определить функцию $\varphi_0(t)$, для которой

$$\int_0^T \varphi_0(t) f(t) d\mu(t) = \max_{\varphi} \int_0^T \varphi(t) f(t) d\mu(t).$$

Замечание 16.1.1. Существование максимизирующей функции следует здесь из того факта, что сфера радиуса M в банаховом пространстве ограниченных измеримых функций слабо* компактна. Это замечание не является существенным для дальнейшего, так как мы представим решение в явном виде и проверим его свойство максимальности непосредственно.

Заметим сначала, что если $\varphi_0(t)$ — решение, то любая функция, равная $\varphi_0(t)$ почти всюду относительно меры μ , также является решением. Во избежание недоразумений везде в этой главе любые две функции, отличающиеся только на множестве μ -меры нуль, рассматриваются, как одна и та же функция. Наконец, для удобства мы применяем следующее обозначение скалярного произведения:

$$\int \varphi(t) f(t) d\mu(t) = (f, \varphi).$$

Решение. Сопоставим каждой измеримой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей почти всюду неравенству $0 \leq \varphi \leq M$, точку $(\xi, \eta) \in E^2$, где

$$\xi = (g, \varphi), \quad \eta = (f, \varphi).$$

Множество образов в E^2 (которое мы обозначим через Γ), очевидно, выпуклое, так как описанное отображение линейно. Множество Γ содержит точки $(0, 0)$ и $(M, (f, M))$, где M представляет собой функцию $\varphi(t)$, тождественно равную M ; кроме того, если $(\xi, \eta) \in \Gamma$, то очевидно, что

$$\eta = \int \varphi(t) f(t) d\mu(t) \leq (f, M).$$

Следовательно, Γ — выпуклое множество, наибольшая ордината которого соответствует его наибольшей абсциссе, так что для решения задачи достаточно найти максимум (f, φ) среди тех элементов $\mathcal{A}$, для которых $(g, \varphi) = \alpha$.

Предположим для удобства, что функция $g(t)$ положительна всюду, где положительна $f(t)$. В более общем случае, когда это предположение нарушается, существенные идеи анализа остаются теми же, однако возникают некоторые патологические особенности, которые приходится рассматривать особо.

Пусть $\eta = k\xi + b$ означает опорную плоскость Γ в точке, абсцисса которой равна $(g, \varphi) = \alpha$, а ордината равна наибольшему возможному значению этой абсциссы. Предыдущие замечания показывают, что $k \geq 0$ и что $\eta \leq k\xi + b$ для всех $(\xi, \eta) \in \Gamma$; при этом равенство достигается для образа решения φ_0 (если оно существует). Мы будем предполагать, что решение существует, и попытаемся охарактеризовать его вид. Когда функция φ_0 полностью определена, ее свой-

ство максимальнойности может быть проверено обычным способом (см. ниже). Таким образом,

$$\begin{aligned}(f, \varphi_0) &= k(g, \varphi_0) + b, \\ (f, \varphi) &\leq k(g, \varphi) + b;\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$(f - kg, \varphi - \varphi_0) \leq 0.$$

Полагая сначала $\varphi(t) \equiv M$ на множестве, где $f - kg > 0$, и $\varphi(t) \equiv \varphi_0$ в остальных точках, а затем $\varphi(t) \equiv 0$, где $f - kg < 0$ и $\varphi(t)$ в остальных точках, мы заключаем, что

$$\text{если } \frac{f(t)}{g(t)} \begin{cases} > k, & \text{то } \varphi_0(t) = M, \\ < k, & \text{то } \varphi_0(t) = 0, \\ = k, & \text{то } \varphi_0 \text{ не определено.} \end{cases} \quad (16.1.2)$$

Если g равно нулю, то, по предположению, $f = 0$, а функцию f/g следует положить равной k .

Последнее из условий (16.1.2) означает, что любое определение φ на множестве, где $f = kg$, не изменяет значения (f, φ) .

Вычисление. На практике метод вычисления значения k и функции φ_0 состоит в следующем: пусть K — множество таких вещественных чисел k' , что

$$v(k') = \int_{f/g > k'} Mg(t) d\mu(t) \geq \alpha,$$

где $v(k')$ — невозрастающая непрерывная справа функция k' , и

$$k = \sup_{k' \in K} k' \geq 0.$$

Если положить

$$\varepsilon = \alpha - \int_{f/g > k} Mg(t) d\mu(t),$$

то $\varepsilon \geq 0$ в силу непрерывности справа функции v и $\varepsilon \leq v(k-0) - v(k)$.

Определим φ_0 в соответствии с соотношениями (16.1.2) таким образом, чтобы при этом имело место равенство

$$\int_{f/g = k} \varphi_0(t) g(t) d\mu(t) = \varepsilon,$$

которое, очевидно, возможно вследствие заданных границ для ε .

Для доказательства того, что функция φ_0 , определенная с помощью числа k , искомая, мы можем прямо проверить, что для любого $\varphi(t)$, для которого почти всюду имеют место неравенства $0 \leq \varphi(t) \leq M$,

$$(f - kg, \varphi - \varphi_0) \leq 0,$$

и, следовательно,

$$(f, \varphi) - (f, \varphi_0) \leq k [(g, \varphi) - (g, \varphi_0)] = k [(g, \varphi) - \alpha].$$

Поэтому $(f, \varphi_0) \geq (f, \varphi)$, как только $(g, \varphi) \leq \alpha$.

Аналогичная задача. Пусть функция $g(t)$ определена, как и раньше, а $f(t)$ — интегрируемая функция (не обязательно положительная). Задача состоит в том, чтобы найти функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую ограничениям

$$0 \leq \varphi(t) \leq M, \quad \int_0^T g(t) \varphi(t) d\mu(t) = \alpha,$$

для которой значение (f, φ) максимально. Мы предполагаем, что $0 < \alpha < M$. Решение тривиально, если $\alpha = 0$ или $\alpha = M$.

Заметим, что ограничение (16.1.1) заменено здесь более сильным требованием $(g, \varphi) = \alpha$. Это необходимо, так как функция f не предполагается больше неотрицательной, и, следовательно, мы не можем здесь заключить, как раньше, что для максимизирующей функции φ должно выполняться соотношение $(g, \varphi) = \alpha$, если заранее не ограничимся только такими φ .

Решение этой задачи аналогично решению предыдущей. Преобразование $\varphi \rightarrow [(g, \varphi), (f, \varphi)]$ переводит множество измеримых функций φ ($0 \leq \varphi \leq M$) в выпуклое множество Γ из E^2 . Это множество имеет упомянутую опорную плоскость в точке с абсциссой $\xi = \alpha$, и уравнение этой плоскости имеет вид $\eta = k\xi + b$, где k не обязательно положительное. Решение φ_0 связано с k следующим образом:

$$\text{если } \begin{cases} \frac{f(t)}{g(t)} > k, & \text{то } \varphi_0(t) = M; \\ \frac{f(t)}{g(t)} < k, & \text{то } \varphi_0(t) = 0. \end{cases}$$

Там, где $f(t) = kg(t)$, значения $\varphi_0(t)$ подчинены только ограничениям

$$\int_0^T \varphi_0(t) g(t) d\mu(t) = \alpha, \quad 0 \leq \varphi_0(t) \leq M.$$

Там, где $g(t) = 0$, мы предполагаем, как раньше, что $f(t) = 0$, так что такие точки не оказывают влияния на решение.

16.2*. Приложение леммы Неймана — Пирсона к одной вариационной задаче. Характеристика решения задачи Неймана — Пирсона [см. (16.1.2)] может быть использована для решения нелинейных вариационных задач некоторого частного вида. Поскольку затронутый аппарат будет необходим для анализа дуэлей пулеметчиков, мы отвлечемся на минуту от нашего сугубо теоретико-игрового направления и обсудим использование этого аппарата для

нелинейной вариационной задачи, представляющей и некоторый независимый интерес.

Изложим идею метода следующим образом: задача состоит в том, чтобы определить функцию $\varphi(t)$, которая максимизирует (минимизирует) интегральное выражение, содержащее вогнутую (выпуклую) функцию φ , подчиненную линейным неравенствам. С помощью некоторого преобразования интегрального функционала от φ мы сводим эту задачу к задаче, к которой применяется решение Неймана—Пирсона, с одной важной оговоркой: в обозначениях п. 16.1 решение $\varphi_0(t)$ входит теперь в функцию f . Таким образом, решение задачи Неймана—Пирсона определяется в неявном виде; при этом мы не гарантированы от противоречий, которые могут содержаться в этом решении.

Однако при помощи тщательного анализа и изобретательности часто можно найти непротиворечивое решение, удовлетворяющее ограничениям. Это осуществляется путем введения подходящих параметров, определяемых из естественных соотношений задачи. Непротиворечивость решения должна быть впоследствии проверена. Мы проиллюстрируем этот процесс следующей вариационной задачей.

Задача. Пусть $F(x)$, где $0 \leq F(x) \leq A$, — дважды непрерывно дифференцируемая функция, для которой $F'(0) > 0$ и $F''(x) < 0$. Пусть, далее, $v(t)$ положительная, строго убывающая, непрерывная и интегрируемая на $[0, \infty)$ функция. Пусть, наконец, функция $\varphi(t)$ интегрируема и подчинена условию

$$\int_0^{\infty} \varphi(t) dt \leq \alpha \quad (\alpha > 0, \varphi(t) \geq 0), \quad (16.2.1)$$

а в остальном произвольная.

Мы хотим выделить в классе всех таких функций функцию $\varphi_0(t)$, для которой функционал

$$\int_0^{\infty} F[\varphi_0(t)] v(t) dt \quad (16.2.2)$$

максимален.

Этой задаче можно приписать следующее физическое содержание. Пусть $\varphi(t)$ — скорость добычи нефти в момент t из бассейна известного ограниченного объема α , а $F[\varphi(t)]$ — прибыль, соответствующая $\varphi(t)$. Функцию F можно считать вогнутой, так как расходы выражаются выпуклой функцией. Пусть $F[\varphi(t)] v(t)$ есть ценность будущих прибылей в настоящий момент; здесь $v(t)$ является функцией скидки.

Наша задача состоит в том, чтобы найти оптимальную функцию лобычи $\varphi_0(t)$, удовлетворяющую условию (16.2.2), такую, что

$$\int_0^{\infty} \varphi_0(t) dt \leq \alpha \quad (\varphi_0(t) \geq 0).$$

Решение. Заметим сначала, что если решение $\varphi(t)$ существует, то оно единственно. Действительно, пусть $\varphi_1(t)$ — любая другая функция, максимизирующая интеграл, и пусть

$$B = \max_{\varphi} \int_0^{\infty} F[\varphi(t)] v(t) dt.$$

В силу строгой вогнутости

$$F[\lambda \varphi_0(t) + (1 - \lambda) \varphi_1(t)] > \lambda F[\varphi_0(t)] + (1 - \lambda) F[\varphi_1(t)]$$

для всех t , для которых $\varphi_0(t) \neq \varphi_1(t)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F[\lambda \varphi_0(t) + (1 - \lambda) \varphi_1(t)] v(t) dt &\geq \lambda \int_0^{\infty} F[\varphi_0(t)] v(t) dt + \\ &+ (1 - \lambda) \int_0^{\infty} F[\varphi_1(t)] v(t) dt = B. \end{aligned} \quad (16.2.3)$$

Так как B является максимумом, мы имеем в соотношении (16.2.3) равенство. Из предыдущего неравенства мы заключаем, что $\varphi_0(t) = \varphi_1(t)$ почти всюду.

Приступим к доказательству следующей леммы, которой мы воспользуемся в дальнейшем. (Заметим, что, поскольку производная F' строго убывает и непрерывна, обратная ей функция F'^{-1} существует и также строго убывает и непрерывна.)

► **Лемма 16.2.1.** Пусть

$$J(t_0) = \int_0^{t_1} F'^{-1} \left(\frac{F'(0) v(t_0)}{v(t)} \right) dt,$$

где функции F , v удовлетворяют условиям предыдущей задачи. Тогда

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} J(t_0) = 0, \quad \lim_{t_0 \rightarrow \infty} J(t_0) = \infty.$$

Доказательство. Соотношение

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} J(t_0) = 0$$

является немедленным следствием того, что подынтегральное выражение является убывающей непрерывной функцией, которая сама стремится к нулю при $t_0 \rightarrow 0$. Чтобы доказать второе утверждение леммы, выберем сначала ε ($0 < \varepsilon < 1$), фиксированное таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$F'^{-1} [F'(0)(1 - \varepsilon)] = \delta \quad (\delta > 0).$$

Затем по данному произвольно большому n возьмем $\tilde{t} = n/\delta$. Выберем, наконец, произвольное $t_0 > \tilde{t}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{v(t_0)}{v(\tilde{t})} \leq 1 - \varepsilon.$$

Тогда для $t < \tilde{t}$ мы имеем

$$F'^{-1} \left(\frac{F'(0) v(t_0)}{v(t)} \right) \geq \delta$$

и

$$\int_0^{t_0} F'^{-1} \left(\frac{F'(0) v(t_0)}{v(t)} \right) dt \geq \int_0^{\tilde{t}} F'^{-1} \left(\frac{F'(0) v(t_0)}{v(t)} \right) dt \geq n.$$

Рассмотрим теперь эквивалентную задачу, решение которой получается в результате использования леммы Неймана — Пирсона. Пусть

$$I(\lambda) = \int_0^\infty F[\lambda \varphi_0(t) + (1 - \lambda) \varphi(t)] v(t) dt,$$

$$I'(\lambda) = \int_0^\infty F'[\lambda \varphi_0(t) + (1 - \lambda) \varphi(t)] v(t) [\varphi_0(t) - \varphi(t)] dt,$$

$$I''(\lambda) = \int_0^\infty F''[\lambda \varphi_0(t) + (1 - \lambda) \varphi(t)] v(t) [\varphi_0(t) - \varphi(t)]^2 dt < 0,$$

где мы для простоты изложения предположили, что вторая перестановка дифференцирования и интегрирования справедлива.

Таким образом, $I(\lambda)$ является строго вогнутой функцией λ . Если φ_0 является решением первоначальной задачи, то $I(\lambda)$ достигает своего максимума при $\lambda = 1$. Это возможно *в том и только в том случае*, когда $I'(\lambda) \geq 0$. Именно $\varphi_0(t)$ является решением тогда и только тогда, когда для любой другой функции $\varphi(t)$, для которой

$$\int_0^\infty \varphi(t) dt \leq \alpha \quad (\alpha > 0, \varphi(t) \geq 0). \quad (16.2.4)$$

выполняется неравенство

$$\int_0^{\infty} F'[\varphi_0(t)] v(t) \varphi_0(t) dt \geq \int_0^{\infty} F'[\varphi_0(t)] v(t) \varphi(t) dt. \quad (16.2.5)$$

Предположим, что функция $\varphi_0(t)$, удовлетворяющая неравенству (16.2.4), такова, что для некоторой фиксированной функции $\psi(t)$ неравенство

$$\int_0^{\infty} F'[\psi(t)] v(t) \varphi_0(t) dt \geq \int_0^{\infty} F'[\psi(t)] v(t) \varphi(t) dt \quad (16.2.6)$$

выполняется для всех $\varphi(t)$, удовлетворяющих соотношению (16.2.4). Тогда если на самом деле $\varphi_0(t) \equiv \psi(t)$, то $\varphi_0(t)$ является решением первоначальной задачи, так как соотношения (16.2.4) и (16.2.5) выполняются.

Ограничимся теперь рассмотрением таких функций $\varphi(t)$, что $0 \leq \varphi(t) \leq M$ для $0 \leq t \leq T$ и $\varphi(t) = 0$ для $t > T$. Мы можем решить эту ограниченную задачу, используя результаты Неймана — Пирсона.

Решение $\varphi_0(t)$ может быть описано следующим образом. Пусть k определяется из условия

$$\int_0^T \varphi_0(t) dt = \alpha.$$

$$\text{Тогда если } F'[\psi(t)] v(t) \begin{cases} > k, & \text{то } \varphi_0(t) = M, \\ < k, & \text{то } \varphi_0(t) = 0, \\ = k, & \text{то } \varphi_0(t) \text{ — произвольная} \end{cases} \quad (16.2.7)$$

функция, удовлетворяющая условию $0 \leq \varphi_0(t) \leq M$.

С помощью несколько искусственного приема найдем теперь функцию $\psi(t)$, согласующуюся с решением Неймана — Пирсона $\varphi_0(t)$, имея в виду данное выше описание этого решения.

Ввиду ограничения

$$\int_0^T \varphi_0(t) dt \leq \alpha$$

мы можем считать, что функция $\varphi_0(t)$ никогда не достигает значения M , если только M с самого начала выбирается достаточно большим. Кроме того, на любом интервале, где $F'[\psi(t)] v(t) = k$,

мы должны иметь $\psi(t) = F'^{-1}[k/v(t)]$. Таким образом, „кандидатом в $\psi(t)$ “ может быть функция

$$\psi(t) = \begin{cases} F'^{-1}[k/v(t)], & 0 \leq t < t_0, \\ 0, & t_0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (16.2.8)$$

Тогда

$$F[\psi'(t)]v(t) = \begin{cases} k, & 0 \leq t < t_0, \\ F'(0)v(t), & t_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Если мы возьмем $k = F'(0)v(t_0)$, то

$$F[\psi'(t)]v(t) = \begin{cases} F'(0)v(t_0) = k, & 0 \leq t \leq t_0, \\ F'(0)v(t) < k, & t_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Такой выбор k не должен вызывать удивления, так как он обеспечивает непрерывность $\psi(t)$ в точке t_0 . Можно показать, что любой другой выбор приводит к противоречию. Чтобы удовлетворить очевидным требованиям совместности, возьмем в соответствии с условиями (16.2.7) в качестве M постоянное число, большее чем $\psi(t)$.

Выберем на основании леммы 16.2.1 t_0 так, чтобы

$$\int_0^{t_0} F'^{-1}\left(\frac{F'(0)v(t_0)}{v(t)}\right) dt = \alpha.$$

Затем для $T \geq t_0$ мы имеем

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} F'^{-1}\left(\frac{F'(0)v(t_0)}{v(t)}\right), & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t_0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (16.2.9)$$

Мы можем проверить, что так определенная функция $\varphi_0(t)$ удовлетворяет условиям (16.2.7), где $\psi(t) = \varphi_0(t)$. Следовательно, φ_0 является решением первоначальной задачи, если допустимые функции $\varphi(t)$ подчинены следующим дополнительным условиям: они равномерно ограничены числом M и равны нулю вне фиксированного интервала $[0, T]$.

Однако любую функцию $\varphi(t)$, подчиненную условию

$$\int_0^\infty \varphi(t) dt = \alpha < \infty,$$

можно аппроксимировать последовательностью ограниченных функций $\varphi_n(t)$, равных нулю вне компактных множеств. Эта аппроксимация осуществляется так, что

$$\int_0^\infty (F[\varphi(t)] - F[\varphi_n(t)])v(t) dt \rightarrow 0.$$

Отсюда вытекает, что функция $\varphi(t)$, определенная соотношениями (16.2.9), является решением вариационной задачи по отношению ко всем возможным φ , удовлетворяющим условию (16.2.1).

16.3. Дуэль снайпера с пулеметчиком ¹⁾. В этом и в последующем пунктах мы приведем решение игры, сформулированной в п. 10.4, которая описывает дуэль между снайпером, способным выстрелить лишь один раз, и пулеметчиком, способным вести непрерывный огонь. Мы будем рассматривать здесь небольшое видоизменение этой задачи, которую мы будем интерпретировать как рекламную борьбу. Основные черты решений этих двух задач совпадают. Модель может полностью и не соответствовать встречающейся в жизни ситуации, но она указывает, какого типа разумные рекомендации, касающиеся поведения участников этой ситуации, вытекают из анализа игровых задач.

Рассмотрим конкуренцию между двумя дельцами, мистером K (Крупный) и мистером M (Мелкий). K процветает и имеет устойчивый круг клиентов; M находится на краю банкротства. В некоторый момент 0 на сцену появляется потенциальный заказчик. Он может решить не покупать вообще, но если уж покупает, то одному из концернов (и притом только одному) будет сделан большой заказ. Заказ этот достаточно велик, чтобы поставить M на ноги, однако, чтобы не вылететь в трубу еще до заключения контракта, M должен получить заказ до определенного времени (назовем его временем 1). В момент 0 K и M вступают в рекламную борьбу. Так как M , несомненно, будет вынужден бросить дело, если он не обеспечит себе этот заказ, то K будет рассматривать как победу даже такую ситуацию, когда покупатель решит не покупать вовсе. M выигрывает, если он обеспечивает себе заказчика в нужный срок, K выигрывает, если заказчик не покупает вообще или если заказ получает K . При надлежащей интерпретации характеристик полезности участников игра имеет нулевую сумму.

Мы предполагаем здесь, что только K или M могут получить заказ и что именно реклама будет решающим фактором, определяющим решение заказчика. Отметим следующее обстоятельство: преимуществом K является возможность распространить свою рекламную деятельность на весь период, в то время как для M лучше всего сконцентрировать свои ресурсы на одном продуманном мероприятии. Каждый должен, исходя из своих целей и возможностей, решить, когда заниматься рекламой.

Мы предполагаем, что сопротивление потребителя рекламе убывает со временем. Кроме того, мы предполагаем, что психология заказчика такова, что все предыдущие рекламы, которые уже поя-

¹⁾ См. примечание на стр. 444. — *Прим. перев.*

вились, не оказывают на него влияния, когда он читает данную рекламу.

Мы сформулируем теперь кампанию, как математически непрерывный процесс. M выбирает для осуществления рекламы момент времени t из $[0, 1]$, а K выбирает темпы расходования средств, которые подчинены следующим ограничениям:

$$0 \leq p(t) \leq 1, \quad \int_0^1 p(t) dt = \delta < 1, \quad (16.3.1)$$

где δ соответствует деньгам, ассигнованным дельцом K на рекламную кампанию (другими словами, если K расходует деньги с максимальной скоростью, то они будут израсходованы в течение времени δ).

Пусть $a(t)$ — вероятность успеха M , если он рекламирует в момент t , а $r(t)$ представляет вероятность того, что вложение одного доллара в момент t обеспечит заказ для K , если он до того времени еще не будет размещен. [Говоря более точно, $r(t)p(t)$ есть плотность вероятности, соответствующая скорости расходов $p(t)$.] Как уже отмечено, мы предполагаем, что как $r(t)$, так и $a(t)$ со временем возрастают.

Для фиксированных стратегий, момента t для M и скорости расходов $p(t)$ для K вероятность выигрыша M равна вероятности того, что заказчик будет сопротивляться K до момента t , а затем уступит M . Пусть $\varphi(t, p)$ — вероятность сопротивления заказчика рекламе K в течение интервала $[0, t]$; тогда из предположения о независимости мы имеем

$$\varphi(t, p) = \exp\left(-\int_0^t p(u) r(u) du\right) \quad (16.3.2)$$

(доказательство этой формулы читатель может найти в п. 10.4).

Когда K (игрок II) использует стратегию $p(t)$, а M (игрок I) действует в момент t , функция выигрыша $K[t, p(t)]$ равна

$$\begin{aligned} K[t, p(t)] &= \alpha a(t) \varphi[t, p(t)] - \beta \{1 - \varphi[t, p(t)]\} - \\ &- \beta \varphi[t, p(t)] [1 - a(t)] = \\ &= [(\alpha + \beta) a(t)] \varphi(t, p) - \beta, \end{aligned} \quad (16.3.3)$$

где α — выигрыш M , если M выигрывает заказ, а β — выигрыш K , если M становится банкротом. Коэффициенты при этих выигрышах, очевидно, равны вероятностям соответствующих событий в условиях выбора стратегий t для M и $p(t)$ для K .

Выигрыш в условиях смешанной стратегии x игрока M и выбора p игроком K получается усреднением на пространстве чистых стратегий:

$$K(x, p) = \int_0^1 K(t, p) dx(t). \quad (16.3.4)$$

Опишем теперь решение игры с ядром $K(x, p)$ (доказательства будут даны в следующем пункте). С этой целью положим

$$w(t) = \min \left(1, \frac{A'(t)}{A(t)r(t)} \right),$$

где $A(t) = (\alpha + \beta)a(t)$. (В случае дуэли снайпера с пулеметчиком $A(t) = \alpha a(t) + \beta$, см стр. 434.) Решение, данное ниже, справедливо только в том случае, когда отношение

$$\frac{a'(t)}{a(t)r(t)} = b(t)$$

строго убывает по t . Это будет выполняться, например, когда функция $\log a(t)$ вогнутая. Далее мы увидим, что только множество точек, для которых $b(t) < 1$, может быть существенным для оптимальной стратегии игрока II; наше предположение гарантирует, что такое множество в наихудшем случае состоит из одного интервала. При рассмотрении общего случая анализ остается тем же самым, но требует утомительных выкладок, которых особенно много при нахождении более трудного типа стратегии игрока II, представляющей собой скорость расходов, распределенных в тех непересекающихся интервалах значений t , где $b(t) < 1$. Мы приняли наше предположение для того, чтобы избежать этих непринципиальных сложностей; все основные особенности общего ответа сохранены, так же как и главные элементы доказательств. Следует добавить, что большинство встречающихся на практике вероятностных функций $a(t)$ и $r(t)$ таково, что предположение об убывании $b(t)$ в самом деле выполняется.

Введем теперь следующие два параметра. Пусть d — единственное значение из промежутка $[0, 1]$, удовлетворяющее равенству

$$\frac{A'(d)}{A(d)r(d)} = 1$$

(если такое значение существует). Если в единичном интервале ни одного решения этого уравнения не содержится, то положим $d = 1$, когда всюду в $[0, 1]$ имеет место неравенство

$$\frac{A'(t)}{A(t)r(t)} > 1,$$

и $d = 0$, когда выполняется противоположное неравенство. Далее, мы рассмотрим только тот случай, когда d существует. Другие случаи предоставляются читателю в качестве упражнений.

Если

$$\int_0^1 w(t) dt = \delta_0 > \delta,$$

то выберем c , чтобы выполнялось соотношение

$$\int_c^1 w(t) dt = \delta.$$

Решение игры может быть теперь описано в терминах величин $w(t)$, c и d . Рассмотрим отдельно три случая.

Случай 1. $\delta_0 > \delta$, $c < d$. Оптимальная стратегия игрока II равна

$$p_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ w(t), & c \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока I равна

$$x_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < d, \\ 1 - \frac{r(c)}{r(t)}, & d \leq t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

Случай 2. $\delta_0 > \delta$, $d < c$. Оптимальная стратегия игрока II равна

$$p_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ w(t), & c \leq t < 1. \end{cases}$$

Оптимальная стратегия игрока I равна

$$x_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq c, \\ 1 - \frac{r(c)}{r(t)}, & c \leq t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

Случай 3. $\delta_0 \leq \delta$. Оптимальной стратегией игрока II является любая функция $p_0(t)$, удовлетворяющая условиям

$$(a) \quad p_0(t) = 1 \quad (0 \leq t \leq d),$$

$$(b) \quad 1 \geq p_0(t) \geq \frac{A'(t)}{A(t)r(t)} \quad (d \leq t \leq 1),$$

$$(в) \quad \int p_0(t) dt = \delta.$$

Оптимальной стратегией игрока I является вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $t = d$.

В случаях 1 и 2 оптимальная стратегия каждого из игроков единственна, в то время как в случае 3 игрок II имеет целое семейство оптимальных стратегий, описанных выше, а также некоторые другие оптимальные стратегии.

Если функция $b(t)$ не монотонна, то оптимальная стратегия игрока II состоит из интервалов, в которых функция $p_0(t) = w(t)$, чередующихся с интервалами, в которых $p_0(t) = 0$.

В качестве примера рассмотрим случай $\beta = 0$, $\alpha = 1$, $r(t) = k^2 t$ ($k > 1$), $a(t) = t$. Тогда

$$b(t) = (kt)^{-2}, \quad d = \frac{1}{k}, \quad \delta_0 = \frac{2k-1}{k^2};$$

если

$$\frac{k-1}{k^2} \begin{cases} \leq \delta \leq \delta_0, & \text{то } c = \delta_0 - \delta \leq d, \\ > \delta, & \text{то } c = \frac{1}{1+k^2\delta} > d. \end{cases}$$

На основе приведенного выше описания мы можем получать теперь различные виды решений.

16.4*. Решение дуэли снайпера с пулеметчиком. Так как постоянная β в соотношении (16.3.3) не влияет на множество оптимальных стратегий, изучим общую игру с функцией выигрыша

$$V(t, p) = A(t) \exp \left(- \int_0^t p(u) r(u) du \right),$$

где $0 \leq t \leq 1$, а функция $p(u)$ подчинена условиям (16.3.1). Мы предполагаем, кроме того, что $A(t) > 0$, $A'(t) > 0$ и $r(u) > 0$, $r'(u) > 0$ и что

$$b(t) \equiv \frac{A'(t)}{A(t)r(t)}$$

— строго убывающая функция t . Первые две группы условий в нашей модели удовлетворяются, а последняя является дополнительным предположением, касающимся функций меткости $r(t)$ и $a(t)$, значение которых мы выяснили в предыдущем пункте.

Стратегии. Стратегиями игрока II будут функции $p(t)$, удовлетворяющие условиям (16.3.1), а смешанными стратегиями игрока I будут вероятностные распределения $x(t)$ на единичном интервале. Соответствующий ожидаемый выигрыш будет равен

$$\int V(t, p) dx(t) = \int A(t) \exp \left(- \int_0^t p(u) r(u) du \right) dx(t).$$

Тот факт, что игра имеет значение и оптимальные стратегии, может быть выведен из абстрактной теоремы о минимаксе. Фактическое указание оптимальных стратегий для этого примера будет дано в этом пункте далее. Следующая лемма является основной.

► Лемма 16.4.1. Если существуют такие две допустимые стратегии $p_1(t)$ и $p_2(t)$, что $V(t, p_1) \geq V(t, p_2)$ для всех t , то $p_1(t) = p_2(t)$ почти всюду.

Доказательство. По предположению,

$$\int_0^t r(u) p_1(u) du \leq \int_0^t r(u) p_2(u) du.$$

Следовательно, если мы положим $f(u) = p_2(u) - p_1(u)$, то

$$\psi(t) = \int_0^t r(u) f(u) du \geq 0,$$

и $\psi'(u) = r(u) f(u)$ почти всюду. Но

$$\int_0^1 \frac{d\psi(u)}{r(u)} = \int_0^1 f(u) du = \int_0^1 [p_2(u) - p_1(u)] du = \delta - \delta = 0.$$

С другой стороны, интегрируя по частям, мы получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\psi(1)}{r(1)} - \frac{\psi(\varepsilon)}{r(\varepsilon)} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\psi(u)}{[r(u)]^2} r'(u) du \right) = 0, \quad (16.4.1)$$

причем

$$\left| \frac{\psi(\varepsilon)}{r(\varepsilon)} \right| = \frac{1}{r(\varepsilon)} \left| \int_0^{\varepsilon} r(u) f(u) du \right| \leq \int_0^{\varepsilon} |f(u)| du \rightarrow 0.$$

Так как оба остальных члена в соотношении (16.4.1) являются неотрицательными, мы заключаем, что они оба должны стремиться к нулю, откуда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\psi(t)}{[r(t)]^2} r'(t) dt = 0.$$

Поскольку $\psi \geq 0$, то $\psi(t) = 0$ почти всюду. Таким образом почти всюду $f = 0$.

Положим

$$w(t) = \min \left(1, \frac{A'(t)}{A(t) r(t)} \right),$$

где постоянные c и d определены ранее.

Случай 1. $\delta_0 > \delta$, $c < d$. Положим

$$p_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ w(t), & c \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш в условиях этой стратегии равен

(1) при $0 \leq t \leq c$

$$V(t, p_0) = A(t);$$

(2) при $c \leq t \leq d$

$$V(t, p_0) = A(t) \exp \left(- \int_c^t r(u) du \right).$$

Поэтому в области (2)

$$V'(t, p_0) = \exp \left(- \int_c^t r(u) du \right) [A'(t) - A(t)r(t)].$$

Но

$$1 \leq \frac{A'(t)}{A(t)r(t)},$$

так что производная $V'(t, p_0)$ для $t < d$ строго положительна и функция $V(t, p_0)$ возрастает; ее максимальное значение достигается в точке $t = d$ и будет обозначаться через M_1 ;

(3) при $d \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} V(t, p_0) &= A(t) \exp \left(- \int_c^d r(u) du \right) \exp \left(- \int_d^t \frac{A'(u)}{A(u)} du \right) = \\ &= A(d) \exp \left(- \int_c^d r(u) du \right) = M_1. \end{aligned} \quad (16.4.2)$$

Эти результаты могут быть объединены в следующей записи:

$$\max_{0 \leq t \leq 1} V(t, p_0) = M_1,$$

и это значение достигается только при $d \leq t \leq 1$.

► Лемма 16.4.2. Для любой стратегии $p \neq p_0$

$$\max_t V(t, p) > \max_t V(t, p_0),$$

и, следовательно, p_0 является оптимальной стратегией игрока II (в случае 1).

Доказательство. По лемме 16.4.1, если $p \neq p_0$, то существует такое значение t^* , что $V(t^*, p) > V(t^*, p_0)$. Заметим сначала,

что t^* не может находиться между 0 и c , так как в этом промежутке p_0 дает функции $\varphi(t, p)$ наибольшее значение. Однако если $c < t^* \leq d$, то

$$\begin{aligned} V(t, p) &= A(d) \exp \left(- \int_0^{t^*} r(u) p(u) du \right) \exp \left(- \int_{t^*}^d r(u) p(u) du \right) = \\ &= \frac{A(d)}{A(t^*)} V(t^*, p) \exp \left(- \int_{t^*}^d r(u) p(u) du \right). \end{aligned}$$

Аналогично

$$V(d, p_0) = \frac{A(d)}{A(t^*)} V(t^*, p_0) \exp \left(- \int_{t^*}^d r(u) du \right).$$

Ясно, что, поскольку $p \leq 1$ и $V(t^*, p) > V(t^*, p_0)$, мы должны иметь $V(d, p) > V(d, p_0) = M_1$. Если $d < t^* \leq 1$, то из неравенства $V(t^*, p) > V(t^*, p_0)$ следует, что $V(t^*, p) > M_1$. Таким образом, в любом случае

$$V(t, p) > M_1 = \max_t V(t, p_0)$$

для некоторого t .

Оптимальная стратегия игрока I. Если стратегия x_0 оптимальна, а v — значение игры, то для любого p

$$\int_0^1 V(t, p) dx_0(t) \geq v,$$

в то время как

$$\int_0^1 V(t, p_0) dx_0(t) = v.$$

Положим

$$I(\lambda) = \int_0^1 V[t, \lambda p_0 + (1 - \lambda)p] dx_0(t) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Тогда

$$I'(\lambda) = \int_0^1 V[t, \lambda p_0 + (1 - \lambda)p] \left(- \int_0^t r(u) [p_0(u) - p(u)] du \right) dx_0(t),$$

$$I''(\lambda) = \int_0^1 V[t, \lambda p_0 + (1 - \lambda)p] \left(- \int_0^t r(u) [p_0(u) - p(u)] du \right)^2 dx_0(t) > 0.$$

Таким образом, $I(\lambda)$ является выпуклой функцией λ , которая достигает минимума при $\lambda = 1$. Это возможно в том и только в том случае, если

$$I'(\lambda)|_{\lambda=1} \leq 0,$$

т. е. если

$$\int_0^1 V(t, p_0) \left(\int_0^t r(u) [p(u) - p_0(u)] du \right) dx_0(t) \leq 0.$$

Изменяя порядок интегрирования, мы замечаем, что

$$\max_p \int_0^1 p(u) r(u) \left(\int_u^1 V(t, p_0) dx_0(t) \right) du \quad (16.4.3)$$

достигается для $p = p_0$. Поскольку множество функций, по которому берется максимум (16.4.3), подчинено ограничениям (16.3.1), мы можем обратиться к лемме Неймана — Пирсона, которая определяет нам функцию $p_0(u)$ следующим образом: для некоторого k

$$\text{если } r(u) \int_u^1 V(t, p_0) dx_0(t) \begin{cases} > k, & \text{то } p_0(u) = 1, \\ = k, & \text{то } 0 \leq p_0(u) \leq 1, \\ < k, & \text{то } p_0(u) = 0. \end{cases}$$

Так как отношение

$$\frac{A'(t)}{A(t)r(t)}$$

строго убывает, мы знаем, что $0 < p_0(t) < 1$, если $d < t < 1$, так что в этом промежутке должно выполняться указанное выше равенство. Следовательно, в силу соотношения (16.4.2) мы имеем $r(u) M_1 [1 - x_0(u)] = k$ для $d < u < 1$, так что

$$x_0(u) = 1 - \frac{k}{M_1} \cdot \frac{1}{r(u)} \quad (d < u < 1).$$

Кроме того, распределение $x_0(t)$ будет сосредоточено в интервале $[d, 1]$, в котором функция $V(t, p_0)$ принимает наибольшее значение, так что $x_0(u) = 0$ ($0 \leq u < d$).

Для того чтобы оценить постоянную k , заметим, что из определения p_0 следует

$$r(u) \int_u^1 V(t, p_0) dx_0(t) < k$$

для $u < c$, в то время как для $u > c$ выполняется противоположное неравенство. Так как эта величина в точке $u = c$ непрерывна, то для этого значения и должно выполняться равенство. Тогда, поскольку

в интервале $[d, 1]$, где полностью сосредоточено распределение x_0 , $V(t, p_0) = M_1$, должно быть $r(c)M_1 = k$ и, следовательно,

$$x_0(u) = 1 - \frac{r(c)}{r(u)} \quad (d < u < 1).$$

В частности, $x_0(d^+) = 1 - r(c)/r(d)$, так что в точке $u = d$ мы имеем скачок $1 - r(c)/r(d)$. Скачок в $u = 1$ имеет величину $r(c)/r(1)$.

Случай 2. $\delta_0 > \delta$, $c > d$. Положим

$$p_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c, \\ w(t), & c \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш имеет следующий вид:

(1) для $0 \leq t < c$

$$V(t, p_0) = A(t) < A(c);$$

(2) для $c \leq t \leq 1$

$$V(t, p_0) = A(c)$$

и, в частности, $\max_t V(t, p_0) = A(c) = M_2$.

► Лемма 16.4.3. Если $p(t) \neq p_0(t)$, то $\max_t V(t, p) > \max_t V(t, p_0)$ и, следовательно, $p_0(t)$ является оптимальной стратегией игрока II.

Доказательство. По лемме 16.4.1, существует значение t^* , такое, что $V(t^*, p) > V(t^*, p_0)$. Но t^* не может находиться в интервале $[0, c]$, так как в этом интервале стратегия p_0 делает выигрыш максимально возможным. Поэтому t^* находится в интервале $[c, 1]$, так что $V(t^*, p) > M_2 = \max_t V(t, p_0)$.

Оптимальная стратегия игрока I. Метод, примененный в случае 1, характеризует теперь p_0 — оптимальную стратегию игрока I — следующим образом:

$$\text{если } r(u) \int_u^1 V(t, p_0) dx_0(t) \begin{cases} > k, & \text{то } p_0(u) = 1, \\ = k, & \text{то } 0 \leq p_0(u) \leq 1, \\ < k, & \text{то } p_0(u) = 0. \end{cases}$$

Но из явного представления p_0 мы знаем, что первый случай никогда не встречается (за исключением этой возможности для точки c , если $c = d$), в то время как вторая возможность справедлива для $c < u < 1$, где $V(t, p_0) = M_2$. Тогда

$$r(u)M_2[1 - x_0(u)] = k \quad (c < u),$$

или

$$x_0(u) = 1 - \frac{k}{M_2 r(u)} \quad (c < u). \quad (16.4.4)$$

Для того чтобы оценить k , заметим сначала, что при $0 \leq t < c$ $p_0(t) = 0$, так что

$$r(u) \int_u^1 V(t, p_0) dx_0(t) < k \quad (0 \leq u < c).$$

Но $x_0(t)$ должно быть сосредоточено в интервале $[c, 1]$, где выигрыш при использовании стратегии p_0 максимален. Поскольку для $t \geq c$ $V(t, p_0) = M_2$, мы получаем

$$r(u) \int_u^1 V(t, p_0) dx_0(t) = r(u) M_2 \leq k \quad (0 \leq u < c).$$

Следовательно, $r(c) M_2 \leq k$. Однако если предположить, что выполняется строгое неравенство, то из соотношения (16.4.4) следует, что

$$x_0(c) < 1 - \frac{M_2 r(c)}{M_2 r(c)} = 0,$$

а это абсурдно. Поэтому $k = M_2 r(c)$ и

$$x_0(u) = 1 - \frac{r(c)}{r(u)} \quad (c \leq u < 1).$$

Наконец, из равенства $x_0(1) = 1$ следует, что распределение x_0 имеет скачок в точке $u = 1$, равный $r(c)/r(1)$.

Случай 3. $\delta_0 \leq \delta$. Покажем, что оптимальная стратегия игрока I равна I_d (вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $t = d$) и что любая стратегия $p_0(t) \geq w(t)$ оптимальна для игрока II. Такая стратегия обладает свойствами

- (1) $p_0(t) = 1 \quad (0 \leq t \leq d)$,
- (2) $1 \geq p_0(t) \geq \frac{A'(t)}{A(t)r(t)} \quad (d \leq t \leq 1)$,
- (3) $\int p_0(t) dt = \delta$.

Ожидаемый выигрыш $V(t, p_0)$ равен

- (1) при $0 \leq t < d$

$$V(t, p_0) = A(t) \exp \left(- \int_0^t r(u) du \right).$$

$$V'(t, p_0) = \exp \left(- \int_0^t r(u) du \right) [A'(t) - A(t)r(t)] > 0;$$

тогда

$$V(t, p_0) \leq V(d, p_0) = A(d) \exp\left(-\int_0^d r(u) du\right) = M_3;$$

(2) при $d \leq t \leq 1$

$$V(t, p_0) \leq A(t) \exp\left(-\int_0^d r(u) du\right) \exp\left(-\int_d^t \frac{A'(u)}{A(u)} du\right) = M_3.$$

В частности, $\max_t V(t, p_0) = M_3$.

► Лемма 16.4.4. Если $p \neq p_0$, то $\max_t V(t, p) \geq \max_t V(t, p_0)$, так что p_0 является оптимальной стратегией игрока II. Оптимальная стратегия игрока I равна I_d , а значение игры равно M_3 .

Доказательство. В интервале $[0, d]$ мы имеем $p(t) \leq 1 = p_0(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} V(d, p) &= A(d) \exp\left(-\int_0^d r(u) p(u) du\right) \geq \\ &\geq A(d) \exp\left(-\int_0^d r(u) du\right) = M_3. \end{aligned}$$

Поэтому, для того чтобы помешать игроку I получить выигрыш, больший чем M_3 , игрок II должен применить стратегию, которая почти всюду в $[0, d]$ равна 1. Для доказательства того, что любая стратегия того же вида, что и p_0 , оптимальна, мы заметим, что если игрок I использует d , он может гарантировать себе выигрыш, равный по крайней мере M_3 . Таким образом, M_3 является значением игры, а стратегии p_0 и I_d оптимальны.

16.5*. Дуэль двух пулеметчиков.

Пусть игроки I и II обладают боеприпасами соответственно в количествах α и β . Вероятности попадания, когда они стреляют друг в друга с расстояния s , равны $\xi(s)$ для игрока I и $\eta(s)$ для игрока II. Предположим, что функции ξ и η непрерывны, строго убывают и, кроме того, что

$$\xi(0) = \eta(0) = 1, \quad \xi(\infty) = \eta(\infty) = 0.$$

Стратегиями в игре являются интегрируемые функции $x(s)$ и $y(s)$. Эти функции, которые описывают интенсивность огня, когда два противника находятся на расстоянии s друг от друга, подчинены

очевидным ограничениям

$$0 \leq x(s), \quad y(s) \leq 1$$

и

$$\int_0^{\infty} x(s) ds = \alpha, \quad \int_0^{\infty} y(s) ds = \beta.$$

[Выражение $x(s)\xi(s)ds$ можно рассматривать здесь как вероятность успеха игрока I в интервале $(s, s+ds)$, если он применяет тактику стрельбы $x(s)$.]

Если противники выбирают стратегии x и y и приближаются один к другому без отступления, то вероятность того, что они оба будут живы, оказавшись на расстоянии s друг от друга, будет обозначаться через $Q_{xy}(s)$. Эта вероятность равна произведению вероятности того, что оба будут живы, находясь на расстоянии $s+h$ друг от друга, на условную вероятность того, что они выживут при изменении этого расстояния от $s+h$ до s .

Для малого h вероятность того, что игрок I будет уничтожен в промежутке $[s+h, s]$, приближенно равна $y(s)\eta(s)h$, следовательно, вероятность того, что игрок I выживет, равна $1 - y(s)\eta(s)h + O(h)$. Так как подобное рассуждение справедливо и для игрока II, мы заключаем, что для достаточно малых h

$$Q_{xy}(s) = Q_{xy}(s+h)[1 - x(s)\xi(s)h][1 - y(s)\eta(s)h] + o(h).$$

Тогда

$$\frac{Q'_{xy}(s)}{Q_{xy}(s)} = x(s)\xi(s) + y(s)\eta(s).$$

Если мы проинтегрируем это уравнение от ∞ до s и положим $Q_{xy}(\infty) = 1$, то получим

$$Q_{xy}(s) = \exp\left(-\int_s^{\infty} x(t)\xi(t)dt\right) \exp\left(-\int_s^{\infty} y(t)\eta(t)dt\right). \quad (16.5.1)$$

Для того чтобы упростить обозначения, мы положим

$$Q_x(s) = \exp\left(-\int_s^{\infty} x(t)\xi(t)dt\right), \quad Q_y(s) = \exp\left(-\int_s^{\infty} y(t)\eta(t)dt\right).$$

Тогда $Q_{xy}(s) = Q_x(s)Q_y(s)$.

Функция выигрыша. Игрока I мы будем считать максимизирующим; если игрок II погибает, то выигрыш игрока I будет равен 1, в остальных случаях выигрыш будет равен нулю. Если игроки

выбирают стратегии $x(s)$ и $y(s)$, то выигрыш равен вероятности гибели игрока II, которая, очевидно, равна

$$\int_0^{\infty} Q_{xy}(s) \xi(s) x(s) ds = \int_0^{\infty} Q_y(s) dQ_x(s) = K(x, y). \quad (16.5.2)$$

Мы решим эту игру для некоторых важных случаев.

Другие варианты дуэлей могут быть построены с помощью приписывания различных значений выигрышей тем или иным ситуациям. Например, мы можем представить себе симметричный случай, когда игрок I выигрывает 1, если его противник гибнет, теряет 1, если он гибнет сам, и не получает ничего в остальных случаях; тогда значение функции выигрыша в условиях выбора стратегий x и y равно

$$L(x, y) = \int Q_x(s) Q_y(s) [\xi(s) x(s) - \eta(s) y(s)] ds.$$

К сожалению, методы, которыми решается игра (16.5.2), неприменимы к игре $L(x, y)$, так как L не является вогнутой функцией x и выпуклой функцией y . Следовательно, значение игры $L(x, y)$ в терминах описанных выше множеств стратегий обычно не определяется. Фактически эта игра полностью относится к категории II.

Игра (16.5.2) может быть также интерпретирована как рекламный конфликт, в соответствии с изложенной в п. 16.3 рекламной интерпретацией, с тем отличием, что здесь обе фирмы применяют стратегию распределения своих рекламных расходов. Игрок I имеет в своем распоряжении α долларов, игрок II — β долларов и т. д., остальные детали интерпретации ясны. Вернемся теперь к анализу игры (16.5.2).

Необходимые условия, налагаемые на оптимальные стратегии. Существование оптимальных стратегий для игры (16.5.2) является следствием общей теоремы существования. В этом параграфе мы начнем с предположения о существовании оптимальных стратегий x_0 и y_0 , а позднее, применяя аппарат Неймана—Пирсона, докажем это и точно.

Положим с этой целью

$$J(\lambda) = \int_0^{\infty} Q_{\lambda y_0 + (1-\lambda)y}(s) dQ_{x_0}(s) \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned} J'(\lambda) &= \int_0^{\infty} Q_{\lambda y_0 + (1-\lambda)y}(s) \left(- \int_s^{\infty} [y_0(t) - y(t)] \eta(t) dt \right) dQ_{x_0}(s), \\ J''(\lambda) &= \int_0^{\infty} Q_{\lambda y_0 + (1-\lambda)y}(s) \left(- \int_s^{\infty} [y_0(t) - y(t)] \eta(t) dt \right)^2 dQ_{x_0}(s). \end{aligned} \quad (16.5.3)$$

Ясно, что $J''(\lambda) \geq 0$; следовательно, $J(\lambda)$ является выпуклой функцией λ . Так как y_0 — оптимальная стратегия минимизирующего игрока, функция $J(\lambda)$ достигает минимума в точке $\lambda = 1$. Для выпуклой функции это возможно в том и только в том случае, если

$$J'(\lambda)|_{\lambda=1} \leq 0.$$

Следовательно в силу соотношений (16.5.3) выражение

$$\int_0^\infty Q_{y_0}(s) \left(\int_s^\infty y(t) \eta(t) dt \right) dQ_{x_0}(s)$$

достигает максимума при $y = y_0$. Изменяя порядок интегрирования, мы можем утверждать, что

$$\int_0^\infty y(t) \eta(t) \left(\int_0^t Q_{y_0}(s) dQ_{x_0}(s) \right) dt \quad (16.5.4a)$$

достигает максимума при $y(t) = y_0(t)$; при этом максимум берется по всем функциям $y(t)$, подчиненным ограничениям

$$0 \leq y(t) \leq 1, \quad \int_0^\infty y(t) dt = \beta. \quad (16.5.4b)$$

Для получения аналогичной характеристики стратегии $x_0(t)$ заметим сначала, что интегрирование по частям дает

$$\int_0^\infty Q_y(s) dQ_x(s) = 1 - \left(Q_x(0) Q_y(0) + \int_0^\infty Q_x(s) dQ_y(s) \right).$$

Положим теперь

$$I(\lambda) = Q_{\lambda x_0 + (1-\lambda)x}(0) Q_{y_0}(0) + \int_0^\infty Q_{\lambda x_0 + (1-\lambda)x}(s) dQ_{y_0}(s).$$

Анализ, параллельный предыдущему, обнаруживает, что $I(\lambda)$ — выпуклая функция λ , и, поскольку стратегия x_0 оптимальна, $I(\lambda)$ достигает минимума при $\lambda = 1$. Это утверждение эквивалентно неравенству

$$I'(\lambda)|_{\lambda=1} \leq 0.$$

а это в свою очередь требует того, чтобы максимум выражения

$$\int_0^{\infty} Q_{x_0}(0) Q_{y_0}(0) x(t) \xi(t) dt + \int_0^{\infty} x(t) \xi(t) \left(\int_0^t Q_{x_0}(s) dQ_{y_0}(s) \right) dt \quad (16.5.5a)$$

достигался при $x(t) = x_0(t)$, где максимум берется по множеству функций $x(t)$, подчиненных ограничениям

$$0 \leq x(t) \leq 1, \quad \int_0^{\infty} x(t) dt = \alpha. \quad (16.5.5b)$$

Так как y_0 и x_0 максимизируют выражения (16.5.4a) и (16.5.5a) при условиях (16.5.4b) и (16.5.5b), метод Неймана—Пирсона приводит к следующему описанию этих функций. Пусть

$$H(t) = \int_0^t Q_{y_0}(s) dQ_{x_0}(s) \quad (16.5.6)$$

и

$$K(t) = Q_{x_0}(0) Q_{y_0}(0) + \int_0^t Q_{x_0}(s) dQ_{y_0}(s), \quad (16.5.7)$$

тогда существуют такие положительные постоянные h и k , что

$$\text{если } H(t) \begin{cases} > \frac{h}{\eta(t)}, & \text{то } y_0(t) = 1, \\ = \frac{h}{\eta(t)}, & \text{то } 0 \leq y_0(t) \leq 1, \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\begin{cases} < \frac{h}{\eta(t)}, & \text{то } y_0(t) = 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{если } K(t) \begin{cases} > \frac{k}{\xi(t)}, & \text{то } x_0(t) = 1, \\ = \frac{k}{\xi(t)}, & \text{то } 0 \leq x_0(t) \leq 1, \end{cases} \quad (4) \quad (5)$$

$$\begin{cases} < \frac{k}{\xi(t)}, & \text{то } x_0(t) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Заметим особо, что, поскольку функции $H(t)$ и $K(t)$ зависят от решений $x_0(t)$ и $y_0(t)$, необходимо проверить, что вытекающие из метода Неймана—Пирсона характеристики функций совпадают с таковыми для x_0 и y_0 , использованных при вычислении $H(t)$ и $K(t)$.

Говоря точнее, мы должны найти такую пару стратегий x_0 и y_0 , удовлетворяющих условиям (16.5.46), (15.5.56), что, когда $H(t)$ и $K(t)$ вычисляются через x_0 и y_0 , существуют такие постоянные h и k , что x_0 и y_0 , определенные в соответствии с соотношениями (1)–(6), совпадают с исходными x_0 и y_0 . Замечательным является тот факт, что, разумно применяя соотношение Неймана — Пирсона, мы обязательно придем к решению. Применяемые здесь методы были уже продемонстрированы, хотя и менее полно, на решении вариационной задачи (п. 16.2).

Некоторые свойства функций $H(t)$ и $K(t)$.

(1) Так как

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_0^t Q_{y_0}(s) dQ_{x_0}(s) = \\ &= Q_{y_0}(t) Q_{x_0}(t) - Q_{y_0}(0) Q_{x_0}(0) - \int_0^t Q_{x_0}(s) dQ_{y_0}(s), \end{aligned}$$

то

$$H(t) + K(t) = Q_{x_0 y_0}(t).$$

(2) Все функции $H(t)$, $K(t)$, $Q_{x_0}(t)$ и $Q_{y_0}(t)$ дифференцируемы в любой точке непрерывности $x_0(t)$ и $y_0(t)$. Кроме того, они абсолютно непрерывны и не убывают по t . Наконец, поскольку Q_{x_0} и Q_{y_0} неотрицательны, а H и K тоже неотрицательны, из свойства (1) следует, что $H(t)$, $K(t) \leq 1$.

Следующие две леммы и основанные на них замечания подводят итог некоторым основным свойствам оптимальной стратегии, которая выводится с помощью соответствующих преобразований прямо из соотношений (1)–(6). Такие рассуждения типичны для аппарата Неймана — Пирсона, применяемого к нелинейным задачам.

► Лемма 16.5.1. *Существует невырожденный максимальный интервал $[0, t_1]$, на котором $y_0(t) = 0$.*

Доказательство. Достаточно проверить существование невырожденного интервала с этим свойством. Предположим, что такого интервала нет. Тогда для любого $a > 0$ существует такая точка в промежутке $[0, a]$, что $H(t) \geq h/\eta(t)$. Так как H и η непрерывны, $H(0) \geq h/\eta(0) > 0$, что противоречит очевидному факту $H(0) = 0$.

► Лемма 16.5.2. *На $[0, t_1]$ должно быть $x_0(t) = 1$.*

Доказательство. Из леммы 16.5.1 и соотношения (16.5.7) следует, что в промежутке $[0, t_1]$ $K(t) = Q_{x_0}(0) Q_{y_0}(0)$.

Если

$$Q_{x_0}(0) Q_{y_0}(0) \leq \frac{k}{\xi(0)},$$

то, поскольку $\xi(t)$ возрастает,

$$K(t_1) = Q_{x_0}(0) Q_{y_0}(0) < \frac{k}{\xi(t_1)}.$$

Из непрерывности этих двух функций следует, что неравенство должно выполняться также на интервале $[t_1, t_1 + \delta]$, где $\delta > 0$. Тогда на $[0, t_1 + \delta]$ по условию (6) $x_0(t) = 0$ и, следовательно, в силу равенства (16.5.6) $H(t) = 0$. Так как h должно быть больше нуля, то $H(t) < h/\eta(t)$ и $y_0(t) = 0$ на $[0, t_1 + \delta]$, что противоречит выбору t_1 . Таким образом $K(0) > k/\xi(0)$.

Так как функции непрерывны, существует максимальный интервал $[0, t_2]$, на котором $K(t) > k/\xi(t)$ и, следовательно, на $[0, t_2]$ по условию (4) $x(t) = 1$. Лемма будет доказана, если мы сможем показать, что $t_2 \geq t_1$. Предположим, что $t_2 < t_1$. Тогда на (t_2, t_1) $K(t) < k/\xi(t)$, поскольку $K(t_2) = k/\xi(t_2)$ и $\xi(t)$ убывает. Следовательно, $x_0(t) = 0$ (t_2, t_1) . Тогда

$$\frac{h}{\eta(t_1)} > \frac{h}{\eta(t_2)} \geq H(t_2) = H(t_1).$$

Последнее неравенство требует, ввиду условия (3), чтобы в окрестности t_1 выполнялось равенство $y_0(t) = 0$, а это противоречит выбору t_1 . Таким образом, лемма доказана.

Из условия ясно, что, поскольку $\eta(t)$ и $\xi(t)$ стремятся к нулю, а H и K ограничены, функции $x_0(t)$ и $y_0(t)$ должны быть тождественно равны нулю, по крайней мере для интервала вида $[t_0, \infty]$.

Наконец, если на некотором интервале $H(t) \equiv h/\eta(t)$, то дифференцированием мы получаем, что

$$Q_{y_0}(t) Q_{x_0}(t) x_0(t) \xi(t) = - \frac{h\eta'(t)}{\eta^2(t)} \quad (16.5.8)$$

там, где η' существует, т. е. почти всюду. Таким образом, в этом интервале $x_0(t) > 0$. Если в этом интервале

$$- \frac{\eta'(t)}{\eta(t) \xi(t)} < 1,$$

то $x_0(t)$ не может быть равным 1. Действительно, если $x_0(t) = 1$, то

$$K(t) \geq \frac{k}{\xi(t)}$$

и, следовательно,

$$K(t) + H(t) = Q_{x_0}(t) Q_{y_0}(t) \geq \frac{k}{\xi(t)} + \frac{h}{\eta(t)}.$$

Но в силу равенства (16.5.8)

$$Q_{y_0} Q_{x_0} = \frac{-\eta'(t) h}{\xi(t) \eta^2(t)} < \frac{h}{\eta(t)}.$$

Мы получили противоречие, которое и доказывает наше утверждение. Таким образом, когда

$$-\frac{\eta'(t)}{\eta(t)\xi(t)} < 1,$$

из соотношения $H(t) \equiv h/\eta(t)$ следует, что $K(t) \equiv k/\xi(t)$; кроме того в этом случае

$$Q_{x_0} Q_{y_0} y_0(t) \eta(t) = -\frac{k\xi'(t)}{\xi^2(t)}$$

там, где существует ξ' . Из этого, а также из равенства (16.5.8) и того факта, что $Q_{x_0} Q_{y_0} = h/\eta + k/\xi$, следует, что

$$x_0 = -\frac{\lambda\eta'(t)}{\eta(\lambda\xi + \eta)}, \quad y_0 = -\frac{\xi'(t)}{(\lambda\xi + \eta)\xi},$$

когда соответственно существуют η' и ξ' , а $\lambda = h/k$.

Решение. Анализ игры (16.5.2) подразделяется на исследование многочисленных случаев, в каждом из которых решения имеют различный вид, который сильно зависит также от природы функций $\xi(s)$ и $\eta(s)$. Мы опишем здесь один тип решения и определим достаточные условия на ξ и η , обеспечивающие его оптимальность.

Мы будем рассматривать решения следующего вида:

$$\text{на } [0, t_1] \begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 0, \end{cases} \quad \text{на } (t_1, t_2) \begin{cases} x_0 \neq 0, \\ y_0 \neq 0, \end{cases} \quad \text{на } [t_2, \infty) \begin{cases} x_0 = 0, \\ y_0 = 0. \end{cases} \quad (16.5.9)$$

Такое решение полностью соответствует утверждениям лемм 16.5.1 и 16.5.2. Если решение вида (16.5.9) существует, то должно быть

$$H(t_2) = \frac{h}{\eta(t_2)} \quad \text{и} \quad K(t_2) = \frac{k}{\xi(t_2)}$$

и, следовательно, ввиду условия (1) и природы стратегий в интервале $[t_2, \infty)$

$$\frac{k}{\xi(t_2)} + \frac{h}{\eta(t_2)} = 1.$$

Другое необходимое условие состоит в том, чтобы

$$H(t_1) = \frac{h}{\eta(t_1)}.$$

Нам будет необходима формула

$$\begin{aligned} K(t_1) &= Q_{x_0 y_0}(0) = Q_{x_0}(t_1) Q_{y_0}(t_1) \exp\left(-\int_0^{t_1} \xi(s) ds\right) = \\ &= [K(t_1) + H(t_1)] \exp\left(-\int_0^{t_1} \xi(s) ds\right). \end{aligned}$$

Требуя также, чтобы в интервале (t_1, t_2) x_0 было строго меньше 1, мы получаем дополнительное необходимое условие $K(t_1) = k/\xi(t_1)$, и последнее уравнение может быть записано так:

$$\frac{k}{\xi(t_1)} = \left(\frac{k}{\xi(t_1)} + \frac{h}{\eta(t_1)} \right) \exp \left(- \int_0^{t_1} \xi(s) ds \right).$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{h}{k} = \frac{\eta(t_1)}{\xi(t_1)} \left(\exp \left(\int_0^{t_1} \xi(s) ds \right) - 1 \right). \quad (16.5.10)$$

Наложим теперь на $\xi(t)$ и $\eta(t)$ последнее ограничение. Мы постулируем, что

$$\int_0^{\infty} \frac{-\xi'(t)}{\xi(t)\eta(t)} dt > \beta \quad (16.5.11)$$

и что на бесконечном интервале

$$\frac{-\xi'(t)}{\eta(t)\xi(t)} < 1, \quad \frac{-\eta'(t)}{\eta(t)\xi(t)} < 1; \quad (16.5.12)$$

например,

$$\eta(t) = \xi(t) = \frac{1}{(1+t)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

По-видимому, все сделанные предположения являются более сильными, чем это необходимо для существования решения, указанного в соотношениях вида (16.5.9). Однако они дают нам явно сформулированные достаточные условия, которые приводят к паре оптимальных стратегий (см. также задачу 8).

Предполагая, что гипотеза справедлива, мы определим постоянные t_1 и t_2 так, что оптимальные стратегии будут иметь вид

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, & x_0 &= 1 & \text{для } t \in [0, t_1], \\ y_0 &= \frac{-\xi'(t)}{\xi(t)(\lambda\xi + \eta)}, & x_0 &= \frac{-\lambda\eta'(t)}{\eta(t)(\lambda\xi + \eta)} & \text{для } t \in (t_1, t_2), \\ y_0 &= 0, & x_0 &= 0 & \text{для } t \in [t_2, \infty], \end{aligned} \quad (A)$$

где λ вычисляется на основании выражения (16.5.10).

Решение этого вида должно удовлетворять следующим ограничениям:

$$t_1 + \int_{t_1}^{t_2} \frac{-\eta'(t)\lambda}{\eta(t)(\lambda\xi + \eta)} dt = \alpha, \quad (16.5.13)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{-\xi'(t)}{\xi(t)(\lambda\xi + \eta)} dt = \beta. \quad (16.5.14)$$

Чтобы проверить существование значений t_1 и t_2 , удовлетворяющих этим уравнениям, мы поступим следующим образом: для каждого $t_1 < \alpha$ определим с помощью равенства (16.5.10) число λ , а затем вычислим t_2 так, чтобы удовлетворить равенству (16.5.13). В частности, если $t_1 = \alpha$, то $t_2 = \alpha$, а если $t_1 \rightarrow 0$, то $\lambda \rightarrow 0$ и $t_2 \rightarrow \infty$. Следовательно (по непрерывности), в интервале $[0, \alpha]$ найдется такое t_1 , что существует значение t_2 , удовлетворяющее как (16.5.13), так и (16.5.14). Величины h и k затем определяются из условий $H(t_1) = h/\eta(t_1)$ и $K(t_1) = k/\xi(t_1)$.

Остается проверить, что описанные выше оптимальные стратегии x_0 и y_0 с этими параметрами приводят к тем же значениям x_0 и y_0 в соотношениях (1) — (6). Так как для $0 \leq t < t_1$ $K(t) \equiv \text{const}$, мы находим, что в этом интервале $K(t) > k/\xi(t)$, причем в точке t_1 имеет место равенство.

Легко показать, что в том же интервале $H(t) < h/\eta(t)$ с равенством в точке t_1 . Доказательство состоит в следующем. Несомненно, что $H(0) = 0 < h/\eta(0)$. Предположим, что существует такое $t^* < t_1$, что $H(t^*) \geq h/\eta(t^*)$. Тогда

$$H(t^*) + K(t^*) \geq \frac{h}{\eta(t^*)} + \frac{k}{\xi(t_1)} \geq \frac{h}{\eta(t^*)} + \frac{k}{\xi(t^*)}. \quad (16.5.15)$$

Следующая цепочка неравенств

$$H'(t^*) = (H + K)'(t^*) \geq \left(\frac{h}{\eta(t^*)} + \frac{k}{\xi(t^*)} \right) \xi'(t^*) > \frac{-h\eta'(t^*)}{\eta^2(t^*)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{h}{\eta(t)} \right) \Big|_{t^*}$$

вытекает последовательно из использования свойства (1) (стр. 648) и соотношений (16.5.15) и (16.5.12). В силу двух крайних неравенств мы заключаем, что если $H(t^*) \geq h/\eta(t^*)$, то для $t_1 \geq t > t^*$ выполняется строгое неравенство, что противоречит равенству $H(t_1) = h/\eta(t_1)$. Следовательно, при $t \in [0, t_1]$ $H(t) < h/\eta(t)$, что и утверждалось.

На интервале $[t_1, t_2]$ мы имеем тождественно $H(t) = h/\eta(t)$ и $K(t) = k/\xi(t)$. Наконец, поскольку функции $H(t)$ и $K(t)$ при $t < t_2$ постоянны, мы находим, что для $t > t_2$

$$H(t) < \frac{h}{\eta(t)}, \quad K(t) < \frac{k}{\xi(t)}.$$

Мы доказали, что соотношения (A) определяют те же стратегии x_0 и y_0 , что и условия (1) — (6); следовательно, стратегия x_0 и y_0 оптимальны. Более того, нетрудно доказать, что эти оптимальные стратегии единственны.

Анализ, проведенный выше, справедлив всегда, когда x_0 и y_0 лежат между 0 и 1 в интервале (t_1, t_2) и выполняются ограничения (16.5.13), (16.5.14). Если эти требования не удовлетворяются, то можно применить аналогичные рассуждения, видоизменив их надлежащим образом (см. задачу 7).

16.6. Задачи

1. Доказать, что

$$\mu = 2 \int_0^1 (1 - \xi) \varphi(\xi) d\xi - \left(\int_0^1 \varphi(\xi) d\xi \right)^2 \geq 0.$$

Функция φ монотонно возрастает, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$.

Указание: использовать лемму Неймана — Пирсона для минимизации функционала

$$2 \int_0^1 (1 - \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

где предполагается, что $\int_0^1 \varphi(\xi) d\xi = \alpha$ имеет заданное значение; позволить затем величине α изменяться.

2. Использовать метод Неймана — Пирсона для решения вариационной задачи

$$\min_L \int_0^1 [L(t) - t]^2 dt,$$

где $0 \leq L(t) \leq 1$ и

$$\int_0^1 L(t) dt = p \quad (0 < p < 1).$$

3. Применить аппарат п. 16.2 для нахождения

$$\max_{\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} p(t) [1 - e^{-\varphi(t)}] dt \quad \left(p(t) > 0, \int_{-\infty}^{\infty} p(t) dt < \infty \right),$$

где на φ наложены условия

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \alpha \quad (\alpha > 0).$$

4. Решить задачу 3 с другими ограничениями:

$$\varphi(t) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \varphi(t) dt = \alpha \quad (\alpha > 0),$$

причем функция $h(t)$ положительна и интегрируема на ограниченных множествах, а функционал, который нужно максимизировать, равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t) [1 - e^{-g(t) \varphi(t)}] dt,$$

где функция $g(t)$ ограничена. Предположить, что множество $\{t \mid g(t) > 0\}$ имеет положительную меру Лебега.

5. *Задача поиска.* Предмет находится в ящике i ($i = 1, 2, \dots, k$) с вероятностью p_i в момент t , где t равномерно распределено в $[0, N]$. Нам разрешено искать предмет N раз, открывая каждый раз любой ящик, т. е. план поиска состоит в определении N моментов времени и такого же количества соответствующих этим моментам ящиков. Выигрыш равен $g(t)$, где t — время от начала поиска до обнаружения; $g'(t) < 0$.

(а) Показать, что в оптимальном плане поиска (план, который максимизирует ожидаемый выигрыш) вскрытия данного ящика распределены равномерно.

(б) Пусть m_i — интервал времени между вскрытиями i -го ящика, а n_i — число вскрытий ящика i , т. е. $m_i = N/n_i$.

Доказать, что ожидаемый выигрыш для такой тактики поиска равен

$$F = \sum_{i=1}^k p_i \frac{G(m_i)}{m_i}, \quad (*)$$

где $G(t) = \int_0^t g(u) du$, а числа m_i удовлетворяют равенству

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i} = 1. \quad (**)$$

(Эта задача может быть интерпретирована иначе и связана с задачей определения оптимальной стратегии просмотра неба, которая обнаруживает приближающийся снаряд в наиболее ранний возможный момент.)

6. Использовать метод п. 16.2 для определения чисел m_i , которые максимизируют выигрыш (*), где m_i подчинены ограничению $1/N \leq 1/m_i \leq 1$ и удовлетворяют соотношению (**). При этом, конечно, окажутся допустимыми решения, в которых числа n_i не целые; однако одновременно мы получим верхнюю границу для возможного выигрыша в „реализуемом“ плане поиска.

7. Наложить на α и β условия, которые гарантируют существование пары оптимальных стратегий в дуэли двух пулеметчиков следующего вида:

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \alpha, \\ 0, & t > \alpha, \end{cases} \quad y_0(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < t_0, \\ 1, & t_0 < t < t_0 + \beta, \\ 0, & t_0 + \beta < t, \end{cases}$$

где $t_0 < \alpha$, $t_0 + \beta > \alpha$ и $\xi(t) = \eta(t) = e^{-t}$.

8. Показать, что решение дуэли двух пулеметчиков вида (А) (п. 16.5) всегда справедливо, если существует положительное значение $\bar{t}$, удовлетворяющее неравенствам

$$\bar{t} > \alpha, \quad \xi(\bar{t}) < \xi(0) \exp[-\alpha\xi(0) - \alpha\eta(0) - \beta\eta(0)],$$

и на $[0, \bar{t}]$

$$\frac{-\xi'(t)}{\xi(t)\eta(t)} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{-\eta'(t)}{\xi(t)\eta(t)} < 1.$$

В задачах 9—11 мы рассмотрим игру с ядром

$$K(\varphi, \psi) = \int_0^1 f(t) \varphi(t) \psi(t) dt$$

(предположим, что функция $f(t) > 0$ непрерывна и строго возрастает), где пространства стратегий определены неравенствами

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1, \quad 0 \leq \psi(t) \leq 1$$

и

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = B, \quad \int_0^1 \psi(t) dt = A \quad (0 \leq A, B \leq 1).$$

Пусть Q и P ($Q \geq P$) — вещественные числа, определенные соотношениями

$$Q + f(P) \int_Q^1 \frac{dt}{f(t)} = A, \quad Q - P + f(Q) \int_Q^1 \frac{dt}{f(t)} = B. \quad (+)$$

9. Показать, что если A и B таковы, что система (+) имеет решение, для которого $1 > Q > P > 0$, то оптимальные стратегии в игре $K(\varphi, \psi)$ равны

$$\psi^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < Q, \\ \frac{l}{f(t)}, & Q < t < 1, \end{cases} \quad \varphi^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < P, \\ 1, & P < t < Q, \\ \frac{k}{f(t)}, & Q < t \leq 1, \end{cases}$$

где $l = f(P)$ и $k = f(Q)$.

Указание: использовать методы, аналогичные методам п. 16.5; в данном случае это проще ввиду линейности ядра.

10. Показать, что если A и B таковы, что система

$$P + f(P) \int_P^1 \frac{dt}{f(t)} = A, \quad f(Q) \int_P^1 \frac{dt}{f(t)} = B \quad (++)$$

имеет решение, для которого $0 \leq Q \leq P \leq 1$, то для $K(\varphi, \psi)$ существует пара оптимальных стратегий вида

$$\psi^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq P, \\ \frac{f(P)}{f(t)}, & P \leq t \leq 1, \end{cases} \quad \varphi^*(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq P, \\ \frac{f(Q)}{f(t)}, & P < t \leq 1. \end{cases}$$

11. Показать, что определенные выше системы уравнений $(+)$ и $(++)$ взаимно исключают друг друга.

12. Применить неравенство Йенсена для выпуклых функций для прямой проверки предполагаемой оптимальности стратегии игрока I в игре п. 16.4.

Комментарии и библиография к главе 16

Многие существенные и важные классы игр на единичном квадрате — особенно игры с выбором момента времени и выпуклые игры — уже решены. Тем не менее в общей теории и в методах решения произвольных игр на единичном квадрате существует много пробелов. Еще меньше известно о классических играх, которые играют на единичном квадрате.

К таким играм относятся дуэли пулеметчиков (п. 16.5), игры типа разведки и общие игры, разыгрываемые на функциональных пространствах. В настоящее время не существует последовательной теории этих игр. Поэтому представляется разумным попытаться проникнуть в природу решений этих игр, обстоятельно рассматривая отдельные примеры. Содержание этой главы может рассматриваться как первый шаг в этом направлении.

16.1. Некоторые утверждают, что на самом деле автором леммы Неймана — Пирсона является Гиббс, но по всей видимости именно Нейман и Пирсон [1] правильно подчеркнули важность этого результата, ставшего теперь классическим.

Геометрическое доказательство, данное в этом параграфе, напоминает аргументацию Данцига и Вальда [1].

16.2. Некоторые авторы использовали лемму Неймана — Пирсона для решения нелинейных вариационных задач, подчиненных линейным ограничениям. В этой связи следует отметить работы Беллмана, Гликсберга и Гросса [1], Данскина [2], Купманса [4], Ф. Прошена (не опубликовано) и Эрроу и Карлина [1] гл. 4—7.

16.3. Первым рассмотрел сформулированную здесь дуэль снайпера с пулеметчиком Вейс в ходе изучения военного снаряжения на испытательном полигоне в Абердине. Интерпретация этой задачи в виде рекламной борьбы была приведена Джилменом [1]. Результаты Вейса были подтвер-

ждены независимо Беллманом и Блекуэллом (не опубликовано), которые, кроме того, нашли оптимальную стратегию снайпера (M в настоящей интерпретации). Позднее Блекуэлл и Шифман [1], [2] обнаружили оптимальную стратегию K (пулеметчик).

16.4. Наш путь нахождения оптимальной стратегии игрока M следует рукописи Беллмана и Блекуэлла. Методы получения оптимальных стратегий игрока II , по-видимому, являются новыми, тесно примыкая к характеристике Неймана — Пирсона.

16.5. Дуэль двух пулеметчиков была сформулирована и частично решена Данскином и Джилменом [2]. Мы рассматриваем здесь случай, не изученный названными авторами.

16.6. Задачи 3 и 4 основываются на работе Купмана [1]. Задача 5 принадлежит Прошену. Задачи 9 и 10 основываются на работе Беллмана и Шифмана [1].

ПОКЕР И ОБЩИЕ САЛОННЫЕ ИГРЫ

Многие искушенные картежники авторитетно заявляют, что из всех карточных игр наибольшего искусства и сообразительности требует покер. Освальд Якоби, чемпион по бриджу, выделяет покер как игру, которая, по его мнению, относится к умению оперировать ставками; в то время как в остальных карточных играх решающим является умение распоряжаться картами. В большинстве игр если противник имеет хороший расклад карт, то против него ничего сделать нельзя; однако это не всегда так в случае покера, где элемент блефа и угроз составляют самую сущность игры.

Для того чтобы стать хорошим игроком в покер, знание математической теории вероятностей необходимо, но не достаточно. Истинный покер представляет собой гармоничное сочетание методов вероятностного анализа, блефа, ошеломляющих угроз, риска, психологии и т. д. Робость или безрассудство, непоследовательность или упрямая логичность характера четко выявляются в ходе этой игры.

Во многих отношениях деловая жизнь, политика и война имеют сходство с покером. Поэтому любые достижения в математическом изучении игр типа покера могут быть интерпретированы во многих сходных жизненных ситуациях.

Страсть играть в азартные игры остается извечной чертой человеческой натуры. Карточные игры являются одним из способов проявления этой страсти. Когда в игру, подобную покеру, играют в течение долгого периода времени, накопленный игроками опыт кристаллизуется в систему эвристических правил игры — собрание практических приемов и трюков, которые были испытаны под огнем и эффективность которых проверена. С помощью этих эвристических правил, с которыми все приверженцы покера более или менее знакомы, мы сможем объяснить в формальных математических терминах природу оптимальных стратегий для некоторых простых вариантов игр типа покера.

В этой главе мы ограничимся рассмотрением покера для двух игроков. Это меньшее ограничение, чем может показаться на первый взгляд, так как в покере для многих игроков можно считать, что

любому из них противостоит лишь один противник, а именно совокупность всех остальных игроков.

Элементы такого простого покера с двумя игроками могут быть описаны следующим образом. отождествим все возможные расклады карт, которые может получить каждый игрок, с точками единичного интервала. Будем считать, что расклад ξ предпочтительнее расклада η тогда и только тогда, когда $\xi > \eta$. Каждому игроку расклад сдается случайно в следующем смысле: игрок I получает случайное значение ξ (свой расклад) в соответствии с распределением $F(\xi)$, а игрок II одновременно и независимо получает случайное значение η (свой расклад) в соответствии с распределением $G(\eta)$, которое может как совпадать с $F(\xi)$, так и не совпадать с ним ($0 \leq \xi, \eta \leq 1$). В начале игры каждый игрок знает только свой собственный расклад. Следуя определенным правилами, игроки совершают в некотором порядке ходы игры (т. е. „ставят“, „пасуют“, „уравнивают“, „повышают“), причем, если каждая новая ставка вызывает соответствующую реакцию, то тот или иной игрок может в течение одной игры ходить и более одного раза. Затем расклады сравниваются, и игрок с высшим раскладом выигрывает банк (т. е. сумму накопленных ставок).

Имеется много вариантов этой игры. К сожалению, вид оптимальных стратегий, очевидно, зависит от специфических черт каждого варианта. Например, мы получаем различные решения в зависимости от того, являются ли ходы в игре одновременными или поочередными, сколько кругов ставок допускается, разрешены ли повышения и т. д. Каждый случай требует особого исследования. Тем не менее в решениях игр типа покера проявляются некоторые общие черты. Более того, в используемых нами здесь приемах решения игр типа покера неявно вырисовывается и общий метод, применяемый к анализу весьма широкого класса игр.

Этот метод применим, если функция выигрыша представляет собой математическое ожидание функции P двух случайных величин ξ и η , при условии, что стратегии игроков I и II можно отождествить соответственно с векторами

$$\varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_m(\xi))$$

и

$$\psi(\eta) = (\psi_1(\eta), \dots, \psi_n(\eta)).$$

(Две стратегии, которые совпадают почти везде, в дальнейшем будут отождествляться.) Эти векторы могут быть подчинены произвольным ограничениям. Распределения F и G величин ξ и η могут быть произвольными; однако в определении стратегий неявно предполагается, что игрок I знает значение ξ , а игрок II знает значение η . В этих играх функция выигрыша будет иметь вид

$$K(\varphi, \psi) = \int \int P[\xi, \eta; \varphi(\xi), \psi(\eta)] dF(\xi) dG(\eta).$$

В большинстве приводимых далее примеров эту функцию мы сможем представить в виде

$$K(\varphi, \psi) = M_1(\psi) + \sum_{i=1}^m \int \varphi_i(\xi) C_{\varphi_i}(\psi; \xi) dF(\xi)$$

или в виде

$$K(\varphi, \psi) = M_2(\varphi) + \sum_{j=1}^n \int \psi_j(\eta) C_{\psi_j}(\varphi; \eta) dG(\eta),$$

где M_1 и M_2 не зависят соответственно от φ и ψ , а C_{φ_i} и C_{ψ_j} обозначают коэффициенты при φ_i и ψ_j в выражениях для $K(\varphi, \psi)$. В этих обозначениях подчеркнут тот факт, что C_{φ_i} и C_{ψ_j} являются функциями соответственно ψ и φ .

Для того чтобы решить эту игру, необходимо и достаточно найти две стратегии φ^* и ψ^* , для которых

$$K(\varphi^*, \psi^*) = \max_{\varphi} \left\{ M_1(\psi^*) + \sum_{i=1}^m \int \varphi_i(\xi) C_{\varphi_i}(\psi^*; \xi) dF(\xi) \right\}$$

и

$$K(\varphi^*, \psi^*) = \min_{\psi} \left\{ M_2(\varphi^*) + \sum_{j=1}^n \int \psi_j(\eta) C_{\psi_j}(\varphi^*; \eta) dG(\eta) \right\}.$$

Каждое из этих равенств представляет собой задачу максимизации или минимизации при некоторых ограничениях. Любую априорную информацию о некотором свойстве оптимальной стратегии, скажем, ψ^* , можно использовать для получения информации о $C_{\varphi_i}(\psi^*, \xi)$, что в свою очередь дает информацию об оптимальной стратегии φ_i^* . Этот процесс можно итерировать до получения оптимальных стратегий, что и является основой нашего метода. Его детали иллюстрируются на протяжении этой главы примерами различной степени сложности.

Основные положения этого метода рассматривались еще в п. 10.5, где он был назван методом неподвижной точки. Его применимость, как мы увидим, весьма широка. Аналогичный искусственный прием использовался нами в анализе дуэли двух пулеметчиков в гл. 16.

Игры с описанным выше ядром $K(\varphi, \psi)$ принадлежат категории I. Хотя они и выходят за рамки стандартных игр на единичном квадрате, но пространства стратегий каждого из игроков, как указывалось, могут быть выражены в терминах известных функциональных пространств и поддаются интерпретации как их элементы.

Для всех таких игр нетрудно доказать существование оптимальных стратегий и справедливость теоремы о минимаксе. Однако для игр,

рассматриваемых в данной главе, мы найдем оптимальные стратегии в явном виде.

В следующих пунктах мы рассмотрим несколько примеров игр типа покера, которые поддаются исследованию с помощью соответствующих видоизменений описанного ранее метода неподвижной точки. Помимо того, что эта глава представляет интерес для изучения самих карточных игр, она важна еще и тем, что иллюстрирует на примерах этот метод и указывает на его очевидную приложимость к общим игровым задачам.

В п. 17.1 мы начнем с рассмотрения простой карточной игры, которая не требует участия двух игроков с противоположными интересами в обычном смысле. Эта модель представляет собой идеализированный вариант игры „черный валет“¹⁾, в котором ходы банкмета определяются последовательностью карт, а не его выбором.

В п. 17.2 мы исследуем простую модель покера, которая допускает только один круг ставок и один размер ставки. В следующем пункте эта модель обобщается на случай n кругов. В этом пункте возможности повышения ставок не рассматриваются.

В п. 17.4 мы рассматриваем модель покера, которая допускает два круга ставок и повышений, причем в каждом круге допускается только один размер ставок. Решение модели покера с k кругами ставок, которая открывает перед каждым игроком несколько возможностей уравнивать, пасовать или повышать, приведено в п. 17.5.

Во всех предыдущих моделях игроки ходили поочередно. В п. 17.6 мы рассматриваем модель покера, в которой ходы одновременны.

Чтобы подчеркнуть приложимость описываемых методов ко многим другим салонным играм, в п. 17.7 анализируется классическая игра „проходящий туз“²⁾, а игра „у кого лучше, тот выигрывает“ разбирается в п. 17.8 (другими примерами являются задачи 11, 12).

17.1. Упрощенная игра „черный валет“. Модель, которую мы рассмотрим в этом пункте, не является игрой в обычном смысле, так как стратегии одного из игроков фиксированы. Тем не менее этот пример представляет собой полезное введение в метод неподвижной точки.

Модель. Каждый из двух игроков, банкмет (Б) и понтирующий (П), получает карту (число из единичного интервала) и, еще не глядя на нее, должен поставить одну единицу денег. После того как игрок П посмотрит на свою карту, перед ним открываются три возможности: он может поставить еще одну единицу, он может поставить еще M единиц (число $M > 1$ фиксировано), или, наконец,

¹⁾ В оригинале blackjack. — *Прим. перев.*

²⁾ В оригинале Le Her game. — *Прим. перев.*

он может спасовать и потерять свою начальную ставку. Игрок Б, однако, выбора не имеет: он всегда должен уравнивать ставку П¹⁾. Если П, вместо того чтобы пасовать, ставит 1 или M добавочных единиц, то оба игрока сравнивают карты, и игрок с младшей картой платит другому величину, равную ставке П (которая включает начальную ставку в одну единицу).

Карта, которую получает П (мы будем ее обозначать через ξ), выбирается случайно, в соответствии с распределением $F(\xi)$. Карта η , которую Б извлекает для себя, реализуется согласно распределению $G(\eta)$. Обе функции $F(\xi)$ и $G(\eta)$ определены на единичном интервале; предполагается (только для удобства), что они являются непрерывными и строго возрастающими.

Стратегии игрока П можно описать в терминах следующих функций: $\varphi_1(\xi)$ представляет собой вероятность того, что он поставит одну добавочную единицу; $\varphi_2(\xi)$ — вероятность того, что он поставит M добавочных единиц; следовательно, величина $1 - \varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)$ представляет собой вероятность того, что он спасует; обозначая через $L(\xi, \eta)$ знак разности $\xi - \eta$, т. е.

$$L(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi > \eta, \\ 0, & \text{если } \xi = \eta, \\ -1, & \text{если } \xi < \eta, \end{cases}$$

мы заключаем, что ожидаемый выигрыш П равен

$$\begin{aligned} K(\varphi_1, \varphi_2) = & (-1) \int [1 - \varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)] dF(\xi) + \\ & + 2 \int \int \varphi_1(\xi) L(\xi, \eta) dF(\xi) dG(\eta) + \\ & + (M+1) \int \int \varphi_2(\xi) L(\xi, \eta) dF(\xi) dG(\eta). \end{aligned}$$

Так как

$$\int L(\xi, \eta) dG(\eta) = 2G(\xi) - 1,$$

мы можем написать

$$\begin{aligned} K(\varphi_1, \varphi_2) = & -1 + \int \varphi_1(\xi) [4G(\xi) - 1] dF(\xi) + \\ & + \int \varphi_2(\xi) \{1 + (M+1)[2G(\xi) - 1]\} dF(\xi). \end{aligned}$$

Поскольку Б не имеет выбора стратегий, оптимальный способ поведения для П состоит в выборе им таких функций $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$, которые максимизируют $K(\varphi_1, \varphi_2)$ при ограничениях $\varphi_i(\xi) \geq 0$ и

¹⁾ Подчеркнем, что здесь мы имеем дело с процессом принятия решения, не связанным с игрой в математическом понимании этого термина — *Прим. ред.*

$0 \leq \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) \leq 1$. Очевидно, что мы должны положить $\varphi_i(\xi) = 1$ для тех значений ξ , для которых коэффициент при φ_i наибольший и положительный. Эти два коэффициента равны в том случае, когда

$$4G(\xi) - 1 = 1 + (M + 1)[2G(\xi) - 1],$$

или

$$2[2G(\xi) - 1] = (M + 1)[2G(\xi) - 1].$$

Поскольку $M + 1 > 2$, это равенство эквивалентно требованию $2G(\xi) - 1 = 0$. Пусть ξ_0 — корень этого уравнения; если $\xi > \xi_0$, то

$$1 + (M + 1)[2G(\xi) - 1] \geq 4G(\xi) - 1 > 0.$$

Следовательно, если $\xi > \xi_0$, то оптимальность стратегии требует, чтобы выполнялось равенство $\varphi_2(\xi) = 1$.

Определим теперь a_0 как единственное решение уравнения $4G(\xi) = 1$. Очевидно, что $a_0 < \xi_0$. Кроме того, при $a_0 < \xi < \xi_0$ коэффициент при φ_1 больше коэффициента при φ_2 , а значит он и подавно положителен. Следовательно, в условиях оптимальной стратегии при $a_0 < \xi < \xi_0$ мы имеем $\varphi_1(\xi) = 1$. Наконец, если $\xi < a_0$, то понтирующий должен пасовать.

В том частном случае, когда $F(\xi) = G(\xi) = \xi$ (равномерное распределение), оптимальная стратегия для П сводится к следующему: если $\xi < 1/4$, то он пасует; если $1/4 \leq \xi < 1/2$, он повышает ставку на единицу; если $1/2 \leq \xi < 1$, — на M единиц.

Интересная общая характеристика оптимальной стратегии состоит в том, что она не зависит от M , коль скоро M больше единицы.

Обобщение. Более общий вариант описанной модели состоит в следующем. Игра начинается после того, как каждый игрок делает начальную единичную ставку; после этого они получают соответственно карты ξ_1 и η_1 . П может или спасовать и потерять свою начальную ставку, или поставить величину $f(\xi_1)$, удовлетворяющую условию $1 \leq f(\xi_1) \leq M$; если П ставит, то Б не имеет выбора: он должен уравнивать ставку. После этого игроки получают новые карты, соответственно ξ_2 и η_2 . Теперь П может либо поставить величину $f(\xi_2)$ [$1 \leq f(\xi_2) \leq M$], либо спасовать и потерять $1 + f(\xi_1)$. Если П ставит, то Б снова должен уравнивать. Игра продолжается таким образом N шагов, после чего, если П все еще не спасовал, расклады сравниваются. При этом П выигрывает общее количество

$$1 + \sum_{i=1}^N f(\xi_i),$$

если

$$\sum_{i=1}^N \xi_i > \sum_{i=1}^N \eta_i.$$

Если имеет место противоположное неравенство, то Π теряет эту же сумму. Задача состоит в максимизации ожидаемого выигрыша Π .

Качественно можно суммировать результаты следующим образом: Π пасует при слишком плохом раскладе; Π ставит минимальную величину 1 при среднем раскладе; Π ставит максимальную M при хорошем раскладе; квалификация раскладов как плохого, среднего и хорошего не зависит от верхней границы M .

Доказательства и анализ выводов, получаемых для этой модели, здесь не будут излагаться; мы, однако, проанализируем аналогичную игру, сходную с классической игрой „красная собака“.

Игра происходит следующим образом. Имеется N игроков ($N > 1$). Банкомет сдает себе и каждому из остальных игроков по четыре карты. Перед началом партии каждый игрок ставит начальную (единичную) ставку, так что в банке оказывается N единиц. Посмотрев на свои карты, каждый игрок, по очереди, может выбрать одну из двух альтернатив: спасовать или поставить величину f ($1 \leq f \leq N$), которой он отвечает за обязательство побить своей картой надлежащей масти следующую карту, которую банкомет извлечет из колоды. Если он сможет это сделать, то он выигрывает из банка величину f ; в противном случае он вносит f в банк. Следующий игрок имеет аналогичный выбор, с той разницей, что верхней границей является размер банка, так что если предыдущий игрок поставил и проиграл f , то новой верхней границей является число $N + f$. Как только величина банка становится меньше N , каждый игрок вносит еще по единице; следовательно, если первый игрок поставил f и выиграл, то новой верхней границей стала величина $2N - f$.

Каждый игрок видит самое большее одну карту из расклада любого другого игрока, поскольку правила таковы, что проигравший игрок бросает свои карты лицом вниз, а выигравшему игроку необходимо показать лишь карту, с помощью которой он выиграл. Мы будем игнорировать в последующем изложении дополнительную информацию, которую можно получить этим способом, а также тот факт, что верхняя граница ставок может значительно превзойти N .

Рассмотрим следующий простой абстрактный вариант этой игры. Имеются два игрока Π и Б . Игроку Π дается „расклад“, т. е. точка $c = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ в положительном единичном кубе E^n , где функции распределения величин $\xi_1, \dots, \xi_n$ известны. Игроку Б сдается „случайная карта“ z ($0 \leq z \leq 1$), функцией распределения которой является G ; эта карта z с вероятностью p_i сравнивается с ξ_i для того, чтобы определить исход игры. Как Π , так и Б делают начальную ставку в одну единицу, после чего Π может поставить величину $f(c)$ [$1 \leq f(c) \leq M$], выигрывая, если $z \leq \xi_i$, и проигрывая, если $z > \xi_i$. Задача состоит в определении оптимальной стратегии игрока Π .

Всякая стратегия Π состоит в следующем: пасовать, если c находится в некоторой области R , и ставить, если c вне R . Если F_i — распределение величины ξ_i , то ожидаемый выигрыш есть

$$\begin{aligned} E(\Pi) &= - \int \prod_{c \in R} \prod_{i=1}^n dF_i + \sum_{i=1}^n p_i \int_{\substack{c \in I \setminus R \\ \xi_i \geq z}} [1 + f(c)] \prod_{i=1}^n dF_i(\xi_i) dG(z) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n p_i \int_{\substack{c \in I \setminus R \\ \xi_i < z}} [1 + f(c)] \prod_{i=1}^n dF_i(\xi_i) dG(z) = \\ &= - \int \prod_{c \in R} \prod_{i=1}^n dF_i + \int_{c \in I \setminus R} [1 + f(c)] \left(\sum_{i=1}^n p_i [2G(\xi_i) - 1] \right) \prod_{i=1}^n dF_i, \end{aligned} \quad (17.1.1)$$

где I означает единичный куб, а $c \in R$ означает, что точка c содержится в R . Но

$$- \int \prod_{c \in R} \prod_{i=1}^n dF_i = -1 + \int_{c \in I \setminus R} \prod_{i=1}^n dF_i.$$

Подставляя это выражение в (17.1.1), мы получаем

$$E(\Pi) = -1 + \int_{c \in I \setminus R} \left([1 + f(c)] \sum_{i=1}^n p_i [2G(\xi_i) - 1] + 1 \right) \prod_{i=1}^n dF_i.$$

Так как наименьшая ставка, которую можно сделать, есть $f(c) = 1$, мы можем заключить, что область ставок должна состоять из множества точек, для которых

$$2 \left(\sum_{i=1}^n p_i [2G(\xi_i) - 1] \right) + 1 \geq 0. \quad (17.1.2)$$

После того, как мы определили область повышения ставок $I \setminus R$, мы должны определить величину ставок в этой области. Так как R фиксировано, из соотношения (17.1.1) следует, что для максимизации ожидаемого выигрыша Π должен ставить $f(c) = M$ в области, в которой коэффициент при $f(c)$ положителен, т. е. в подобласти S области $I \setminus R$, в которой

$$\sum_{i=1}^n p_i [2G(\xi_i) - 1] > 0. \quad (17.1.3)$$

В остальной части $I \setminus R$ ставка должна быть $f(c) = 1$.

Применение к игре „красная собака“. Рассмотрим тот частный случай, когда величины ξ_i распределены равномерно, величина z также распределена равномерно, и $p_i = 1/4$ в соответствии с наличием четырех мастей. Область пасования R , согласно (17.1.2), есть область, в которой

$$0 \geq 1 + 2 \sum_{i=1}^4 p_i [2G(\xi_i) - 1] = \sum_{i=1}^4 \xi_i - 1.$$

Часть дополнительной области, в которой должна производиться максимальная ставка, есть подобласть, в которой

$$0 \leq \sum_{i=1}^4 p_i [2G(\xi_i) - 1] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \xi_i - 1.$$

В реальной игре „красная собака“¹⁾ $dF_i = 0$, за исключением точек

$$-\frac{k}{13} \quad (k = 1, 2, \dots, 13).$$

Мы пренебрегли в нашем анализе возможностью того, что в раскладе та или иная масть может отсутствовать вовсе.

17.2. Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки. Модель, рассматриваемая в этом пункте, представляет собой частный случай модели, допускающей n возможных размеров ставки, которая изучается в п. 17.3.

Модель. В начале партии каждый из двух игроков A и B ставит по единице. После того как каждый из игроков получит карту, первым ходит A : он может или поставить еще a единиц, или спасовать и потерять свою начальную ставку. Если A ставит, то B имеет на выбор две альтернативы: он может или спасовать (теряя при этом свою начальную ставку), или уравнивать, поставив a единиц. Если B уравнивает, то игроки открывают свои карты и игрок с лучшей картой выигрывает банк.

Будем обозначать карту A через ξ , а карту B через η . При этом предполагается, что величины ξ и η имеют равномерное распределение на единичном интервале. Мы, как и раньше, будем полагать $L(\xi, \eta) = \text{sign}(\xi - \eta)$.

Стратегии и выигрыши. Стратегии строятся так. Пусть $\varphi(\xi)$ — вероятность того, что если A получит ξ , то он поставит a ; $1 - \varphi(\xi)$ — вероятность того, что если A получит ξ , то он спасует;

¹⁾ То есть разыгрываемой с обычной колодой в 52 карты. — *Прим. перев.*

$\psi(\eta)$ — вероятность того, что если B получит η , то он уравнивает ставку A ;

$1 - \psi(\eta)$ — вероятность того, что если B получит η , то он спасует.

Если игроки применяют эти стратегии, то ожидаемый чистый выигрыш $K(\varphi, \psi)$ представляет собой сумму выигрышей, соответствующих трем взаимно исключающим возможностям: A пасует; A ставит a единиц и B уравнивает; A ставит и B пасует. Следовательно,

$$K(\varphi, \psi) = (-1) \int [1 - \varphi(\xi)] d\xi + (a+1) \int \int \varphi(\xi) \psi(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ + \int \int \varphi(\xi) [1 - \psi(\eta)] d\xi d\eta.$$

Выигрыш игрока A можно более прозрачно записать так:

$$K(\varphi, \psi) = -1 + \int_0^1 \varphi(\xi) \left(2 + a \int_0^\xi \psi(\eta) d\eta - (a+2) \int_\xi^1 \psi(\eta) d\eta \right) d\xi \quad (17.2.1)$$

или

$$K(\varphi, \psi) = -1 + 2 \int_0^1 \varphi(\xi) d\xi + \\ + \int_0^1 \psi(\eta) \left(-(a+2) \int_0^\eta \varphi(\xi) d\xi + a \int_\eta^1 \varphi(\xi) d\xi \right) d\eta. \quad (17.2.2)$$

Метод анализа. Мы начнем с замечания о том, что существование пары оптимальных стратегий эквивалентно существованию двух функций φ^* и ψ^* , удовлетворяющих неравенствам

$$K(\varphi, \psi^*) \leq K(\varphi^*, \psi^*) \leq K(\varphi^*, \psi) \quad (17.2.3)$$

для всех стратегий φ и ψ . Таким образом, φ^* максимизирует $K(\varphi, \psi^*)$, в то время как ψ^* минимизирует $K(\varphi^*, \psi)$. Поэтому мы будем искать стратегию φ^* , которая максимизирует выигрыш (17.2.1), где ψ заменено на ψ^* ; точно так же мы будем искать стратегию ψ^* , которая минимизирует выигрыш (17.2.2), где φ заменено на φ^* . Так как постоянные слагаемые не играют роли, задача состоит здесь в том, чтобы найти экстремумы:

$$\max_{\varphi} \int_0^1 \varphi(\xi) \left(2 + a \int_0^\xi \psi^*(\eta) d\eta - (a+2) \int_\xi^1 \psi^*(\eta) d\eta \right) d\xi \quad (17.2.4)$$

и

$$\min_{\psi} \int_0^1 \psi(\eta) \left(-(a+2) \int_0^\eta \varphi^*(\xi) d\xi + a \int_\eta^1 \varphi^*(\xi) d\xi \right) d\eta. \quad (17.2.5)$$

Трудность задачи состоит в том, чтобы проверить совместность наших результатов, т. е. что функция φ^* , которая максимизирует величину (17.2.4), есть та же самая функция φ^* , которая входит в выражение (17.2.5), и аналогично для ψ^* ; если эти утверждения верны, то выполнено соотношение (17.2.3), и мы нашли решение игры.

Здесь интуитивные соображения подсказывают вид решения, которое мы ищем. Так как игрок B не имеет возможности блефовать, то $\psi^*(\eta) = 1$ для значений η , больших, чем некоторое критическое число c , и $\psi^*(\eta) = 0$ в противном случае; кроме того, поскольку B — минимизирующий игрок, функция $\psi^*(\eta)$ должна быть равна 1, если коэффициент при $\psi(\eta)$ в выражении (17.2.5) отрицателен. Но этот коэффициент представляет собой убывающую функцию η ; поэтому c есть то значение, при котором она впервые обращается в нуль. Следовательно,

$$-(a+2) \int_0^c \varphi^*(\xi) d\xi + a \int_c^1 \varphi^*(\xi) d\xi = 0. \quad (17.2.6)$$

При таком выборе $\psi^*(\eta)$ мы находим, что коэффициент при $\varphi(\xi)$ в выражении (17.2.4) для $\xi \leq c$ равен постоянной. Если мы предположим, что эта постоянная равна нулю, то получим при $\xi = c$

$$2 + 0 - (a+2)(1-c) = 0,$$

или

$$c = \frac{a}{a+2}. \quad (17.2.7)$$

Причина, по которой мы определили постоянную c так, чтобы обратить в нуль коэффициент в интервале $[0, c]$, состоит в следующем. При нахождении максимума (17.2.4) мы, очевидно, вынуждены положить $\varphi^*(\xi) = 1$, если коэффициент при этой функции положителен, и $\varphi^*(\xi) = 0$, если этот коэффициент отрицателен. Произвол в значениях $\varphi^*(\xi)$ допускается только в тех случаях, когда соответствующий коэффициент равен нулю. Но мы ожидаем, что A будет пытаться частично блефовать, имея на руках плохую карту, откуда следует, что для этих раскладов $\varphi^*(\xi)$, вероятно, удовлетворяет условию $0 < \varphi^*(\xi) < 1$. Как указывалось, это допустимо, если коэффициент при $\varphi(\xi)$ равен нулю. При определении c , согласно соотношению (17.2.7), коэффициент при $\varphi(\xi)$ в выражении (17.2.4) равен нулю для $\xi \leq c$ и положителен для $\xi > c$. В этих условиях из (17.2.4) следует, что максимизирующий игрок вынужден иметь $\varphi^*(\xi) = 1$ для $\xi > c$, в то время как значения $\varphi^*(\xi)$ для $\xi \leq c$ могут быть произвольны, ибо они не влияют на выигрыш. Однако для того, чтобы

равенство (17.2.6) при таком выборе φ^* удовлетворялось, мы должны иметь

$$-(a+2) \int_0^c \varphi^*(\xi) d\xi + a(1-c) = 0,$$

или

$$\int_0^c \varphi^*(\xi) d\xi = \frac{a(1-c)}{a+2} = \frac{2a}{(a+2)^2},$$

и это условие может быть выполнено при $\varphi^*(\xi) < 1$. Теперь легко проверить, что если

$$\psi^*(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \eta \leq \frac{a}{a+2}, \\ 1 & \text{при } \frac{a}{a+2} < \eta \leq 1 \end{cases}$$

и

$$\varphi^*(\xi) = \begin{cases} \text{произвольна между 0 и 1, но удовлетворяет условиям} \\ \int_0^c \varphi^*(\xi) d\xi = \frac{2a}{(a+2)^2} & \text{при } 0 \leq \xi \leq \frac{a}{a+2}, \\ 1 & \text{при } \frac{a}{a+2} < \xi < 1, \end{cases}$$

то φ^* максимизирует (17.2.4) для ψ^* , а ψ^* минимизирует (17.2.5) для φ^* .

Некоторый интерес представляет следующая интерпретация решения:

1) оба игрока при высоких картах делают ставку или уравнивают. Особое значение имеет тот факт, что оба игрока используют одну и ту же критическую точку $a/(a+2)$ для того, чтобы различать хорошие и плохие карты;

2) элемент блефа для игрока I проявляется только в том, что определена доля карт, на которой он мог бы блефовать; он может выбрать фактическую карту произвольно из промежутка $[0, a/(a+2)]$ при единственном ограничении

$$\int_0^{a/(a+2)} \varphi^*(\xi) d\xi = \frac{2a}{(a+2)^2}.$$

17.3. Модель покера с несколькими размерами ставки. Излагаемая в этом пункте модель представляет собой обобщение только что рассмотренной. Этот же пример ранее был описан в пункте 10.4.

Как и раньше, в качестве представления всех возможных раскладов, которые могут быть сданы игроку, берется единичный интервал. Все расклады считаются равновероятными, так что операция сдачи расклада игроку может считаться эквивалентной выбору случайного числа из единичного интервала согласно равномерному распределению. Естественно, расклад ξ_1 считается ниже расклада ξ_2

тогда и только тогда, когда $\xi_1 < \xi_2$. Игра происходит следующим образом. Два игрока A и B выбирают соответственно точки ξ и η из единичного интервала согласно равномерному распределению. Оба игрока ставят по одной единице. Игрок A , зная свое значение ξ , ходит первым и имеет возможность либо сразу спасовать, теряя свою ставку в пользу игрока B , либо поставить любую из величин $a_1, a_2, \dots, a_n$, где $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Игрок B должен в ответ или сразу спасовать, или уравнивать ставку. В первом случае игрок A выигрывает ставку игрока B . Если же B уравнивает, то расклады ξ и η сравниваются и игрок с лучшим раскладом выигрывает банк. Если $\xi = \eta$, то никаких платежей не производится.

Стратегия игрока A может быть описана как n -мерная вектор-функция

$$\varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)),$$

где $\varphi_i(\xi)$ есть вероятность того, что A поставит величину a_i , если его расклад равен ξ . Функции $\varphi_i(\xi)$ должны удовлетворять условиям $\varphi_i(\xi) \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \leq 1.$$

Вероятность того, что игрок A сразу спасует, равна

$$1 - \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi).$$

Стратегия игрока B может быть представлена вектором

$$\psi(\eta) = (\psi_1(\eta), \psi_2(\eta), \dots, \psi_n(\eta)),$$

где $\psi_i(\eta)$ означает вероятность того, что B уравнивает ставку в a_i единиц, если он имеет расклад η . Вероятность того, что B спасует, если A поставил a_i , равна $1 - \psi_i(\eta)$. Каждая функция $\psi_i(\eta)$ удовлетворяет условию

$$0 \leq \psi_i(\eta) \leq 1.$$

Если A применяет стратегию φ , а B — стратегию ψ , то ожидаемый выигрыш A обозначается через $K(\varphi, \psi)$. Перечисляя все возможности, мы найдем, что

$$\begin{aligned} K(\varphi, \psi) = & (-1) \int_0^1 \left(1 - \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) \right) d\xi + \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) [1 - \psi_i(\eta)] d\xi d\eta + \\ & + \sum_{i=1}^n (a_i + 1) \int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где $L(\xi, \eta) = \text{sgn}(\xi - \eta)$.

Любая пара оптимальных стратегий φ^* и ψ^* удовлетворяет неравенствам

$$K(\varphi^*, \psi) \geq K(\varphi^*, \psi^*) \text{ для всех } \psi, \quad (17.3.1)$$

$$K(\varphi, \psi^*) \leq K(\varphi^*, \psi^*) \text{ для всех } \varphi. \quad (17.3.2)$$

Обратно, если эти неравенства выполнены, то стратегии, отмеченные звездочкой, оптимальны. Таким образом, φ^* максимизирует $K(\varphi, \psi^*)$, а ψ^* минимизирует $K(\varphi^*, \psi)$. В этом случае, преобразуя выражение для $K(\varphi, \psi)$, мы можем написать

$$K(\varphi, \psi^*) = -1 + \sum_{i=1}^a \int \varphi_i(\xi) \left(2 + a_i \int_0^{\xi} \psi_i^*(\eta) d\eta - (a_i + 2) \int_{\xi}^1 \psi_i^*(\eta) d\eta \right) d\xi \quad (17.3.3)$$

и

$$K(\varphi^*, \psi) = -1 + 2 \sum_{i=1}^n \int \varphi_i^*(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \psi_i(\eta) \left(-(a_i + 2) \int_0^{\eta} \varphi_i^*(\xi) d\xi + a_i \int_{\eta}^1 \varphi_i^*(\xi) d\xi \right) d\eta. \quad (17.3.4)$$

Таким образом, соотношения (17.3.3) и (17.3.4) имеют вид

$$K(\varphi, \psi^*) = C_1 + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \varphi_i(\xi) L_i(\xi) d\xi \quad (17.3.5)$$

и

$$K(\varphi^*, \psi) = C_2 + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \psi_i(\eta) K_i(\eta) d\eta, \quad (17.3.6)$$

где C_1 и C_2 не зависят соответственно от φ и ψ , а L_i и K_i обозначают соответственно выражения, стоящие в равенствах (17.3.3) и (17.3.4) во внешних скобках. Ввиду ограничений, налагаемых на функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, ясно, что для максимизации (17.3.3) или (17.3.5) A должен выбирать $\varphi_i(\xi) = 1$, если $L_i(\xi)$ положительно и превосходит все $L_j(\xi)$ для $j \neq i$; далее, он должен выбирать $\varphi_i(\xi) = 0$, если $L_i(\xi) < 0$; наконец, если $L_i(\xi) = 0$, а остальные коэффициенты $L_j(\xi)$ ($j \neq i$) неположительны, то он может максимизировать $K(\varphi, \psi^*)$, выбирая функцию $\varphi_i(\xi)$ произвольно, лишь бы она удовлетворяла условию $0 \leq \varphi_i(\xi) \leq 1$ [или, если более чем одно из чисел $L_i(\xi)$ равно нулю, условию $\sum \varphi_i(\xi) \leq 1$, где суммирование распространяется по индексам, соответствующим $L_i(\xi) = 0$]. Аналогично, для

того чтобы минимизировать величину (17.3.4) или (17.3.6), B должен выбирать $\psi_i(\eta) = 1$, если $K_i(\eta) < 0$, и $\psi_i(\eta) = 0$, если $K_i(\eta) > 0$. Если $K_i(\eta) = 0$, то значения $\psi_i(\eta)$ на выигрыш не влияют.

Руководствуясь до некоторой степени интуитивными соображениями, построим две стратегии, φ^* и ψ^* . Будет легко проверить, удовлетворяют ли эти стратегии условиям (17.3.1) и (17.3.2) и тем самым оптимальны ли они. Главная задача построения состоит в том, чтобы гарантировать совместность этих стратегий, т. е. чтобы функция φ^* , которая максимизирует правую часть равенства (17.3.3), была той же функцией, которая содержится в выражении (17.3.4), аналогичный факт должен иметь место для ψ^* . Это еще одна иллюстрация метода неподвижной точки. Теперь мы осуществим эту процедуру в деталях.

Так как игрок B не имеет возможности блефовать, мы можем ожидать, что для некоторых b_i

$$\psi_i^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < b_i, \\ 1, & \text{если } \eta > b_i. \end{cases} \quad (17.3.7)$$

Это утверждение справедливо, поскольку каждая из функций $K_j(\eta)$ является невозрастающей.

С другой стороны мы можем ожидать, что игрок A , когда его расклад плох, иногда будет блефовать. Для того чтобы учесть эту возможность, найдем критические числа b_i , определяющие функцию $\psi_i^*(\eta)$, так, чтобы коэффициент $L_i(\xi)$ при φ_i обращался для $\xi < b_i$ в нуль. Это возможно, так как функция $L_i(\xi)$ на этом интервале постоянна. Следовательно, мы полагаем

$$b_i = \frac{a_i}{2 + a_i}, \quad (17.3.8)$$

так что $b_1 < b_2 < \dots < b_n < 1$. Коэффициент $L_i(\xi)$ при φ_i на интервале $(0, b_i)$ равен нулю, а вне его представляет собой такую линейную функцию ξ , что

$$L_i(1) = 4 \left(1 - \frac{1}{a_i + 2} \right).$$

Отсюда мы заключаем, что функции $L_i(\xi)$ и $L_j(\xi)$ совпадают в точке

$$c_{ij} = 1 - \frac{2}{(2 + a_i)(2 + a_j)}. \quad (17.3.9)$$

Ясно, что c_{ij} является строго возрастающей функцией i и j . Положим $c_1 = b_1$, для $i = 2, \dots, n$ $c_i = c_{i-1, i}$ и $c_{n+1} = 1$. Ясно, что при $j \neq i$ $L_i(\xi) > L_j(\xi) \geq 0$ для $\xi \in (c_i, c_{i+1})$. Следовательно, согласно предыдущим рассуждениям, если функция φ^* максимизирует $K(\varphi, \psi^*)$, то $\varphi_i^*(\xi) = 1$ для $c_i < \xi < c_{i+1}$. Для определенности мы также положим $\varphi_i^*(c_i) = 1$; это не имеет значения, так как если стратегия

изменяется только в конечном числе точек (или на множестве лебеговой меры нуль), то выигрыш $K(\varphi, \psi)$ остается неизменным.

Итак, мы показали, что если функция ψ^* определена согласно соотношениям (17.3.7), где

$$b_i = \frac{a_i}{a_i + 2},$$

то $K(\varphi, \psi^*)$ максимизируется любой стратегией φ^* вида

$$\varphi_i^*(\xi) = \begin{cases} \text{произвольна,} & \text{если } \xi < c_1 = b_1, \\ 0, & \text{если } c_1 \leq \xi < c_i, \\ 1, & \text{если } c_i \leq \xi < c_{i+1}, \\ 0, & \text{если } c_{i+1} \leq \xi \leq 1, \end{cases} \quad (17.3.10)$$

где

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^*(\xi) \leq 1, \quad \varphi_i^*(\xi) \geq 0.$$

Значения $\varphi_i^*(\xi)$ на интервале $0 \leq \xi < c_1$ все еще не определены ввиду соотношения $L_i(\xi) \equiv 0$, которое на этом интервале имеет место.

Остается показать, что так построенная функция ψ^* действительно минимизирует $K(\varphi^*, \psi)$. Для того чтобы ψ^* заведомо обладало этим свойством, необходимо наложить на φ_i^* еще некоторые условия; для этого мы воспользуемся произволом, допущенным в определении φ^* , когда ξ изменяется в интервале $[0, c_1)$. Для того чтобы показать, что ψ^* минимизирует $K(\varphi^*, \psi)$, достаточно установить, что коэффициент $K_i(\eta)$ при $\psi_i(\eta)$ неотрицателен для $\eta < b_i$ и неположителен для $\eta > b_i$. Так как $K_i(\eta)$ — непрерывная монотонно убывающая функция, последнее условие эквивалентно соотношению

$$-(a_i + 2) \int_0^{b_i} \varphi_i^*(\xi) d\xi + a_i \int_{b_i}^1 \varphi_i^*(\xi) d\xi = 0. \quad (17.3.11)$$

Подстановка функции φ^* вида (17.3.10) в соотношение (17.3.11) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{b_1} \varphi_1^*(\xi) d\xi &= b_1(1 - b_1)(b_2 + 1), \\ 2 \int_0^{b_i} \varphi_i^*(\xi) d\xi &= b_i(1 - b_i)(1 - b_{i-1}) \end{aligned} \quad (17.3.12)$$

и

$$2 \int_0^{b_i} \varphi_i^*(\xi) d\xi = b_i(1 - b_i)(b_{i+1} - b_{i-1}) \quad (i = 2, \dots, n-1). \quad (17.3.13)$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^*(\xi) \leq 1,$$

эти равенства могут выполняться тогда и только тогда, когда

$$2 \int_0^{b_1} \sum_{i=1}^n \varphi_i^*(\xi) d\xi \leq 2b_1. \quad (17.3.14)$$

Но сумма правых частей равенств (17.3.12) и (17.3.13) не превосходит $(2 + b_n - b_1)/4$, так как всегда $b_i(1 - b_i) \leq 1/4$. Из неравенства $b_1 \geq 1/3$ мы получаем

$$\frac{1}{4}(2 + b_n - b_1) \leq \frac{1}{4}(3 - b_1) \leq \frac{2}{3} \leq 2b_1.$$

Таким образом, условия (17.3.12) — (17.3.14) могут быть выполнены. Итак, неравенства (17.3.1) и (17.3.2) для стратегий φ^* и ψ^* установлены, т. е. оптимальными стратегиями являются следующие функции:

$$\psi_i^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < b_i \\ 1, & \text{если } \eta \geq b_i \end{cases}, \quad (17.3.15)$$

$$\varphi_i^*(\xi) = \begin{cases} \text{произвольна, но удовлетворяет условию} \\ \int_0^{b_i} \varphi_i^*(\xi) d\xi = b_i(c_{i+1} - c_i), & \text{если } 0 \leq \xi < b_i, \\ 0, & \text{если } \begin{cases} b_1 \leq \xi < c_i \text{ или} \\ c_{i+1} \leq \xi \leq 1, \end{cases} \\ 1, & \text{если } c_i \leq \xi < c_{i+1}, \end{cases} \quad (17.3.16)$$

где

$$b_i = \frac{a_i}{2 + a_i}, \quad c_1 = b_1,$$

$$c_i = 1 - \frac{2}{(2 + a_i)(2 + a_{i-1})} \quad (i = 2, \dots, n), \quad c_{n+1} = 1$$

и

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^*(\xi) \leq 1.$$

Обобщения. Вместо предположения о том, что расклады соответствуют точкам единичного интервала и все равновероятны (т. е. что значение ξ выбирается в соответствии с равномерным распределением), мы можем сделать более широкое предположение о том, что игрок A получает случайную величину ξ , распределенную на единичном интервале с функцией распределения $F(\xi)$, а игрок B получает случайную величину η с функцией распределения $G(\eta)$. Если

функции $F(\xi)$ и $G(\eta)$ всюду непрерывны, то предыдущий анализ может быть воспроизведен полностью, и вид оптимальных стратегий, в сущности, не изменится. Критические числа можно при этом легко выразить через размеры ставок и распределения F и G . В случае, когда распределения дискретны, появляются дополнительные особенности. Мы проиллюстрируем их при описании результатов для того случая, когда $F = G$ представляет собой равномерное распределение, сконцентрированное в N равноотстоящих точках единичного интервала. [Говоря более точно, распределение F концентрирует массу $1/N$ в каждой из точек $t_i = i/N$ ($i = 1, 2, \dots, N$).] Для удобства мы будем предполагать, что число раскладов достаточно велико, так что все числа вида

$$\frac{2N}{a_i + 2}, \quad \frac{2N}{(a_i + 2)(a_j + 2)} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

отличаются друг от друга по крайней мере на одну единицу, и что $a_i > 2$. Анализ проводится так же, как и раньше, и мы находим, что оптимальная стратегия игрока B имеет вид

$$\psi_i^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < b_i, \\ a_i, & \text{если } \eta = b_i, \\ 1, & \text{если } \eta > b_i, \end{cases}$$

где $0 \leq a_i < 1$. Величина a_i показывает, что, быть может, для игрока B представится целесообразным в условиях какого-либо расклада провести рандомизацию тех чистых стратегий, в которых он уравнивает или пасует. Однако можно показать, что фактически B будет осуществлять рандомизацию не более чем для одного расклада, если A поставил a_i . Аналогично

$$\varphi_i^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } b_1 < \xi < c_i, \\ 1, & \text{если } c_i < \xi < c_{i+1}, \\ 0, & \text{если } c_{i+1} < \xi < 1, \end{cases}$$

где числа c_i являются критическими, аналогичными полученным выше, и $c_1 = b_1$, $c_{n+1} = 1$. Имеется также возможность того, что A будет рандомизировать при $\xi = c_i$ и $\xi = c_{i+1}$. Подробности мы опускаем.

Проведенный выше анализ можно распространить на случай произвольных распределений; обычно оптимальные стратегии будут включать рандомизацию в нескольких изолированных точках. В этом отношении (имеется в виду тот факт, что оптимальные стратегии включают рандомизацию для случая дискретных распределений, в отличие от нерандомизирующих оптимальных стратегий для непрерывных распределений) рассмотренная в этом пункте модель очень похожа на модель статистических испытаний.

17.4. Модель покера с двумя кругами ставок. В этом пункте мы распространим модель покера, описанную в предыдущем пункте, на случай двух кругов ставок; в то же время мы ограничимся случаем, когда допускается только один размер ставки. Мы снова предполагаем для удобства, что каждому игроку сдаются случайные расклады, равномерно распределенные на единичном интервале.

Выигрыш и стратегии. После того как сделана начальная единичная ставка, игрок A ходит первым и имеет две альтернативы: он может пасовать или поставить a единиц. Затем ходит игрок B , который располагает тремя возможностями: он может пасовать, уравнивать ставку игрока A или, наконец, повысить, поставив $a + b$ единиц. Если B повысил, то на долю A остается либо пасовать, либо уравнивать ставку B .

Если A и B получили соответственно карты ξ и η , то их стратегии могут быть описаны следующим образом:

$\varphi_1(\xi)$ — вероятность того, что игрок A ставит a и, если игрок B повышает, пасует;

$\varphi_2(\xi)$ — вероятность того, что игрок A ставит a , и если игрок B повышает, то A уравнивает ставку B ;

$1 - \varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)$ — вероятность того, что игрок A сразу пасует;

$\psi_1(\eta)$ — вероятность того, что игрок B уравнивает начальную ставку;

$\psi_2(\eta)$ — вероятность того, что игрок B повышает;

$1 - \psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)$ — вероятность того, что игрок B пасует. Ожидаемый выигрыш при этом равен

$$\begin{aligned} K(\varphi, \psi) = & - \int [1 - \varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)] d\xi + \\ & + \int \int [\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)] [1 - \psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)] d\xi d\eta + \\ & + (a + 1) \int \int \varphi_1(\xi) \psi_1(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\ & - (a + 1) \int \int \varphi_1(\xi) \psi_2(\eta) d\xi d\eta + (a + 1) \int \int \varphi_2(\xi) \psi_1(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + (1 + a + b) \int \int \varphi_2(\xi) \psi_2(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

где $L(\xi, \eta) = \text{sign}(\xi - \eta)$. (Этот ожидаемый выигрыш получается путем рассмотрения взаимно исключающих возможностей: A пасует; A ставит и B пасует; A применяет стратегию φ_1 и B уравнивает или повышает; A применяет стратегию φ_2 и B уравнивает или повышает.)

Если мы обозначим оптимальные стратегии через

$$\varphi^*(\xi) = (\varphi_1^*(\xi), \varphi_2^*(\xi)), \quad \psi^*(\eta) = (\psi_1^*(\eta), \psi_2^*(\eta))$$

и перегруппируем члены в выражении для $K(\varphi, \psi)$, как это делалось в предыдущих примерах, то получим

$$\begin{aligned}
 K(\varphi, \psi^*) = & \\
 = & -1 + \int_0^1 \varphi_1(\xi) \left(2 + a \int_0^\xi \psi_1^*(\eta) d\eta - (a+2) \int_{\xi}^1 \psi_1^*(\eta) d\eta - \right. \\
 & \left. - (a+2) \int_0^1 \psi_2^*(\eta) d\eta \right) d\xi + \\
 & + \int_0^1 \varphi_2(\xi) \left(2 + a \int_0^\xi \psi_1^*(\eta) d\eta - (a+2) \int_{\xi}^1 \psi_1^*(\eta) d\eta + \right. \\
 & \left. + (a+b) \int_0^\xi \psi_2^*(\eta) d\eta - (a+b+2) \int_{\xi}^1 \psi_2^*(\eta) d\eta \right) d\xi \quad (17.4.1)
 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
 K(\varphi^*, \psi) = & \int_0^1 (-1 + 2\varphi_1^*(\xi) + 2\varphi_2^*(\xi)) d\xi + \\
 & + \int_0^1 \psi_1(\eta) \left(-(a+2) \int_0^\eta (\varphi_1^*(\xi) + \varphi_2^*(\xi)) d\xi + a \int_\eta^1 (\varphi_1^*(\xi) + \varphi_2^*(\xi)) d\xi \right) d\eta + \\
 & + \int_0^1 \psi_2(\eta) \left(-(a+2) \int_0^1 \varphi_1^*(\xi) d\xi - \right. \\
 & \left. - (a+b+2) \int_0^\eta \varphi_2^*(\xi) d\xi + (a+b) \int_\eta^1 \varphi_2^*(\xi) d\xi \right) d\eta. \quad (17.4.2)
 \end{aligned}$$

Поиск оптимальных стратегий. Будем снова искать функции $\varphi^*(\xi)$, которые максимизируют выражение (17.4.1), и функции $\psi^*(\eta)$, которые минимизируют выражение (17.4.2). Интуитивные соображения подсказывают, что игрок A может в некоторых случаях блефовать с плохими картами, намереваясь спасовать, если B повышает; он будет также в некотором промежуточном интервале, скажем, при $c < \xi < e$, выбирать $\varphi_1^*(\xi) = 1$; он будет выбирать стратегию $\varphi_2^*(\xi) = 1$ для $e \leq \xi \leq 1$. Игрок B мог бы иногда блефовать, повышая ставки в интервале $0 \leq \eta < c$; он мог бы выбирать $\psi_1^*(\eta) = 1$ в интервале $c \leq \eta < d$ и $\psi_2^*(\eta) = 1$ в интервале $d \leq \eta \leq 1$.

Отсюда вовсе не следует, что это единственный возможный вид оптимальных стратегий. Действительно, далее мы увидим, что суще-

ствуют оптимальные стратегии и иного вида. Однако, после того как определена одна пара оптимальных стратегий, сравнительно легко найти и все остальные решения; поэтому прежде всего мы попытаемся найти оптимальные стратегии указанного вида. Для этого нам нужны такие значения c , d и e , которые порождают решение требуемого типа. Из построения ψ_1^* мы сразу видим, что для того случая, когда $\xi \leq c$, коэффициент при $\varphi_1(\xi)$ в выражении (17.4.1) есть константа; составляя ее выражение и приравнявая его нулю, мы получаем

$$2 - (a + 2) \int_0^1 \psi_2^*(\eta) d\eta - (a + 2)(d - c) = 0. \quad (17.4.3)$$

Коэффициенты при ψ_1^* и ψ_2^* должны быть равны в точке d , в которой игрок B изменяет характер своего поведения; это условие требует, чтобы

$$(2a + 2) \int_d^1 \varphi_1^*(\xi) d\xi = -b \int_0^d \varphi_2^*(\xi) d\xi + b \int_d^1 \varphi_2^*(\xi) d\xi. \quad (17.4.4)$$

Аналогичное условие при $\xi = e$ требует, чтобы выполнялось равенство

$$(2a + b + 2) \int_0^e \psi_2^*(\eta) d\eta = b \int_e^1 \psi_2^*(\eta) d\eta. \quad (17.4.5)$$

В точке $\eta = c$, в которой игрок B начинает применять стратегии ψ_1^* и ψ_2^* без блефа, соответствующие коэффициенты (которые являются убывающими функциями) изменяют знак с плюса на минус, т. е. они должны при $\eta = c$ обращаться в нуль. Следовательно,

$$\begin{aligned} -(a + 2) \int_0^c [\varphi_1^*(\xi) + \varphi_2^*(\xi)] d\xi + a \int_c^1 [\varphi_1^*(\xi) + \varphi_2^*(\xi)] d\xi &= 0, \\ -(a + 2) \int_0^1 \varphi_1^*(\xi) d\xi + (a + b) \int_c^1 \varphi_2^*(\xi) d\xi &= 0. \end{aligned} \quad (17.4.6)$$

[При выводе (17.4.6) мы положили $\varphi_2^*(\xi) = 0$ для $0 \leq \xi \leq c$; это интуитивно ясно.] Введем теперь обозначения:

$$m_1 = \int_0^c \varphi_1^*(\xi) d\xi, \quad m_2 = \int_0^c \psi_2^*(\eta) d\eta.$$

Вспоминая предположение о виде решения и предполагая, что $c < e < d$, мы можем уравнения (17.4.3) — (17.4.6) записать следующим образом:

$$2 = (a + 2)(m_2 + 1 - c), \quad (17.4.7)$$

$$1 - d = d - e \quad \text{или} \quad 2(1 - d) = (1 - e), \quad (17.4.8)$$

$$(2a + b + 2)m_2 = b(1 - d), \quad (17.4.9)$$

$$(a + 2)m_1 = a(1 - c), \quad (17.4.10)$$

$$(a + 2)(m_1 + e - c) = (a + b)(1 - e). \quad (17.4.11)$$

Мы получили систему из пяти уравнений с пятью неизвестными: m_1 , m_2 , c , d , e ; докажем теперь, что эта система уравнений имеет решение, согласующееся с предположениями, сделанными ранее, а именно что $0 < c < e < d < 1$; $0 < m_1 < c$; $0 < m_2 < c$.

Решение уравнений (17.4.7) — (17.4.11). Эта система может быть решена в явном виде следующим образом. Перепишем последнее уравнение как

$$(a + 2)(m_1 + 1 - c) = (2a + b + 2)(1 - e).$$

Исключая с помощью уравнений (17.4.10) и (17.4.8) m_1 и $1 - e$, мы получим

$$(a + 1)(1 - c) = (2a + b + 2)(1 - d). \quad (17.4.12)$$

Из оставшихся уравнений исключаем m_2 :

$$\frac{2}{a + 2} - (1 - c) = \frac{b}{2a + b + 2}(1 - d). \quad (17.4.13)$$

Следовательно,

$$(1 - d) \left(\frac{b}{2a + b + 2} + \frac{2a + b + 2}{a + 1} \right) = \frac{2}{a + 2}. \quad (17.4.14)$$

Найдя $1 - d$, мы можем разрешить (17.4.13) относительно $1 - c$, а тогда значения остальных неизвестных находятся из исходных уравнений.

Для того чтобы показать, что это решение согласуется с поставленными условиями, заметим прежде всего, что из соотношения (17.4.14) следует, что $1 - d > 0$. Уравнение (17.4.12) показывает, что $1 - c > 1 - d$ и, следовательно, $c < d$. Кроме того, из соотношения (17.4.13) следует, что

$$c = \frac{b}{2a + b + 2}(1 - d) + 1 - \frac{2}{a + 2} > 0. \quad (17.4.15)$$

Так как $2(a + 1)(1 - c) = (2a + b + 2)(1 - e)$, мы заключаем, что $1 - e < 1 - c$, или $c < e$; а так как $2d = 1 + e$, мы должны иметь $e < d$. Итак, мы показали, что $0 < c < e < d < 1$. Для проверки

двух оставшихся условий заметим, что из уравнения (17.4.7) следует, что

$$m_2 = c - \left(1 - \frac{2}{a+2}\right),$$

так что $m_2 < c$ и, согласно (17.4.15), $m_2 > 0$. Наконец, используя уравнения (17.4.10) и (17.4.7), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{a}{a+2}(1-c) = (1-c) - \frac{2}{a+2}(1-c) = \\ &= (1-c)[1 - (m_2 + 1 - c)] = (1-c)(c - m_2) \end{aligned}$$

и потому $0 < m_1 < c$.

Оптимальность стратегий φ^* и ψ^* . Итак, мы можем выразить φ^* и ψ^* через найденные выше значения величин c , e , d , m_1 и m_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_1^*(\xi) &= \begin{cases} 1, & \text{если } c \leq \xi < e, \\ 0, & \text{если } e \leq \xi \leq 1, \end{cases} & \varphi_2^*(\xi) &= \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \xi < e, \\ 1, & \text{если } e \leq \xi \leq 1, \end{cases} \\ \psi_1^*(\eta) &= \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \eta < c, \\ 1, & \text{если } c \leq \eta < d, \\ 0, & \text{если } d \leq \eta \leq 1, \end{cases} & \psi_2^*(\eta) &= \begin{cases} 0, & \text{если } c \leq \eta < d, \\ 1, & \text{если } d \leq \eta \leq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (17.4.16)$$

В оставшемся интервале $0 \leq \eta < c$ функции $\varphi_1^*(\xi)$ и $\psi_2^*(\eta)$ выбираются произвольно; они заключены между нулем и единицей и удовлетворяют соответственно условиям

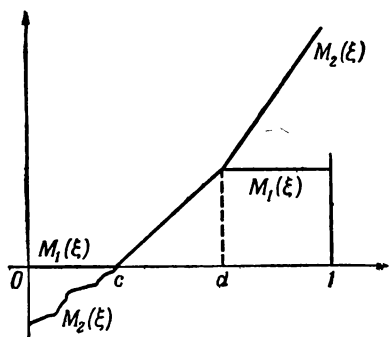
$$\int_0^c \varphi_1^*(\xi) d\xi = m_1 \quad \text{и} \quad \int_0^c \psi_2^*(\eta) d\eta = m_2.$$

Остается проверить, что стратегии φ^* и ψ^* , описанные выше, соответственно максимизируют $K(\varphi, \psi^*)$ (17.4.1) и минимизируют $K(\varphi^*, \psi)$ (17.4.2). Для этого исследуем сначала коэффициенты $M_1(\xi)$ и $M_2(\xi)$ при φ_1 и φ_2 в выражении для $K(\varphi, \psi^*)$. По построению коэффициент $M_1(\xi)$ при φ_1 на интервале $[0, c)$ равен тождественно нулю, линейно возрастает на интервале $[c, d]$ и в остальной части остается постоянным. Кроме того, функция $M_1(\xi)$ непрерывна во всем промежутке $[0, 1]$. Заметим теперь, что функция $M_2(\xi)$ линейна на $[c, d]$ и имеет тот же наклон, что и $M_1(\xi)$. Кроме того, эти функции совпадают при $\xi = e$ в промежутке $[c, d]$ согласно (17.4.5); поэтому $M_1 = M_2$ для $\xi \in [c, d]$.

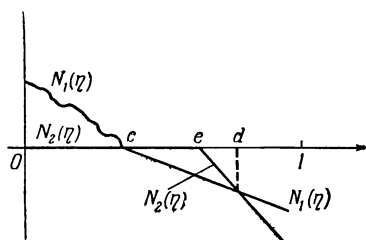
Из определения ψ^* мы можем также сразу заключить, что функция M_2 строго возрастает во всем промежутке $[0, 1]$ (см. рис. 24). Используя эти факты, легко осуществить максимизацию $K(\varphi, \psi^*)$.

Ясно, что максимум достигается на любой функции φ , обладающей следующими свойствами: а) $\varphi_2 = 0$ и φ_1 произвольна ($0 \leq \varphi_1 \leq 1$) для $\xi \in [0, c]$; б) функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют условию $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, а в остальном произвольны для $\xi \in [c, d]$; в) $\varphi_2 = 1$ для $\xi \in [d, 1]$. Очевидно, что определенная выше функция φ^* этим условиям удовлетворяет.

Исследование коэффициентов $N_1(\eta)$ и $N_2(\eta)$ при $\psi_1(\eta)$ и $\psi_2(\eta)$ в выражении для $K(\varphi^*, \psi)$ показывает, что они имеют вид, указан-



Р и с. 24.



Р и с. 25.

ный на рис. 25. Заметим, что функция $K(\varphi^*, \psi)$ минимизируется любой функцией ψ , обладающей свойствами:

(а') $\psi_1 = 0$ и ψ_2 произвольна ($0 \leq \psi_2 \leq 1$) для $\eta \in [0, c]$;

(б') $\psi_1 = 1$ для $\eta \in [c, d]$;

(в') $\psi_2 = 1$ для $\eta \in [d, 1]$.

Ясно, что описанная выше функция ψ^* этим требованиям удовлетворяет. Доказательство оптимальности стратегий φ^* и ψ^* теперь завершено.

В качестве иллюстрации приведем пример. Пусть $a = b = 2$; тогда

$$\varphi_1^*(\xi) = \begin{cases} \text{удовлетворяет условию } \int_0^{19/35} \varphi_1^*(\xi) d\xi = \frac{8}{35}, & \text{а в остальном} \\ \text{произвольна,} & \text{если } 0 \leq \xi < \frac{19}{35}, \\ 1, & \text{если } \frac{19}{35} \leq \xi < \frac{23}{35}, \\ 0, & \text{если } \frac{23}{35} \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$\varphi_2^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \xi < \frac{23}{35}, \\ 1, & \text{если } \frac{23}{35} \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

$$\psi_1^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \eta < \frac{19}{35}, \\ 1, & \text{если } \frac{19}{35} \leq \eta < \frac{29}{35}, \\ 0, & \text{если } \frac{29}{35} \leq \eta \leq 1, \end{cases}$$

$$\psi_2^*(\eta) = \begin{cases} \text{удовлетворяет условию } \int_0^{19/35} \psi_2^*(\eta) d\eta = \frac{3}{70}, & \text{а в остальном} \\ \text{произвольна,} & \text{если } 0 \leq \eta < \frac{19}{35}, \\ 0, & \text{если } \frac{19}{35} \leq \eta < \frac{29}{35}, \\ 1, & \text{если } \frac{29}{35} \leq \eta \leq 1. \end{cases}$$

Значение этой игры равно $11/35$.

Общее решение. Из рассмотрения рис. 25 непосредственно следует, что минимизирующее решение не может иметь никакого иного вида, кроме указанного в соотношениях (17.4.16). Однако при максимизации функции $K(\varphi, \psi^*)$ мы нашли, что на интервале $[c, d]$ единственное необходимое условие, которому должно удовлетворять максимизирующее φ , состоит в том, что $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$. Изменяя φ_1 и φ_2 на этом интервале так, чтобы выполнялось это условие, мы можем найти все возможные оптимальные стратегии игрока А. С этой целью мы определим $\bar{\varphi}_1(\xi)$ на $[0, c]$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\int_0^c \bar{\varphi}_1(\xi) d\xi = m_1$$

(значение m_1 вычислено выше) и $\bar{\varphi}_2(\xi) = 1$ на $[d, 1]$. Для ξ из $[c, d]$ мы потребуем только, чтобы $\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 = 1$. Выписывая условия, при

которых $K(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ минимизируется функцией $\bar{\psi}^*$, мы получаем

$$1 - d = \int_c^d \bar{\varphi}_2(\xi) d\xi \quad (17.4.17)$$

и

$$\int_{\eta}^d \bar{\varphi}_1(\xi) d\xi \leq \frac{b(d-\eta)}{a+b+1} \quad \text{для } \eta \in [c, d],$$

где c и d те же, что и выше. Мы получаем эти условия, приравняв коэффициенты при $\bar{\psi}_1(\eta)$ и $\bar{\psi}_2(\eta)$ в выражении (17.4.2) в точке $\eta = d$ и требуя, чтобы для η из $[c, d]$ имело место неравенство $N_1(\eta) \leq N_2(\eta)$.

Легко видеть, что это соотношение необходимо и достаточно для того, чтобы стратегия $\bar{\varphi}$ была оптимальной (см. задачу 8).

17.5*. Модель покера с k повышениями. В этом пункте мы укажем вид оптимальных стратегий в модели покера с несколькими кругами ставок. Методы исследования представляют собой, в сущности, обобщения методов, использованных в предыдущем пункте. Значительно более сложные в деталях доказательства мы опускаем, отсылая читателя к библиографии, помещенной в конце этой главы.

Правила, стратегии и выигрыш. Два игрока ставят по единице каждый и получают независимо случайные расклады ξ и η (которые отождествляются с точками единичного интервала), распределенные равномерно. Имеется $k+1$ кругов ставок („круг“ в этом пункте означает одно действие того или иного из игроков). В первом круге игрок A может или спасовать (и потерять свою единицу), или поставить a единиц. A и B ходят поочередно. В каждом последующем круге игрок может либо спасовать, либо уравнивать ставку противника (в этих случаях игра кончается), либо повысить ставку на a единиц. В последнем круге каждый игрок может только пасовать или уравнивать. Если k четно, то последний возможный круг заканчивает игрок A ; если k нечетно, то последний возможный круг заканчивает игрок B .

Стратегию игрока A можно описать набором k функций $\varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_k(\xi))$. Эти функции указывают способ действия игрока A , если он получает расклад ξ . Точнее,

$$1 - \sum_{i=1}^k \varphi_i(\xi)$$

есть вероятность того, что игрок A сразу спасует, а

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i(\xi)$$

вероятность того, что игрок A в первом круге сделает ставку. Пусть далее

$\varphi_1(\xi)$ — вероятность того, что игрок A спасует на своем втором круге;

$\varphi_2(\xi)$ — вероятность того, что игрок A уравнивает на своем втором круге;

$\sum_{i=3}^k \varphi_i(\xi)$ — вероятность того, что игрок A повысит на своем втором круге,

если есть возможность повышать, т. е. если игрок B повысил на своем первом круге и продолжает игру. Аналогично если игра продолжается до r -го круга игрока A , то пусть

$\varphi_{2r-3}(\xi)$ — вероятность того, что игрок A будет пасовать на своем r -м круге;

$\varphi_{2r-2}(\xi)$ — вероятность того, что игрок A будет уравнивать на своем r -м круге;

$\sum_{i=2r-1}^k \varphi_i(\xi)$ — вероятность того, что игрок A повысит на своем r -м круге.

Аналогично стратегия игрока B может быть выражена набором k функций:

$$\psi = (\psi_1(\eta), \psi_2(\eta), \dots, \psi_k(\eta)),$$

который указывает образ действия игрока B , если он получает расклад η . Вероятность того, что игрок B при первой возможности будет пасовать, равна

$$\psi_0(\eta) = 1 - \sum_{j=1}^k \psi_j(\eta).$$

Если игра продолжается до r -го круга игрока B , то

$\psi_{2r-2}(\eta)$ — вероятность того, что игрок B спасует на своем r -м круге;

$\psi_{2r-1}(\eta)$ — вероятность того, что игрок B будет уравнивать на своем r -м круге;

$\sum_{j=2r}^k \psi_j(\eta)$ — вероятность того, что игрок B повысит на своем r -м круге.

Если игроки получают расклады ξ и η , выбирают соответственно стратегии φ и ψ , то выигрыш игрока A может быть вычислен, как

и в предыдущих примерах, путем рассмотрения взаимно исключающих случаев, которыми могут закончиться ставки. Выигрыш игрока A имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 P[\varphi(\xi), \psi(\eta)] = & (-1) \left(1 - \sum_{i=1}^k \varphi_i(\xi) \right) + \\
 & + \sum_{i=1}^k \varphi_i(\xi) \left(1 - \sum_{j=1}^k \psi_j(\eta) + (a+1) \psi_1(\eta) L(\xi, \eta) \right) + \\
 & + \sum_{j=2}^k \psi_j(\eta) [-(a+1) \varphi_1(\xi) + (2a+1) \varphi_2(\xi) L(\xi, \eta)] + \dots \\
 & \dots + \sum_{j=2r-2}^k \psi_j(\eta) \{ -(2r-3)a+1 \} \varphi_{2r-3}(\xi) + \\
 & + [(2r-2)a+1] \varphi_{2r-2}(\xi) L(\xi, \eta) \} + \\
 & + \sum_{i=2r-1}^k \varphi_i(\xi) \{ [(2r-2)a+1] \psi_{2r-2}(\eta) + [(2r-1)a+1] \psi_{2r-1}(\eta) L(\xi, \eta) \} + \\
 & + \sum_{j=2r}^k \psi_j(\eta) \{ -(2r-1)a+1 \} \varphi_{2r-1}(\xi) + (2ra+1) \varphi_{2r}(\xi) L(\xi, \eta) \} + \\
 & + \sum_{i=2r+1}^k \varphi_i(\xi) \{ (2ra+1) \psi_{2r}(\eta) + [(2r+1)a+1] \psi_{2r+1}(\eta) L(\xi, \eta) \} + \dots,
 \end{aligned}$$

где $L(\xi, \eta) = \text{sign}(\xi - \eta)$. Математическое ожидание выигрыша равно

$$K(\varphi, \psi) = \int_0^1 \int_0^1 P[\varphi(\xi), \psi(\eta)] d\xi d\eta. \quad (17.5.1)$$

Описание оптимальных стратегий. Существуют оптимальные стратегии φ^* и ψ^* , характеризуемые $2k+1$ числами $b, c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_k$. Когда игрок получает расклад ξ из промежутка $(0, b)$, он будет часть времени блефовать, а также некоторое время пасовать. Мы будем обозначать через

$$m_i = \int_0^b \varphi_i^*(\xi) d\xi \quad (i = 1, 3, 5, \dots), \quad (17.5.2)$$

и

$$n_j = \int_0^b \psi_j^*(\eta) d\eta \quad (j = 2, 4, 6, \dots) \quad (17.5.3)$$

вероятности блефа в различных кругах ставок. Если игрок A получает расклад ξ в интервале (c_{i-1}, c_i) , где $c_0 = b$, то он будет выбирать $\varphi_i^*(\xi) = 1$ и $\varphi_l^*(\xi) = 0$ для $l \neq i$. Аналогично если игрок B полу-

чает расклад η в интервале (d_{j-1}, d_j) , где $d_0 = b$, то он будет выбирать $\psi_j^*(\eta) = 1$ и $\psi_l^*(\eta) = 0$ для $l \neq j$. Решение изображено на рис. 26. Тот факт, что

$$c_{2r-1} < d_{2r-1} < d_{2r} < c_{2r} \quad (r = 1, 2, \dots)$$

имеет большое значение.

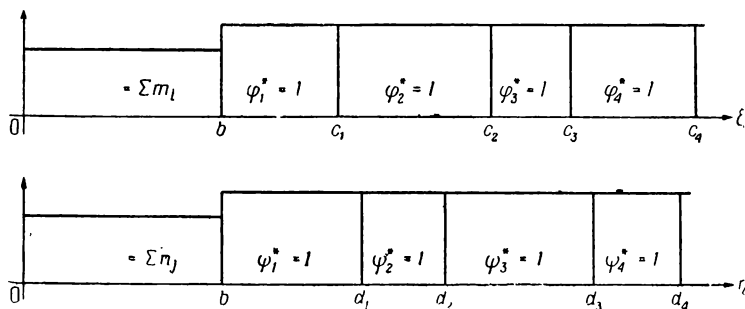


Рис. 26.

Постоянные c_i , d_j , m_i и n_j определяются путем решения громоздкой системы уравнений, аналогичной системе (17.4.7) — (17.4.11). Точнее, если k четно, то числа b , c_i , d_j , m_i , n_j находятся как решения следующих уравнений:

$$[(4r-1)a+2] \sum_{j=2r}^k n_j = a(1-d_{2r-1}) \quad (2r=2, 4, \dots, k),$$

$$a(c_{2r-2}-d_{2r-2}) = a(1-c_{2r-2}) + [(4r-3)a+2] \sum_{j=2r}^k n_j \quad (2r=4, 6, \dots, k),$$

$$[(4r-3)a+2] \sum_{i=2r-1}^k m_i = a(1-c_{2r-2}) \quad (2r=2, 4, \dots, k),$$

$$a(d_{2r-1}-c_{2r-1}) = a(1-d_{2r-1}) + [(4r-1)a+2] \sum_{i=2r+1}^k m_i \quad (2r=2, 4, \dots, k),$$

$$(4ra+2)(c_{2r}-d_{2r-1}) = [(4r+2)a+2](c_{2r}-d_{2r}) \quad (2r=2, 4, \dots, k-2),$$

$$[(4r-2)a+2](d_{2r-1}-c_{2r-2}) = (4ra+2)(d_{2r-1}-c_{2r-1}) \quad (2r=2, 4, \dots, k),$$

$$2 = (a+2) \int_0^1 \sum_{j=1}^k \psi_j^*(\eta) d\eta.$$

Аналогичная система может быть составлена и для нечетного k . Получаемое при этом решение согласуется со схемой рис. 26.

17.6. Покер с одновременными ходами. Два игрока A и B после получения случайных равномерно распределенных раскладов одновременно делают ставки. Начальная ставка может быть или b (низкая ставка), или a (высокая ставка). Если обе ставки равны, то игрок с более высоким раскладом выигрывает. Если один игрок поставил высокую ставку, а другой — низкую, то поставивший низкую ставку имеет выбор: либо спасовать (теряя свою ставку), либо уравнивать высокую ставку, поставив дополнительно $a - b$.

Если игрок, поставивший ставку, уравнивает, то игрок с более высоким раскладом выигрывает банк.

Так как игра симметрична, нам нужно описать только стратегии одного из игроков. Если игрок A получает расклад ξ , то мы будем обозначать через

$\varphi_1(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит низкую ставку и спасует, если игрок B поставит высокую ставку;

$\varphi_2(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит низкую ставку и затем уравнивает ставку B ;

$\varphi_3(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит высокую ставку. Разумеется, эти функции удовлетворяют условиям

$$\varphi_i(\xi) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) = 1.$$

Ожидаемый выигрыш игрока A , если он использует стратегию φ , а игрок B использует стратегию ψ , выражается в виде

$$\begin{aligned} K(\varphi, \psi) = & b \int_0^1 \int_0^1 [\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)] [\psi_1(\eta) + \psi_2(\eta)] L(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\ & - b \int_0^1 \int_0^1 \varphi_1(\xi) \psi_3(\eta) d\xi d\eta + b \int_0^1 \int_0^1 \varphi_3(\xi) \psi_1(\eta) d\xi d\eta + \\ & + a \int_0^1 \int_0^1 \varphi_2(\xi) \psi_3(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta + a \int_0^1 \int_0^1 \varphi_3(\xi) \psi_2(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + a \int_0^1 \int_0^1 \varphi_3(\xi) \psi_3(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Ввиду симметрии игры мы можем заменить в этом выражении стратегию $\psi(\eta)$ игрока B оптимальной стратегией $\varphi^*(\eta)$. Сделаем довольно правдоподобное предположение о том, что в условиях этой стратегии $\varphi_2^*(\eta) = 0$, ибо, по-видимому, нет веских оснований сна-

чала делать низкую ставку, а затем уравнивать. Это предположение далее будет строго обосновано. Так как $\varphi_2^*(\eta) = 0$, мы можем записать функцию $K(\varphi, \varphi^*)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} K(\varphi, \varphi^*) &= b \int_0^1 \int_0^1 [\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)] \varphi_1^*(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta - \\ &\quad - b \int_0^1 \int_0^1 \varphi_1(\xi) \varphi_3^*(\eta) d\xi d\eta + b \int_0^1 \int_0^1 \varphi_3(\xi) \varphi_1^*(\eta) d\xi d\eta + \\ &\quad + a \int_0^1 \int_0^1 [1 - \varphi_1(\xi) - \varphi_3(\xi)] \varphi_3^*(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &\quad + a \int_0^1 \int_0^1 \varphi_3(\xi) \varphi_3^*(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_0^1 \varphi_1(\xi) \left(b \int_0^\xi \varphi_1^*(\eta) d\eta - b \int_\xi^1 \varphi_1^*(\eta) d\eta - b \int_0^1 \varphi_3^*(\eta) d\eta - \right. \\ &\quad \left. - a \int_0^\xi \varphi_3^*(\eta) d\eta + a \int_\xi^1 \varphi_3^*(\eta) d\eta \right) d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 \varphi_2(\xi) \left(b \int_0^\xi \varphi_1^*(\eta) d\eta - b \int_\xi^1 \varphi_1^*(\eta) d\eta \right) d\xi + \\ &\quad + \int_0^1 \varphi_3(\xi) \left(b \int_0^1 \varphi_1^*(\eta) d\eta \right) d\xi + \int_0^1 \int_0^1 \varphi_3^*(\eta) L(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (17.6.1) \end{aligned}$$

или

$$K(\varphi, \varphi^*) = \int_0^1 \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) T_i(\xi) d\xi + Z,$$

где Z есть член, не зависящий от φ_i . Стратегия φ , максимизирующая $K(\varphi, \varphi^*)$, определяется таким выбором компоненты φ_i , чтобы она была как можно больше, если $T_i(\xi) = \max_j T_j(\xi)$. Если максимум $T_j(\xi)$ достигается одновременно на двух из $T_i(\xi)$, то соответствующие φ_i могут принимать любые положительные значения при условии, что их сумма равна единице.

При низких раскладах иногда рекомендуется блеф. Это означает, что при $\xi < \xi_0$ мы должны иметь $T_1(\xi) = T_3(\xi) > T_2(\xi)$. Дифференцируя тождество $T_1(\xi) = T_3(\xi)$ и помня, что на интервале $[0, \xi_0]$

$$\varphi_1^*(\xi) + \varphi_3^*(\xi) = 1,$$

мы заключаем, что

$$\varphi_1^*(\xi) = \frac{a}{a+b}$$

почти всюду для $\xi < \xi_0$.

Выбирая φ_1^* указанным образом и полагая $\varphi_3^*(\xi) = 1$ для $\xi > \xi_0$, мы получаем, что равенство $T_1(\xi) = T_3(\xi)$ возможно, если только

$$\xi_0 = \frac{a-b}{a}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему решению:

$$\varphi^*(\xi) = \begin{cases} \varphi_1^*(\xi) = \frac{a}{a+b}, & \varphi_3^*(\xi) = \frac{b}{a+b}, & \text{если } \xi < \xi_0, \\ \varphi_3^*(\xi) = 1, & & \text{если } \xi > \xi_0. \end{cases} \quad (17.6.2)$$

Проверка оптимальности так построенной стратегии φ^* осуществляется обычными приемами. Ясно, что $T_1(\xi) = T_3(\xi) > T_2(\xi)$ для $\xi < \xi_0$ и, следовательно, максимум достигается лишь при условии $\varphi_1(\xi) + \varphi_3(\xi) = 1$, которое, несомненно, выполнено для φ^* вида (17.6.2). Далее, мы видели, что равенство $T_1(\xi) = T_3(\xi)$ единственным образом определяет φ^* в соответствии с формулой (17.6.2) для $\xi < \xi_0$.

Для $\xi > \xi_0$, исследуя (17.6.1), мы находим, что $T_2(\xi) = T_3(\xi) > T_1(\xi)$. Следовательно, максимизация функции $K(\varphi, \varphi^*)$ требует, чтобы φ удовлетворяла условию $\varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi) = 1$. Но если на этом интервале $\varphi_2^* > 0$, то несложное вычисление показывает, что $T_1(\xi) < T_2(\xi)$ для $\xi \geq \xi_1$, где $\xi_1 < \xi_0$. В совокупности все эти заключения доказывают, что стратегия φ^* вида (17.6.2) есть единственная оптимальная стратегия игры.

17.7. Игра „проходящий туз“. Игра „проходящий туз“ описана в книге Годхантера „История математической теории вероятностей“ следующим образом.

„Петр держит обычную колоду карт: он дает одну случайно выбранную карту Павлу и берет одну себе; целью каждого является получение более высокой карты, чем карта противника. Порядок значений карт следующий: туз, двойка, тройка, ..., десятка, валет, дама, король.“

Если Павел недоволен своей картой, то он может заставить Петра поменяться с ним, но если Петр имеет короля, то он имеет право сохранить его. Если Петр недоволен картой, которую он получил в первый раз или которую он был вынужден получить от Павла, он может заменить ее на другую карту, выбранную случайно из колоды, но если карта, которую он извлек, — король, то он не может взять ее, а должен сохранить ту карту, которой не был доволен. Наконец, если Павел и Петр имеют одинаковые карты, то считается, что Павел проиграл“.

Мы не будем приводить здесь решения этой игры. Вместо этого мы рассмотрим несколько видоизмененный непрерывный ее вариант, решение которого получается легче.

Пусть игроки A и B реализуют значения независимых случайных величин ξ и η , равномерно распределенных на единичном интервале. Игрок A ходит первым и может либо сохранить свое число ξ , либо же обменять его на число η игрока B . После этого ходит B , который может или сохранить свое число, независимо от того, является ли оно его первоначальным η или числом ξ , которое он получил от A , или заменить его на новое число ζ , также выбранное случайно из единичного интервала. Выигрыш A равен 1, если его последнее число больше, чем окончательное число B , и -1 , если его число меньше, чем число B . Мы не заботимся о случае, когда эти два числа равны, так как его вероятность равна нулю.

Перейдем к анализу этой игры, используя методы, аналогичные методам исследования предыдущих моделей. Здесь, так же как и раньше, мы будем руководствоваться интуитивными соображениями.

Пусть

$u(\xi)$ означает вероятность того, что если игрок A получает ξ , он сохранит его;

$\psi(\eta)$ — вероятность того, что игрок B будет требовать новое число ζ , если он получает η , и игрок A сохранил ξ ;

$\varphi(\eta, \xi)$ — вероятность того, что игрок B будет требовать новое число ζ , если игрок A обменял ему ξ на η .

Величины $u(\xi)$, $\psi(\eta)$ и $\varphi(\eta, \xi)$ должны удовлетворять условиям $0 \leq u(\xi)$, $\psi(\eta)$, $\varphi(\eta, \xi) \leq 1$. Перечисляя все возможности и полагая $\text{sign}(\xi - \eta) = L(\xi, \eta)$, мы находим, что ожидаемый выигрыш $K(u; \psi, \varphi)$ игрока A равен

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 u(\xi) [1 - \psi(\eta)] L(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u(\xi) \psi(\eta) L(\xi, \zeta) d\xi d\eta d\zeta + \\ & + \int_0^1 \int_0^1 [1 - u(\xi)] [1 - \varphi(\eta, \xi)] L(\eta, \xi) d\xi d\eta + \\ & + \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [1 - u(\xi)] \varphi(\eta, \xi) L(\eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta. \quad (17.7.1) \end{aligned}$$

Здравый смысл заставляет нас предположить, что оптимальная стратегия $\varphi^0(\eta, \xi)$ имеет вид

$$\varphi^0(\eta, \xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi > \eta, \\ 1, & \text{если } \xi < \eta. \end{cases}$$

Действительно, если $\xi > \eta$ и игрок B имеет ξ , то он наверняка выиграет, если только сохранит ξ ; он наверняка проиграет, если $\xi < \eta$, и он не возьмет новой карты. Поэтому та часть K , которая содержит u , может быть приведена к виду

$$\int_0^1 u(\xi) (\xi^2 + 2\xi - 1) + (2\xi - 1) \int_0^1 \psi(\eta) d\eta + \\ + \int_{\xi}^1 \psi(\eta) d\eta - \int_0^{\xi} \psi(\eta) d\eta \Big) d\xi. \quad (17.7.2)$$

Если выражение во внешних скобках положительно, то игроку A нужно, чтобы $u(\xi) = 1$, а если оно отрицательно, ему нужно, чтобы $u(\xi) = 0$, так как A — максимизирующий игрок.

Рассмотрим теперь ту часть K , которая содержит ψ . Она представима в виде

$$\int_0^1 \psi(\eta) \left(\int_0^1 u(\xi) (2\xi - 1) d\xi + \int_0^{\eta} u(\xi) d\xi - \int_{\eta}^1 u(\xi) d\xi \right) d\eta. \quad (17.7.3)$$

Если выражение во внешних скобках отрицательно, то для игрока B нужно, чтобы $\psi(\eta) = 1$, потому что он — минимизирующий. Если это выражение положительно, то ему нужно, чтобы $\psi(\eta) = 0$.

Поскольку интегралы

$$\int_0^{\eta} u(\xi) d\xi \quad \text{и} \quad \int_{\eta}^1 u(\xi) d\xi$$

являются соответственно монотонно возрастающей и монотонно убывающей функциями η , то существует такое значение η_0 , что $\psi^0(\eta) = 1$ для $\eta < \eta_0$ и $\psi^0(\eta) = 0$ для $\eta > \eta_0$.

Теперь, когда мы знаем вид функции $\psi^0(\eta)$, посмотрим, что можно сказать о виде $u^0(\xi)$. Если в выражении, стоящем во внешних скобках в (17.7.2), заменить ψ на ψ^0 , то для $\xi < \eta_0$ оно будет равно

$$\xi^2 + 2\xi\eta_0 - 1, \quad (17.7.4)$$

а для $\xi \geq \eta_0$ равно

$$\xi^2 + 2\xi + 2\xi\eta_0 - 2\eta_0 - 1. \quad (17.7.5)$$

Так как это выражение является монотонно возрастающей функцией ξ , существует такое значение ξ_0 , что $u^0(\xi) = 0$ для $\xi < \xi_0$ и $u^0(\xi) = 1$ для $\xi > \xi_0$.

Теперь мы можем подставить u^0 в выражение (17.7.3) и найти зависимость между ξ_0 и η_0 . Для $\eta \leq \xi_0$ выражение в квадратных скобках в (17.7.3) равно

$$2 \int_{\xi_0}^1 \xi d\xi - 2 \int_{\xi_0}^1 d\xi. \quad (17.7.6)$$

Так как это выражение неположительно, $\psi^0(\eta) = 1$ для $\eta \leq \xi_0$. Для $\eta \geq \xi_0$ выражение в квадратных скобках равно

$$-1 - \xi_0^2 + 2\eta; \quad (17.7.7)$$

следовательно, $\psi^0(\eta) = 1$ для $\eta < (\xi_0^2 + 1)/2$ и $\psi^0(\eta) = 0$ для $\eta > (\xi_0^2 + 1)/2$.

Ясно, что $\xi_0 < (\xi_0^2 + 1)/2 = \eta_0$; следовательно, положив выражение (17.7.4) равным нулю и решив получившееся уравнение относительно ξ , мы найдем значение ξ_0 . Значение ξ_0 есть единственный корень уравнения $\xi^3 + \xi^2 + \xi - 1 = 0$, лежащий между 0 и 1. Решая это уравнение, мы получаем

$$\xi_0 \approx 0,5437.$$

Из определения u^0 и ψ^0 мы знаем, что u^0 максимизирует $K(u; \psi^0, \varphi^0)$ и что ψ^0 минимизирует $K(u^0; \psi, \varphi^0)$. Кроме того, мы должны проверить, что и φ^0 минимизирует $K(u^0; \psi, \varphi)$.

Часть K , содержащую φ , можно с помощью интегрирования по ζ привести к виду

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi(\eta, \xi) [1 - u^0(\xi)] [2\eta - 1 - L(\eta, \xi)] d\xi d\eta,$$

или

$$\int_0^1 \int_0^{\xi_0} \varphi(\eta, \xi) [2\eta - 1 - L(\eta, \xi)] d\xi d\eta.$$

Отсюда ясно, что φ^0 действительно минимизирует функцию $K(u^0; \psi, \varphi)$. Таким образом, построенные u^0 , ψ^0 и φ^0 являются оптимальными стратегиями. Значение игры равно

$$-\frac{\xi_0^4}{4} - \frac{\xi_0^3}{3} - \frac{\xi_0^2}{2} - \frac{1}{4} + \xi_0 \approx 0,0705.$$

Итак, оптимальными стратегиями являются функции

$$u^0(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi > \xi_0, \\ 0, & \text{если } \xi < \xi_0. \end{cases}$$

и

$$\psi^0(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta < \eta_0 = \frac{1+\xi_0^2}{2} \approx 0,6478, \\ 0, & \text{если } \eta > \eta_0, \end{cases}$$

$$\varphi^0(\eta, \xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi < \eta, \\ 0, & \text{если } \xi > \eta. \end{cases}$$

где ξ_0 — единственный корень уравнения $\xi^3 + \xi^2 + \xi - 1 = 0$, лежащий в единичном интервале.

Если равномерное распределение в описании игры заменить произвольным непрерывным распределением F , то вид оптимальных стратегий не изменится. Однако если берется дискретное распределение F , то оптимальные стратегии $u^0(\xi)$ и $\psi^0(\eta)$ могут допускать рандомизацию для критических значений (соответственно ξ_0 и η_0)

17.8*. „У кого старше, тот выигрывает“. Каждый из двух игроков A и B получает карту из интервала $(0, 1)$ согласно равномерному распределению и ставит одну из величин $a_1, a_2, \dots, a_n$. (Мы предполагаем, что $a_i < a_{i+1}$.) Выигрыш определяется следующим образом: если одна из ставок больше чем другая, то игрок, который поставил высокую ставку, выигрывает банк; если ставки равны, то игроки сравнивают карты и игрок с лучшим раскладом выигрывает банк. Так как игра симметрична, значение игры должно быть равно нулю, а оптимальные стратегии одинаковы для обоих игроков. Будем обозначать через $\varphi_i(\xi)$ вероятность того, что игрок A при карте ξ поставит a_i . Эти функции подчинены ограничениям

$$\varphi_i(\xi) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) = 1.$$

Если игроки выбирают стратегии $\varphi_i(\xi)$ и $\psi_i(\eta)$, то ожидаемый выигрыш игрока A равен

$$K(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \varphi_i(\xi) \left(\sum_{k=1}^{i-1} a_k \int_0^1 \psi_k(\eta) d\eta - a_i \sum_{k=i+1}^n \int_0^1 \psi_k(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + a_i \int_0^1 \psi_i(\eta) L(\xi, \eta) d\eta \right) d\xi,$$

где $L(\xi, \eta) = \text{sign}(\xi - \eta)$. Вспомня, что $\sum \psi_i(\eta) = 1$, мы можем записать выигрыш следующим образом:

$$K(\varphi, \psi) = \\ = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \varphi_i(\xi) \left(-a_i + \sum_{k=1}^{i-1} (a_i + a_k) \int_0^1 \psi_k(\eta) d\eta + 2a_i \int_0^\xi \psi_i(\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Следуя методу, примененному в предыдущих примерах, будем обозначать общую оптимальную стратегию игроков через φ^* . Тогда задача сводится к нахождению такой стратегии φ^* , что максимум $K(\varphi, \varphi^*)$ достигается при $\varphi = \varphi^*$. Для упрощения записи будем обозначать выражение во внешних скобках в последнем уравнении ¹⁾ через $L_i(\xi)$. Таким образом,

$$K(\varphi, \varphi^*) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi) L_i(\xi) d\xi. \quad (17.8.1)$$

Предположим, что решение имеет следующий вид: существуют такие числа

$$0 < \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_{n-1} \leq \xi_n \quad (\xi_n = 1),$$

что в интервале $(0, \xi_1)$ все $\varphi_i^*(\xi)$ используются с некоторыми вероятностями $\alpha_i^{(1)} > 0$; во втором интервале (ξ_1, ξ_2) с положительными вероятностями делаются только ставки $a_2, \dots, a_n$ (с вероятностями $\alpha_i^{(2)}$) и т. д. для всех остальных интервалов.

Эта предлагаемая стратегия была найдена после многих проб и преобразований $L_i(\xi)$. Соображения в ее пользу ясны. Ясно также, что $\varphi_i(\xi) = 1$, если $L_i(\xi) > L_j(\xi)$ для $j \neq i$. Единственная возможная неоднозначность появляется, если $L_i(\xi) = L_j(\xi) > L_k(\xi)$ для $j \neq i, i_0$. В этом случае мы можем определить значения $\varphi_i(\xi)$ и $\varphi_{i_0}(\xi)$ произвольно, лишь бы они подчинялись условию $\varphi_i(\xi) + \varphi_{i_0}(\xi) = 1$. Дальнейшее исследование коэффициентов $L_i(\xi)$ производится в указанных предположениях о виде решения.

Для того чтобы в некотором интервале две из этих функций, скажем $\varphi_i(\xi)$ и $\varphi_j(\xi)$, были отличны от нуля, необходимо, чтобы были равны соответствующие им коэффициенты в выражении (17.8.1), т. е. $L_i(\xi) = L_j(\xi)$. Заметим, что функция $L_i(\xi)$ состоит из двух членов: из члена

$$c_i = -a_i + \sum_{k=1}^{i-1} (a_i + a_k) \int_0^1 \varphi_k^*(\eta) d\eta, \quad (17.8.2)$$

не зависящего от ξ , и члена

$$2a_i \int_0^\xi \varphi_i^*(\eta) d\eta.$$

Мы определим неизвестные константы $\alpha_i^{(r)}$ так, чтобы последний член L_i был равен соответствующему члену L_j . После этого мы определим ξ_r так, чтобы $c_i = c_j$. Так как мы предположили, что

¹⁾ Где ψ заменена на φ^* . — Прим. перев.

в интервале $(0, \xi_1)$ имеет место равенство $\varphi_i^*(\xi) = \alpha_i^{(1)}$, то из уравнения

$$2a_i \int_0^{\xi} \varphi_i^*(\xi) d\xi = 2a_j \int_0^{\xi} \varphi_j^*(\xi) d\xi$$

следует, что $2a_i \alpha_i^{(1)} = 2a_j \alpha_j^{(1)}$; в частности, если $j = 1$, то

$$\alpha_i^{(1)} = \frac{a_1}{a_i} \alpha_1^{(1)}.$$

Так как $\sum \alpha_i^{(1)} = \sum \varphi_i^*(\xi) = 1$, мы окончательно получаем $\alpha_i^{(1)} = 1/a_i b_1$ ($i = 1, \dots, n$), где

$$b_1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

Если мы продолжим рассуждение, то покажем, что в интервале (ξ_{l-1}, ξ_l) мы имеем $\alpha_i^{(r)} = 1/a_i b_r$ ($i = r, r+1, \dots, n$), где

$$b_r = \sum_{k=r}^n \frac{1}{a_k}.$$

При этих значениях $\alpha_i^{(r)}$ числа c_i , определенные равенством (17.8.2), могут быть выражены следующим образом:

$$c_1 = -a_1,$$

$$c_2 = -a_2 + (a_2 + a_1) \frac{\xi_1}{a_1 b_1},$$

$$c_3 = -a_3 + (a_3 + a_1) \frac{\xi_1}{a_1 b_1} + (a_3 + a_2) \frac{\xi_1}{a_2 b_1} + (a_3 + a_2) \frac{\xi_2 - \xi_1}{a_2 b_2}$$

и т. д. Если все эти постоянные равны друг другу, то $c_k = -a_1$ для всех k . Числа $\xi_1, \dots, \xi_n$ могут быть определены из этих уравнений единственным образом. Мы должны подчеркнуть, что так полученные значения порождают решение тогда и только тогда, когда $0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n = 1$. Это условие не всегда выполнено; его соблюдение зависит от значений $a_1, \dots, a_n$.

При $n = 2$ мы всегда получаем решение, для которого

$$\xi_1 = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} a_1 b_1 = \frac{a_2 - a_1}{a_2}.$$

При $n = 3$ уравнения для ξ_1 и ξ_2 имеют вид

$$\xi_1 = \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} a_1 b_1,$$

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{a_1 b_2 (a_3 a_1 + a_3 a_2 + a_2 a_1 - 3a_2^2)}{(a_2 + a_1)(a_3 + a_2)}.$$

Если $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, то $\xi_1 = 7/12$, $\xi_2 = 8/12$.

Мы не будем здесь описывать решение для тех случаев, когда не все ξ_i лежат в единичном интервале, или в случае, когда $\xi_j < \xi_i$ для некоторых $i < j$ (см. задачу 10).

Непрерывная область ставок. Единственное отличие рассматриваемой здесь модели от предыдущей состоит в том, что вместо дискретного множества допустимых ставок $a_1, \dots, a_n$ мы допускаем любую ставку α в интервале $0 < b \leq \alpha \leq a$. Выигрыш тот же, что и в предыдущей модели; эта игра, очевидно, симметрична, и ее значение должно быть равно нулю.

Предположим, что минимизирующий игрок (B) выбирает следующую стратегию: если его карта ξ выше, чем фиксированное значение ξ_0 (которое будет далее вычислено), то он делает высшую возможную ставку a ; если его карта меньше чем ξ_0 , он будет делать ставку в соответствии с распределением с непрерывной плотностью $\varphi(\alpha)$ независимо от того, какую карту $\xi < \xi_0$ он получил. Для вычисления ожидаемого выигрыша максимизирующего игрока (A) рассмотрим три случая.

Случай 1. Игрок A получает карту ξ и назначает ставку $\beta < a$. Так как распределение игрока B непрерывно, вероятность того, что карты будут сравниваться, равна нулю. Ожидаемый выигрыш зависит только от того, у кого выше ставка, т. е. от β . Обозначая этот ожидаемый выигрыш игрока A через $R(\beta)$, мы имеем

$$R(\beta) = \int_b^{\beta} \alpha \varphi(\alpha) d\alpha - \beta \int_{\beta}^a \varphi(\alpha) d\alpha - \beta [1 - \xi_0], \quad (17.8.3)$$

где φ нормировано так, что $\int_b^a \varphi(\alpha) d\alpha = \xi_0$.

Случай 2. Если игрок A получает карту $\xi \leq \xi_0$ и ставит высшую возможную ставку a , то выигрыш по-прежнему выражается формулой (17.8.3), где $\beta = a$.

Случай 3. Если игрок A получает карту $\xi > \xi_0$ и назначает высшую ставку a , то ожидаемый выигрыш равен

$$r(\xi) = \int_b^a \alpha \varphi(\alpha) d\alpha + a(\xi - \xi_0) - a(1 - \xi). \quad (17.8.4)$$

Действительно, игрок A выигрывает, если игрок B ставит либо $\alpha < a$, либо, имея карту, меньшую чем ξ , ставит a ; игрок A проигрывает a , если игрок B ставит a , имея карту, лежащую между ξ и 1.

Выберем теперь такую функцию $\varphi(\alpha)$, чтобы функция $R(\beta)$ была постоянна. Если мы продифференцируем $R(\beta)$ по β , то получим

$$2\beta\varphi(\beta) - \int_{\beta}^a \varphi(\alpha) d\alpha - (1 - \xi_0) = 0. \quad (17.8.5)$$

Следующее дифференцирование дает $2\beta\varphi'(\beta) + 3\varphi(\beta) = 0$, или

$$\varphi(\beta) = k\beta^{-\frac{3}{2}}. \quad (17.8.6)$$

Если мы подставим это значение $\varphi(\beta)$ в соотношение (17.8.5) и проинтегрируем, то получим

$$2ka^{-\frac{1}{2}} = 1 - \xi_0. \quad (17.8.7)$$

Кроме того, поскольку стратегия игрока B есть вероятностное распределение, мы должны иметь

$$\int_b^a \varphi(\alpha) d\alpha + 1 - \xi_0 = 1, \quad (17.8.8)$$

откуда следует, что

$$2kb^{-\frac{1}{2}} - 2ka^{-\frac{1}{2}} = \xi_0. \quad (17.8.9)$$

Если мы сложим уравнения (17.8.7) и (17.8.9), то получим

$$k = \frac{\sqrt{b}}{2}, \quad \varphi(\alpha) = \frac{\sqrt{b}}{2} \alpha^{-\frac{3}{2}},$$

а из (17.8.7)

$$\xi_0 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

При таком выборе $\varphi(\alpha)$ и ξ_0 значение $R(\beta)$ не зависит от β и может быть вычислено для $\beta = b$; тогда в силу соотношения (17.8.8)

$$R(b) = -b \left(\int_b^a \varphi(\alpha) d\alpha + 1 - \xi_0 \right) = -b.$$

Рассмотрим теперь выражение (17.8.4) для функции $r(\xi)$, которое появляется в последнем случае. Ясно, что $r'(\xi) = 2a$, и для $\xi = \xi_0$

$$r(\xi_0) = \int_b^a \alpha \varphi(\alpha) d\alpha - a(1 - \xi_0) = R(a).$$

Так как мы знаем, что $R(a) = -b$, то заключаем, что

$$r(\xi) = -b + 2a(\xi - \xi_0).$$

Эти результаты можно суммировать следующим образом: если минимизирующий игрок следует стратегии, описанной выше, то ожидаемый выигрыш игрока A равен $-b$ для всех его карт и ставок, за исключением случая, когда $\xi > \xi_0$ и ставка равна a ; в этом случае ожидаемый выигрыш равен $-b + 2a(\xi - \xi_0)$.

Ясно, что если A хочет максимизировать свой выигрыш против данной стратегии, он может допускать любую систему ставок для карт $\xi \leq \xi_0$. Это не влияет на выигрыш. Однако для карт, больших чем ξ_0 , он должен назначать высшую возможную ставку; в этом случае он получает $-b + 2a(\xi - \xi_0) \geq -b$. Ясно, что стратегия минимизирующего игрока, построенная выше, подходит под это описание и, следовательно, оптимальна против такой же стратегии противника; так как игра симметрична, это утверждение показывает, что данная стратегия является оптимальной. Ожидаемый выигрыш равен

$$-b + 2a \int_{\xi_0}^1 (\xi - \xi_0) d\xi = -b + a(1 - \xi_0)^2 = 0,$$

что и должно быть.

17.9. Задачи.

1. Рассмотрим первую модель из п. 17.1 с теми же правилами игры. Будем, однако, считать, что понтирующий имеет возможность или пасовать, теряя свою первоначальную ставку, или ставить a_i ($i = 1, \dots, N$), где $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_N$. Банкомет всегда должен уравнивать ставку. Найти стратегию, которая максимизирует ожидаемый выигрыш понтирующего.

2. Решить первую модель из п. 17.1 для того случая, когда G является конечным дискретным распределением (т. е. охарактеризовать, каким образом решение этой игры отличается от решения в случае непрерывной G).

3. Решить модель покера из п. 17.2 для случая, когда игрок A получает карту согласно непрерывному распределению $F(\xi)$, игрок B получает карту согласно непрерывному распределению $G(\eta)$.

4. Вычислить значение игры для модели покера из п. 17.3.

5. Показать, что любая оптимальная стратегия игрока I в игре из п. 17.3 необходимо имеет вид (17.3.16).

6. Вычислить значение игры из п. 17.4.

7. Определить в явном виде решение модели покера из п. 17.4 для ставок $a = 2$, $b = 4$.

8. Доказать, что все решения модели покера, описанной в п. 17.4, характеризуются параметрами c , d , m_1 , m_2 , которые определяются уравнениями (17.4.7) — (17.4.11) и функцией $\varphi_2(\xi)$, удовлетворяющей условиям (17.4.17) и условию $\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) = 1$ для $\xi \in [c, d]$.

9. Рассмотрим модель покера из п. 17.6, в которой каждый игрок имеет возможность пасовать с самого начала, отказываясь, таким образом, от поставленной вначале единицы. Предположим, что $a > b > 1$. Если вначале пасуют оба игрока, то выигрыш каждого игрока равен нулю; во всех других отношениях игра остается без изменения. Показать (учитывая симметричность игры), что оптимальная стратегия имеет следующий вид: в интервале $[0, c]$ сразу пасовать; в интервале $[c, d]$ смешивать низкую и высокую ставки; в интервале $[d, 1]$ назначать высокую ставку. Определить параметры решения.

10. Найти в явном виде решение игры из п. 17.8 в случае трех уровней ставок ($n = 3$).

11. Рассмотрим модель покера из п. 17.6 с тремя уровнями ставок: c (низкая ставка), b (средняя ставка) и a (высокая ставка). Правила игры те же самые, т. е. оба игрока ставят одновременно; если ставки неодинаковы, то их нужно уравнивать, иначе игрок, поставивший более низкую ставку, теряет ее в пользу своего противника; если ставки равны (или уравнены), то сравниваются расклады и игрок с более высоким раскладом выигрывает банк.

12. Вам дают случайное вещественное число ξ согласно распределению $F(\xi)$. Вы можете либо сохранить это число, закончив таким образом игру, либо потребовать другое. Вы можете сделать этот выбор всего N раз; если вы уже осуществили его N раз, то вы обязаны сохранить N -е число. Найти стратегию, которая максимизирует ожидаемую величину. Дать явный ответ, если F есть равномерное распределение на единичном интервале, а N есть 2 или 3. (Указание: решать рекурсивно.)

13. Рассмотрим ту же игру, что и в задаче 12, с той, однако, разницей, что вы должны сохранять два из N чисел, так что если вы отказались от первых $N - 2$ чисел, предложенных вам, то вы должны принять два последних, а если вы приняли только одно из первых $N - 1$ чисел, то должны принять N -е число. Найти стратегию, которая максимизирует ожидаемую сумму этих двух величин. Дать явный ответ для $N = 3$ в случае, когда F — равномерное распределение на единичном интервале.

Задачи 14—18 основаны на следующей модели. Стратегиями игроков I и II являются соответственно векторы

$$\varphi(\xi) = (\varphi_1(\xi), \dots, \varphi_n(\xi)) \quad \text{и} \quad \psi(\eta) = (\psi_1(\eta), \dots, \psi_n(\eta)).$$

Выигрыш равен

$$K(\varphi, \psi) = \int_0^1 \int_0^1 R(\xi, \eta; \varphi, \psi) d\xi d\eta.$$

где

$$R(\xi, \eta; \varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \{a_i \varphi_i(\xi) - b_i \psi_i(\eta) + [c_i + d_i \operatorname{sign}(\xi - \eta)] \varphi_i(\xi) \psi_i(\eta)\}.$$

Для определенности мы предполагаем, что $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$, $d_i > 0$, а также что $0 \leq \varphi_i(\xi) \leq 1$ и $0 \leq \psi_i(\eta) \leq 1$.

Если никаких других ограничений не наложено, то $K(\varphi, \psi)$ есть сумма n независимых игр, каждая из которых может быть решена отдельно. В задачах 17 и 18 мы налагаем еще одно ограничение: $\sum \varphi_i(\xi) \leq 1$. В этом случае ядро K должно рассматриваться как целое. Применить методы этой главы к решению следующих задач.

14. Показать, что если $|c_i| > d_i$ и $-b_i + c_i + d_i \leq 0$, то стратегия $\psi_i(\eta) \equiv 1$ для всех i равномерно оптимальна против любой стратегии φ . Построить оптимальную стратегию φ^* в игре с ядром $K(\varphi, \psi)$.

15. Решить игру, в которой $|c_i| > d_i$ и $a_i + c_i - d_i \geq 0$.

16. Рассмотрим случай, когда $|c_i| < d_i$, $a_i + c_i - d_i < 0$ и $-b_i + c_i + d_i > 0$. Положим

$$\alpha_i = 1 - \frac{a_i}{d_i - c_i}, \quad \beta_i = 1 - \frac{b_i}{d_i + c_i}, \quad \gamma_i = \frac{d_i + c_i}{2d_i}, \quad \delta_i = \frac{d_i - c_i}{2d_i}.$$

Показать, что

(а) если $\gamma_i \beta_i > \alpha_i$, то оптимальными являются стратегии

$$\varphi_i^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < \alpha_i, \\ 1, & \text{если } \xi > \alpha_i, \end{cases} \quad \psi_i^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < \gamma_i \beta_i, \\ 1, & \text{если } \eta > \gamma_i \beta_i; \end{cases}$$

(б) если $\beta_i \geq \alpha_i \geq \gamma_i \beta_i$, то оптимальными являются стратегии

$$\varphi_i^*(\xi) = \begin{cases} m_i, & \text{если } \xi < \alpha_i, \\ 1, & \text{если } \xi \geq \alpha_i, \end{cases} \quad \psi_i^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < \alpha_i, \\ 1, & \text{если } \eta > \alpha_i, \end{cases}$$

где m_i удовлетворяют уравнениям

$$\alpha_i = \frac{d_i + c_i - b_i}{d_i + c_i + m_i(d_i - c_i)};$$

(в) если $\alpha_i \geq \beta_i \geq \delta_i \alpha_i$, то оптимальными являются стратегии

$$\varphi_i^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < \beta_i, \\ 1, & \text{если } \xi > \beta_i, \end{cases} \quad \psi_i^*(\eta) = \begin{cases} n_i, & \text{если } \eta < \beta_i, \\ 1, & \text{если } \eta \geq \beta_i, \end{cases}$$

где числа n_i удовлетворяют уравнениям

$$\beta_i = \frac{d_i - c_i - a_i}{d_i - c_i + n_i(d_i + c_i)};$$

(г) если $\delta_i \alpha_i > \beta_i$, то оптимальными являются стратегии

$$\varphi_i^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < \delta_i \alpha_i, \\ 1, & \text{если } \xi > \delta_i \alpha_i, \end{cases} \quad \psi_i^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < \delta_i \alpha_i, \\ 1, & \text{если } \eta > \delta_i \alpha_i. \end{cases}$$

17. Предположим, что мы наложим условия, указанные в описании модели, дополнив их условием $\sum \varphi_i(\xi) = 1$. Показать, что оптимальная стратегия ψ^* игрока II имеет вид

$$\psi_i^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < \eta_i, \\ 1, & \text{если } \eta > \eta_i. \end{cases}$$

18. В условиях задачи 17 (опустив условие $|c_i| < d_i$ и предполагая, что $b_i \leq 0$) показать, что оптимальная стратегия ψ^* игрока II, как и выше, характеризуется критическими числами η_i , где $\eta_i = 1$ или

$$\eta_i = 1 - \frac{a_i}{d_i - c_i} + \frac{\lambda^*}{d_i - c_i},$$

причем λ^* не зависит от i .

19. („Верись — не верись“.) Игрок I получает случайное число из единичного интервала. Он объявляет одно из чисел k/n ($k = 0, 1, \dots, n$), утверждая, что его число больше или равно объявленному. Игрок II говорит, верит ли он или не верит тому, что объявил игрок I. Если он верит и утверждение игрока I верно или если он не верит и утверждение игрока I неверно, то игрок II выигрывает одну единицу. Во всех остальных случаях игрок I выигрывает единицу. Найти пару оптимальных стратегий игры.

Комментарии и библиография к главе 17

Можно сказать, что во многих отношениях теория бесконечных игр возникла именно в результате изучения моделей покера. Впервые бесконечные игры были проанализированы математически фон Нейманом в 1926—1928 гг. [1]. (Полные результаты этого анализа, который был посвящен салонным играм, не были опубликованы вплоть до 1944 г.)

В течение многих лет большое внимание привлекал чисто вероятностный подход к общему исследованию покера. Многие авторы составили таблицы различных вероятностей получения тех или иных раскладов карт при сдаче из растасованной колоды.

Борель [1] посвятил обширную работу перечислению процентных отношений, связанных с бриджем и покером. Анализ покера, как математической игры, привлек внимание Вилля [1] в 1938 г., и в результате своего исследования игр типа покера он дал первое доказательство теоремы о минимаксе для игр с непрерывной функцией выигрыша.

Покер является богатым источником создания игровых моделей. При изучении многих примеров этой главы мы, кроме изложения более или ме-

нее стандартных методов их решения, пытались подчеркнуть общую идею, которую можно найти в их решении.

Читателю следует вспомнить модели покера, изложенные ранее (см. п. 4.3 и задачи к гл. 4). В связи с этим упомянем также работы Куна [1] и Боненбласта [1].

Покер с тремя игроками изучался Нэшем и Шепли [1], которые вычислили все возможные ситуации равновесия, связанные с одним из вариантов этой игры.

17.1. Идеализированные модели игр „черный валет“ и „красная собака“, изученные в этом пункте, принадлежат Беллману. В связи с этим некоторый интерес представляет нестрогое эмпирическое решение реальной игры „черный валет“, данное Болдуином, Конти, Майзелем и Мак-Дермоттом [1].

17.2. Простая модель покера с фиксированным размером ставки и одним кругом ставок, рассмотренная в этом пункте, впервые была сформулирована Беллманом [2]. Метод решения, рассматриваемый в этом пункте, является новым и представляет собой типичный пример применения общего метода неподвижной точки.

17.3. Изложенная в этом пункте модель была предложена Карлином и Рестрепо [1]. Свойства, которыми обладает рассматриваемая здесь функция выигрыша, были сформулированы в 1958 г. Рестрепо (не опубликовано). Используя несколько более сложные методы, основанные на той же идее, он смог решить значительно более широкий класс аналогичных игр. Его методы могут быть полезны при решении новых типов моделей покера и задач, связанных с принятием решения (см. задачи 14—18 этой главы).

17.4. Модель покера, описываемая в этом пункте, была предложена Беллманом [2], который частично ее и решил. Полное решение, основанное на методе неподвижной точки решения общих игр, дано Карлином и Рестрепо [1]. Независимо полностью исследовали ту же модель Голдман и Стоун (не опубликовано).

17.5. Первая законченная модель покера с k кругами ставок была сформулирована и решена Карлином и Рестрепо [1].

17.6. Модель покера с одновременными ходами изложена в классической книге по теории игр фон Неймана и Моргенштерна ([1], гл. 5). Исследование фон Неймана основано на дискретном варианте модели покера; решение непрерывного варианта модели получается отсюда переходом к пределу. Некоторое обобщение этой модели рассматривалось Аланом Голдманом и Джереми Стоуном (см. задачу 9). Методы этого пункта соответствуют методу неподвижной точки.

17.7. Формулировка игры „проходящий туз“ в качестве примера из теории игр принадлежит Дрешеру [5], который рассматривал дискретный вариант задачи. Непрерывная игра „проходящий туз“ исследовалась в работе Карлина и Рестрепо [1].

17.8. Две модели этого пункта принадлежат Джиллису, Мейберри и фон Нейману [1].

17.9. Задача 9 принадлежит Голдману и Стоуну. Утверждения задач 14—18 впервые были установлены Рестрепо [2].

Глава 10

Задача 1. Положим

$$m_n = \min_{0 \leq \eta \leq 1} \int K(\xi, \eta) d \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i^{(n)} x_{i/n}(\xi) \right)$$

и $\varepsilon_n = v_n - m_n$. Пусть для данного $\varepsilon > 0$ число δ таково, что если

$$(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 < \delta^2, \text{ то } |K(\xi, \eta) - K(\xi', \eta')| < \varepsilon.$$

В силу равномерной непрерывности функции K это возможно. Тогда, для любых

$$n > \frac{1}{\delta} \quad \text{и} \quad \frac{j-1}{n} \leq \eta \leq \frac{j+1}{n}$$

из $|K(\xi, \eta) - K(\xi, j/n)| < \varepsilon$ следует, что

$$\left| \int [K(\xi, \eta) - K(\xi, j/n)] d \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i^{(n)} x_{i/n}(\xi) \right) \right| < \varepsilon.$$

Поэтому

$$m_n > \min_j \int K(\xi, j/n) d \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i^{(n)} x_{i/n}(\xi) \right) - \varepsilon = v_n - \varepsilon$$

и, значит, $\varepsilon_n < \varepsilon$.

Задача 2. Прежде всего, стандартными рассуждениями устанавливается что $\sup \inf K \leq \inf \sup K$. Заметим теперь, что

$$x^{(n)} = \sum_{i=0}^n \lambda_i^{(n)} x_{i/n}(\xi)$$

и что из соотношения

$$\int K(\xi, \eta) dx^{(n)}(\xi) \geq v_n - \varepsilon_n$$

для всех η следует, что $\sup \inf K \geq v_n - \varepsilon_n$. Аналогично можно показать что $\inf \sup K \leq v_n + \varepsilon_n$. Из этих неравенств вытекает, что для произвольного ε

$$\inf \sup K \leq \sup \inf K + 2\varepsilon.$$

Задача 4. Непосредственным вычислением находим, что

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) d\xi = +1 \quad \text{и} \quad \int_0^1 K(\xi, \eta) d\eta = -1,$$

откуда и следует утверждение.

Задача 5. Пусть дано x ; выберем ξ так, что $x(1-0) - x(\xi-0) < \varepsilon$; пусть, далее, y^x , зависящее от x , определено, как y_ξ . Тогда

$$\begin{aligned} K(x, y^x) &= (-1)x(\xi-0) + x(1-0) - x(\xi) - [1 - x(1-0)] = \\ &= -1 + x(1-0) - x(\xi) + x(1-0) - x(\xi-0) \leq -1 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sup_x \inf_y K(x, y) \leq -1$, и если всюду $K \geq -1$, то $\sup_x \inf_y K = -1$. По соображениям симметрии $\inf_y \sup_x K = +1$.

Задача 6. См. Сайон и Вулф [1].

Задача 8. Рассмотрим интеграл $\int K^*(\xi, \eta) dx^0(\xi)$. Из равенства $L_{ij}(i/n, j/n) = 0$ следует, что для $\eta = j/n$ ($j = 0, 1, \dots, n$)

$$\int K^*(\xi, \eta) dx^0(\xi) = \int K(\xi, \eta) dx^0(\xi) \geq v.$$

С другой стороны, так как для $\eta \neq j/n$ $L_{ij}(i/n, \eta) > 0$, то

$$\int K^*(\xi, \eta) dx^0(\xi) > \int K(\xi, \eta) dx^0(\xi) \geq v$$

для $\eta \neq j/n$. Следовательно, по лемме 10.2.1, никакая оптимальная стратегия игрока II не может быть отлична от нуля в точках, отличных от j/n ($j = 0, 1, \dots, n$). Нам остается только применить предположение о единственности, касающееся оптимальной стратегии μ^0 матричной игры.

Задача 10. Условие задачи означает, что существует такая константа k , что

$$\int_0^1 \frac{(1+\xi)^a (1+\eta)^b}{(1+\xi\eta)^c} K \frac{\xi^m (1-\xi)^n}{(1+\xi)^p} d\xi = k,$$

или

$$K \int_0^1 (1+\xi)^{a-p} \xi^m (1-\xi)^n (1+\xi\eta)^{-c} d\xi = k (1+\eta)^{-b},$$

$$K \int_0^1 (1+\xi)^{a-p} \xi^m (1-\xi)^n \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha \binom{\alpha+c-1}{\alpha} \xi^\alpha \eta^\alpha d\xi =$$

$$= k \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha \binom{\alpha+b-1}{\alpha} \eta^\alpha.$$

Приравнивание коэффициентов при η^α дает нам равенства

$$K \int_0^1 (1+\xi)^{a-p} \xi^{m+\alpha} (1-\xi)^n \binom{\alpha+c-1}{\alpha} d\xi = k \binom{\alpha+b-1}{\alpha} \quad (\alpha = 0, 1, 2, \dots).$$

Полагая $p = a$ и вычисляя значение интеграла, мы получаем

$$K \frac{\Gamma(m+\alpha+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+\alpha+2)} \frac{\Gamma(\alpha+c)}{\Gamma(c)} = k \frac{\Gamma(\alpha+b)}{\Gamma(b)} \quad (\alpha = 1, 2, \dots). \quad (*)$$

Если положить $m = b - 1$ и $m + n + 2 = c$ при соответствующем выборе константы k , то соотношение (*) будет верно для любого целого a . Таким образом, $m = b - 1$ и $n = c - b - 1$.

Определим теперь K из соотношения

$$K \int_0^1 \frac{\xi^m (1-\xi)^n}{(1+\xi)^p} d\xi = 1,$$

что возможно, так как $c > b > 0$. Аналогичные вычисления показывают, что для игрока II $m = a - 1$, $n = c - a - 1$ и $p = b$.

Задача 11.

$$\text{а) } x^0 = y^0 = \frac{1}{3} I_0 + \frac{1}{3} I_{1/2} + \frac{1}{3} I_1; \quad v = \frac{2+\lambda}{2};$$

$$\text{б) } x^0 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1; \quad y^0 = \frac{1}{2} I_{1/2} + \frac{1}{2} I_1; \quad v = \frac{\lambda+1}{2}, \text{ если } \lambda < 1,$$

$$x^0 = \frac{1}{2} I_{1/2} + \frac{1}{2} I_1; \quad y^0 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1; \quad v = \frac{\lambda+1}{2}, \text{ если } \lambda > 1.$$

Задача 12. Рассмотрим соотношение

$$\int_0^{B+1} K(\xi, \eta) dx(\xi) = (1-\theta)x(\eta) + x(\eta+1) - x(\eta) = x(\eta+1) - \theta x(\eta) = c$$

$$(0 \leq \eta \leq B),$$

где c константа, которую мы определим ниже. Тогда

$$x(1) = c + \theta x(0); \quad x(2) = c(1+\theta) + \theta^2 x(0); \dots;$$

$$x(n+1) = c(1+\theta+\theta^2+\dots+\theta^n) + \theta^{n+1}x(0).$$

Так как игрок I желает, чтобы c было максимальным, он должен взять

$$x(n+1) = x(B+1) = 1 \quad \text{и} \quad x(0) = 0.$$

Следовательно,

$$x(1) = c; \quad x(2) = c(1+\theta); \dots; \quad x(n+1) = c(1+\theta+\dots+\theta^n) = 1.$$

Но функция x на интервале $[n+1, B+1]$ постоянна, и, следовательно она должна быть постоянной на интервалах $[n-i+1, B-i+1]$, где $i=2, \dots, n+1$. Никаких других условий из нашего функционального уравнения не вытекает, т. е. x может быть произвольной функцией распределения на промежутке $[B-n, 1]$, подчиненной единственному условию $x(1) = c$. В частности, мы можем взять простейшую из всех таких функций распределения, именно ту, которая имеет в точке 1 скачок, равный c . Тогда

$$x(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < 1, \\ c(1+\theta+\dots+\theta^{i-1}), & \text{если } i \leq \xi < i+1 \quad (i=1, 2, \dots, n+1), \end{cases}$$

где

$$c = \frac{1}{1+\theta+\dots+\theta^n} = \frac{1-\theta}{1-\theta^{n+1}}.$$

Аналогично легко показать, что стратегия

$$y(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta < 0, \\ c(\theta^n+\dots+\theta^{n-i}), & \text{если } i \leq \eta < i+1 \quad (i=0, 1, \dots, n), \end{cases}$$

является оптимальной для игрока II.

Глава 11

Задача 1. $\xi^0 = \left(\frac{1}{7}, 0, \frac{6}{7}\right)$; $\eta^0 = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right)$; $v = \frac{2}{7}$.

Задача 3. Любая стратегия является оптимальной для игрока I; $y^0 = I_0$; $v = 0$.

Задача 5. (а) $x^0 = y^0 = I_0$; $v = 0$; (б) $x^0 = I_1$; $y^0 = \alpha I_0 + (1 - \alpha) I_1$, где $0 \leq \alpha \leq 1$; $v = 0$.

Задача 6. Пусть $y^0 = I_1$. Тогда из того факта, что при всех значениях ξ , кроме $\xi = 1$,

$$\int K(\xi, \eta) dy^0(\eta) = \xi^3 - 1 < 1,$$

следует, что 1 является единственной точкой спектра оптимальных стратегий игрока I. Следовательно, $x^0 = I_1$. С другой стороны, из того, что всюду, кроме точек $\eta = 0, 1$, имеет место

$$\int K(\xi, \eta) dx^0(\xi) = \eta - \eta^2 > 0,$$

следует, что 0 и 1 — единственные возможные точки спектра оптимальных стратегий игрока II.

Задача 8. Любая стратегия игрока I, первые два момента r_1 и r_2 которой удовлетворяют равенству $3r_2 + 2r_1 = 2$, оптимальна. Аналогично оптимальна любая стратегия игрока II, первые два момента s_1 и s_2 которой удовлетворяют равенству $4s_2 + 3s_1 = 2$. В частности, оптимальными являются стратегии $x^0 = \frac{3}{5}I_0 + \frac{2}{5}I_1$ и $y^0 = \frac{5}{7}I_0 + \frac{2}{7}I_1$.

Задача 9. См. Дрешер и Карлин [1]; русский перевод в сб. [1].

Задача 11. В измененной игре единственной оптимальной стратегией игрока I является стратегия $x^0 = x_0 = I_0$ и $v = 0$, но для игрока II оптимальными являются как стратегия $y^0 = y_0$, так и стратегия $y^0 = y_e$.

Задача 12. По предположению, пересечение множеств, определяемых уравнениями $f_j(r) = 0$, должно состоять из одной точки r^0 , а пересечение множеств, определяемых уравнениями $g_i(s) = 0$, — из единственной точки s^0 . Кроме того, достаточно малые изменения функций сохраняют точки r^0 и s^0 на внутренности соответственно R и S и, следовательно, дают единственные устойчивые оптимальные стратегии. Но так как обе стратегии являются внутренними, все оптимальные стратегии обоих игроков должны быть устойчивыми.

Задача 14. $P^* = P$.

Задача 15. См. Дрешер и Карлин [1], русский перевод в сб. [1], стр. 186 — 187.

Задача 16. См. Там же, стр. 187 — 188.

Задача 17. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{vmatrix} v+1 & -\frac{1}{ns_1^0} & \dots & -\frac{1}{ns_n^0} \\ -\frac{1}{nr_1^0} & \frac{1}{nr_1^0 s_1^0} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{1}{nr_n^0} & 0 & & \frac{1}{nr_n^0 s_n^0} \end{vmatrix}.$$

Ясно, что $As^0 = (v, 0, \dots, 0)$ и $r^0 A = (v, 0, \dots, 0)$, а ранг A равен n . Поскольку точка r^0 является внутренней, то любая оптимальная стратегия игрока II должна быть устойчивой. Кроме того, если стратегия $s = (1, s_1, \dots, s_n)$ игрока II оптимальна, то для $1 \leq i \leq n$

$$-\frac{1}{nr_i^0} + \frac{1}{nr_i^0 s_i^0} s_i = 0.$$

Отсюда следует, что $-1 + (s_i/s_i^0) = 0$. Следовательно, $s_i = s_i^0$, и оптимальная стратегия игрока II единственна. Аналогичные рассуждения применимы к игроку I.

Задача 18. Решается аналогично тому случаю, когда $h_r(t) = t^r$.

Глава 12

Задача 1. $x^0 = I_1$; $y^0 = I_0$; $v = K(1, 1)$.

Задача 3. $x^0 = \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}I_1$; $y^0 = I_{1/2}$; $v = \frac{1}{4}$.

Задача 5. (а) $K(\xi, \eta_0) = K(\xi \cdot 1 + (1 - \xi) \cdot 0, \eta_0) \leq \xi K(1, \eta_0) + (1 - \xi) \times K(0, \eta_0) \leq K(0, \eta_0) \leq K(0, \eta)$. Следовательно, $(0, \eta_0)$ является седловой точкой.

(б) аналогично (а).

(в) Пусть $L_0(\eta)$ — опорная прямая к $K(0, \eta)$ в точке η^* , а $L_1(\eta)$ — опорная прямая к $K(1, \eta)$ в точке η^* . Тогда, поскольку одна из этих функций возрастает, а другая убывает, существует такое λ ($0 < \lambda < 1$), что для всех η

$$\lambda L_0(\eta) + (1 - \lambda) L_1(\eta) = K(0, \eta^*).$$

Положим $x^0 = \lambda I_0 + (1 - \lambda) I_1$; тогда мы будем иметь

$$K(x^0, \eta) = \lambda K(0, \eta) + (1 - \lambda) K(1, \eta) \geq \lambda L_0(\eta) + (1 - \lambda) L_1(\eta) = K(0, \eta^*).$$

Кроме того,

$$K(\xi, \eta^*) \leq \xi K(1, \eta^*) + (1 - \xi) K(0, \eta^*) = K(0, \eta^*).$$

Интегрируя, мы получаем

$$K(x^0, y) \geq K(0, \eta^*) \geq K(x, \eta^*),$$

и, следовательно, x^0 и y_{η^*} являются оптимальными стратегиями, причем $v = K(0, \eta^*)$.

Задача 7. $x^0 = I_0$ или I_1 (или является их комбинацией); $y^0 = I_0$ или I_1 ; $v = 0$.

Задача 10. Применить теорему 12.3.1 к обоим игрокам.

Задача 11. Предположим противное. Пусть

$$h(\eta) = \int K(\xi, \eta) dx^*(\xi),$$

где x^* — оптимальная стратегия игрока I. Тогда $h^{(3)}(\eta) > 0$ и $h(\eta) \geq v$, причем равенство имеет место в точках η_0 и 1. Следовательно, $h^{(2)}(\eta_0) > 0$, и h достигает относительного максимума в промежутке $(\eta_0, 1)$; следовательно, $h^{(2)}(\eta_1) < 0$. Из теоремы о среднем значении следует, что $h^{(3)}(\eta) < 0$ для некоторого η ($\eta_0 \leq \eta \leq \eta_1$), что противоречит предположенному.

Задача 12. В обозначениях п. 12.3

$$\eta_1^0 = 5, \quad \eta_2^0 = 3 \frac{3}{4}, \quad \eta_3^0 = 1 \frac{1}{4}; \quad \lambda_1^0 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_2^0 = \frac{5}{16}, \quad \lambda_3^0 = \frac{7}{16}.$$

Задача 13. Функция выигрыша выпукла по η для каждого значения ξ . Следовательно, здесь применимы результаты п. 12.4: игрок II имеет оптимальную чистую стратегию, а игрок I оптимальную стратегию, спектр которой содержит $n+1$ точку. Действительно, нуль является оптимальной стратегией игрока II, а любое симметричное распределение на границе является оптимальной стратегией игрока I, например, достаточно двух точек.

Задача 14. Аналогична задаче 13.

Задача 15. Если мы предположим, что

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^0 a_i = 0,$$

то

$$1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 (a_i, a_i - \eta) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 |a_i| |a_i - \eta| = \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 |a_i - \eta|.$$

Следовательно, для всех η и λ

$$K(\lambda^0, \eta) \geq 1 = K(\lambda^0, 0) = K(\lambda, 0).$$

С другой стороны, из оптимальности λ^* следует, что

$$K(\lambda^*, \eta) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* |a_i - \eta| \geq 1$$

для всех η . Таким образом,

$$1 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i^*} \sqrt{\lambda_i^*} |a_i - \eta| \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \sum_{i=1}^m \lambda_i^* |a_i - \eta|^2 = 1 - 2(z, \eta) + |\eta|^2,$$

где

$$z = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* a_i.$$

Возьмем теперь $\eta = \frac{z}{2}$. Тогда из неравенства $-|z|^2 + \frac{1}{4}|z|^2 \geq 0$ следует, что $z = 0$.

Задача 16. По теореме 12.4.1 существуют такие числа ξ_i ($i = 1, \dots, n+1$) и опорные гиперплоскости $L_i(\eta)$ к $K(\xi_i, \eta)$ в точке η_0 (η_0 — чистая оптимальная стратегия игрока II), что для всех η из B

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i K(\xi_i, \eta) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i L_i(\eta) \geq v, \quad (*)$$

где $\lambda_i \geq 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Докажем теперь, что существует выпуклая комбинация не более чем n различных чисел ξ_i , обладающая этим свойством. С этой целью расширим множество B следующим образом. Для каждой крайней точки множества опорных гиперплоскостей к B в точке η^0 выберем замкнутое полупространство, содержащее B . Имеется не более чем n крайних точек, и пересечение соответствующих полупространств будет замкнутым выпуклым множеством C , содержащим B . Множество C обладает тем свойством, что если η принадлежит C , то $f(\eta) = \sum \lambda_i L_i(\eta) \geq v$. Действительно, если η является внутренней точкой C , то луч, соединяющий η и η_0 , должен содержать некоторую точку $\eta_1 \neq \eta_0$, которая принадлежит множеству B . Тогда $\eta_1 = \alpha \eta_0 + (1 - \alpha) \eta$ и

$$f(\eta_1) = \alpha f(\eta_0) + (1 - \alpha) f(\eta).$$

Так как $f(\eta_0) = v$, а $f(\eta_1) \geq v$, то $f(\eta) \geq v$. Если η находится на границе C , то это неравенство сохраняет силу на основании непрерывности f . Наконец, поскольку число k крайних гиперплоскостей не превосходит n , мы можем найти симплекс S ровно с $n+1$ вершинами $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{n+1}$, такими, что $C \supset S \supset B$. Точка η_0 все еще является граничной точкой S .

Определим теперь вспомогательную матричную игру, полагая $a_{ij} = L_i(\mathbf{d}_j)$. Пространства стратегий будут обычными симплексами в E^{n+1} . Если максимизирующий игрок выбирает вектор λ , удовлетворяющий соотношению (*), то он получает $\sum \lambda_i L_i(\mathbf{d}_j) \geq v$. С другой стороны, первоначальная стратегия η_0 может быть представлена как выпуклая комбинация $\alpha_1 \mathbf{d}_1 + \dots + \alpha_{n+1} \mathbf{d}_{n+1}$. Если минимизирующий игрок в матричной игре использует стратегию $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})$, то выигрыш игрока I для каждого i равен $L_i(\eta_0) = v$. Следовательно, λ и α являются оптимальными стратегиями, а v есть значение игры. Так как η_0 находится на границе S , оптимальная стратегия α содержит не более n ненулевых компонент. Согласно задаче 20 гл. 3, в нашей матричной игре имеется оптимальная стратегия λ^* , имеющая не более n ненулевых компонент. Для простоты предположим, что ими являются первые n компонент. Утверждается, что стратегия

$$x^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* I_{\xi_i}$$

является оптимальной для игрока I. Действительно,

$$\int K(\xi, \eta) dx^*(\xi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* K(\xi_i, \eta) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i^* L_i(\eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_i^* \beta_j L_i(\mathbf{d}_j) \geq v,$$

где

$$\eta = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j d_j, \quad \beta_j \geq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = 1.$$

Задача 17. Может иметься не более чем одномерное семейство опорных гиперплоскостей в любой точке и, следовательно, не более двух крайних точек.

Задача 18. См. сборник [11]

Глава 13

Задача 2. $n = 3$, $a = 0,568$, $\beta = 0,124$; $n = 4$, $a = 0,626$, $\beta = 0,160$.

Задача 4. $x^0 = y^0$ имеет плотность

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \xi < \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2} \xi^{-3/2}, & \text{если } \frac{1}{4} \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Значение игры равно нулю.

Задача 5. Функция выигрыша имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta) = p_1 p_2 \xi \eta - p_2 \eta + p_1 \xi, & \text{если } \xi < \eta, \\ \varphi(\xi) = (p_1 - p_2) \xi, & \text{если } \xi = \eta, \\ M(\xi, \eta) = -p_1 p_2 \xi \eta - p_2 \eta + p_1 \xi, & \text{если } \xi > \eta. \end{cases}$$

Так как $L(0, 0) = M(0, 0)$, это ядро попадает в группу 2. Здесь

$$T(\xi, t) = \begin{cases} \frac{1 - p_1 \xi}{2 p_1 t^2}, & \text{если } a \leq \xi < t \leq 1, \\ \frac{1 + p_1 \xi}{2 p_1 t^2}, & \text{если } a \leq t \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Тогда уравнение $(I - T_a)f = 0$ принимает вид

$$2 p_1 t^2 f(t) - 1 + p_1 \int_a^t \xi f(\xi) d\xi - p_1 \int_t^1 \xi f(\xi) d\xi = 0,$$

откуда следует, что $f(t) = k_1 t^{-3}$, где k_1 и a должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{k_1}{2} \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \left(\frac{1}{a} + 1 \right) = 1 \quad \text{и} \quad p_1 k_1 \left(1 + \frac{1}{a} \right) = 1.$$

Следовательно, $a = 1/(1 + 2p_1)$; аналогично $b = 1/(1 + 2p_2)$. Не умаляя общности, можно рассмотреть только случай $p_2 > p_1$, т. е. $a > b$. Мы должны рассмотреть уравнение

$$(I - U_a)g_a = \delta g_1.$$

Так как $L_\xi(u, \eta)$ не зависит от u , решение этого уравнения имеет тот же вид, что и выше. Это означает, что $g_a(u) = k_2 u^{-3}$, где k_2 и δ удовлетворяют уравнениям

$$p_2 k_2 \left(1 + \frac{1}{a}\right) = 1 + \delta p_2 \quad \text{и} \quad \frac{k_2}{2} \left(\frac{1}{a} + 1\right) \left(\frac{1}{a} - 1\right) = 1 - \delta.$$

Решая эти уравнения относительно k_1 , k_2 и δ , мы найдем, что плотность распределения x^0 есть

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \xi < \frac{1}{1+2p_1}, \\ \frac{1}{2p_1(1+p_1)} \xi^{-3}, & \text{если } \frac{1}{1+2p_1} \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

а плотность y^0 есть

$$g(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \eta < \frac{1}{1+2p_1}, \\ \frac{1+p_2}{2p_2(1+p_1)^2} \eta^{-3}, & \text{если } \frac{1}{1+2p_1} \leq \eta \leq 1, \end{cases}$$

причем y^0 имеет, кроме того, в точке 1 скачок, равный $(p_2 - p_1)/p_2(1 + p_1)$. Значение игры равно $-(p_2 - p_1)/(1 + p_1)$.

Задача 6. Функция выигрыша имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta) = p_1 \xi \alpha + p_2 \eta \beta - p_1 p_2 \xi \eta \beta, & \text{если } \xi < \eta, \\ \varphi(\xi) = (p_1 \alpha + p_2 \beta) \xi, & \text{если } \xi = \eta, \\ M(\xi, \eta) = p_1 \xi \alpha + p_2 \eta \beta - p_1 p_2 \xi \eta \alpha, & \text{если } \xi > \eta. \end{cases}$$

Так как $L(0, 0) = M(0, 0)$, это ядро попадает в группу 2, и

$$T(\xi, t) = \begin{cases} \frac{-\beta + p_1 \beta \xi}{p_1 t^2 (\alpha - \beta)}, & \text{если } a \leq \xi < t \leq 1, \\ \frac{-\beta + p_1 \alpha \xi}{p_1 t^2 (\alpha - \beta)}, & \text{если } a \leq t \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Уравнение $(I - T_a)f = 0$ принимает вид

$$p_1 t^2 (\alpha - \beta) f(t) + \beta - p_1 \beta \int_a^t \xi f(\xi) d\xi - p_1 \alpha \int_t^1 \xi f(\xi) d\xi = 0,$$

откуда следует, что $f(t) = kt^{-3}$, где k и a должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{k}{2} \left(\frac{1}{a} - 1\right) \left(\frac{1}{a} + 1\right) = 1 \quad \text{и} \quad p_1 k \left(\alpha - \frac{\beta}{a}\right) = -\beta.$$

Следовательно,

$$a = \frac{\sqrt{p_1^2 + 1 - 2(\alpha/\beta)p_1} - p_1}{1 - 2(\alpha/\beta)p_1}.$$

Аналогично,

$$b = \frac{\sqrt{p_2^2 + 1 - 2(\beta/\alpha)p_2} - p_2}{1 - 2(\beta/\alpha)p_2}.$$

(Заметим, что

$$\frac{1}{a} = p_1 + \sqrt{p_1^2 + 1 - 2p_1(\alpha/\beta)};$$

с этим выражением удобнее работать.)

Неравенство $a > b$ эквивалентно неравенству

$$p_2 > p_1 \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 + 1 - 2(\alpha/\beta)p_1}}{2p_1 - (\beta/\alpha)},$$

и мы, как и выше, рассмотрим только этот случай. (Заметим, что коэффициент при p_1 больше единицы, если $-\alpha/\beta > 1$, и меньше единицы, если $-\alpha/\beta < 1$.) Как и в предыдущей задаче, мы видим, что $g_a(u) = k_2 u^{-3}$, где k_2 и δ удовлетворяют уравнениям

$$-a + p_2 \frac{\alpha k_2}{a} - p_2 \beta k_2 + p_2 \delta \beta = 0 \text{ и } \frac{k_2}{2} \left(\frac{1}{a^2} - 1 \right) = 1 - \delta.$$

Решая их относительно k , k_2 и δ , мы получаем

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{p_1 [(1/a) - (\alpha/\beta)]}, \\ k_2 &= \frac{1 - p_2 (\beta/\alpha)}{p_2 [(1/a) - (\beta/\alpha)] - p_1 p_2 (\beta/\alpha) [(1/a) - (\alpha/\beta)]}, \\ \delta &= \frac{p_2 [(1/a) - (\beta/\alpha)] - p_1 [(1/a) - (\alpha/\beta)]}{p_2 [(1/a) - (\beta/\alpha)] - p_1 p_2 (\beta/\alpha) [(1/a) - (\alpha/\beta)]}. \end{aligned}$$

Интересно отметить, что стратегии зависят только от отношения α к β , и поэтому если $\alpha/\beta = -1$, то мы получаем предыдущий случай. Значение игры равно

$$\alpha \left(\frac{2p_1}{(1/a) + 1} - \frac{p_2 [1 - (\beta/\alpha)]}{[(1/a) - (\alpha/\beta)]} \right).$$

Задача 7. Используя методы гл. 13, мы получаем, что стратегия x^0 имеет плотность

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \xi < e^{-2}, \\ \frac{e^{-2}}{2\xi^2}, & \text{если } e^{-2} \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

и имеет в точке 1 скачок, равный $(1 + e^{-2})/2$; стратегия y^0 имеет плотность

$$g(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \eta < e^{-2}, \\ \frac{1}{2\eta}, & \text{если } e^{-2} \leq \eta \leq 1, \end{cases}$$

и значение игры

$$v = \frac{1 + e^{-2}}{2}.$$

Задача 8. Функция выигрыша равна

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} lp(\xi) - sp(\eta) + lsp(\xi)p(\eta), & \text{если } \xi > \eta, \\ (l-s)p(\xi), & \text{если } \xi = \eta, \\ lp(\xi) - sp(\eta) - lsp(\xi)p(\eta), & \text{если } \xi < \eta. \end{cases}$$

Соотношение $(I - T_a)f = 0$ показывает нам, что $f(t) = kp'(t)/p^3(t)$, где k и a должны удовлетворять уравнениям

$$lk \left(\frac{1}{p(a)} + \frac{1}{p(1)} \right) = 1 \text{ и } \frac{k}{2} \left(\frac{1}{p^2(a)} - \frac{1}{p^2(1)} \right) = 1.$$

Следовательно, a — единственный в интервале $(0, 1)$ корень уравнения $p(a) = p(1)/[1 + 2lp(1)]$. Аналогично b — единственный в интервале $(0, 1)$ корень уравнения $p(b) = p(1)/[1 + 2sp(1)]$. Так как $l > s$, то $p(a) < p(b)$ и, следовательно, $a < b$. Далее, $f_a(t) = k_1 p'(t)/p^3(t)$, где

$$k_1 l \left(\frac{1}{p(b)} + \frac{1}{p(1)} \right) = 1 + \beta l p(1) \text{ и } \frac{k_1}{2} \left(\frac{1}{p^2(b)} - \frac{1}{p^2(1)} \right) = 1 - \beta.$$

Решая эти уравнения, мы найдем, что оптимальная стратегия большой компании имеет плотность

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq t < p^{-1} \left(\frac{p(1)}{1 + 2sp(1)} \right), \\ \frac{p(1)[1 + lp(1)]}{2l[1 + sp(1)]^2} \frac{p'(t)}{p^3(t)}, & \text{если } p^{-1} \left(\frac{p(1)}{1 + 2sp(1)} \right) \leq t \leq 1, \end{cases}$$

а в точке 1 имеет скачок, равный $(l - s)/[1 + sp(1)]l$. Оптимальная стратегия малой компании имеет плотность

$$g(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq u < p^{-1} \left(\frac{p(1)}{1 + 2sp(1)} \right), \\ \frac{p(1)}{2s[1 + sp(1)]} \frac{p'(u)}{p^2(u)}, & \text{если } p^{-1} \left(\frac{p(1)}{1 + 2sp(1)} \right) \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Значение игры равно $(l - s)p(1)/[1 + sp(1)]$.

Задача 10. Если a или b [выраженные формулами (13.5.4) и (13.5.6)] неотрицательны, то ядро принадлежит группе 2 и решение дано. Если и a и b отрицательны, то ядро принадлежит либо группе 3, либо группе 4; простое вычисление показывает, что ядро принадлежит группе 3, если $P_1(0) + P_2(0) < 1$, и группе 4, если $P_1(0) + P_2(0) \geq 1$. Кроме того, ясно, что случаи Д, Е, Ж и З здесь быть не может. Однако ясно, что в каждой группе может встретиться любой из остальных трех случаев.

Задача 12. Предположим, что оптимальные стратегии обоих игроков имеют скачок в точке 1 и $M(1, 1) < \Phi(1)$. Так как стратегия игрока II имеет в точке 1 скачок, то

$$\int_0^1 K(\xi, 1) dx^0(\xi) = v.$$

Выберем число η настолько близким к 1, чтобы выполнялись условия:
(1) $L(\xi, \eta) - L(\xi, 1) < \epsilon$ для $0 \leq \xi \leq \eta$ и $M(1, \eta) - M(1, 1) < \epsilon$ ввиду равномерной непрерывности L и M .

(2) $1 - \alpha - x^0(\eta) < \epsilon$, где α — скачок x^0 в точке 1.

(3) η является точкой непрерывности x^0 .

Тогда, обозначая через C границу для $L(\xi, \eta)$ и $M(\xi, \eta)$, мы будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(\xi, \eta) dx^0(\xi) &= \int_0^\eta L(\xi, \eta) dx^0(\xi) + \int_\eta^1 M(\xi, \eta) dx^0(\xi) \leq \\ &\leq \int_0^\eta [L(\xi, 1) + \varepsilon] dx^0(\xi) + [M(1, 1) + \varepsilon][1 - x^0(\eta)] \leq \\ &\leq \int_0^{1-\varepsilon} L(\xi, 1) dx^0(\xi) + [1 - \alpha - x^0(\eta)][C + M(1, 1)] + \alpha M(1, 1) + \varepsilon \leq \\ &\leq \int_0^1 K(\xi, 1) dx^0(\xi) + \varepsilon(2C + 1) + \alpha[M(1, 1) - \Phi(1)] = \\ &= v + \varepsilon(2C + 1) + \alpha[M(1, 1) - \Phi(1)] < v \end{aligned}$$

для достаточно малого ε , что, однако, противоречит условию. Следовательно, $\Phi(1) \leq M(1, 1)$. К аналогичному противоречию приводит предположение о том, что $\Phi(1) < L(1, 1)$. Следовательно, $\Phi(1) \geq L(1, 1)$ и, очевидно, $(1, 1)$ является седловой точкой.

Задача 15. Интегральное уравнение (13.2.2) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} f(t) = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n p_i(t) q_i(t)} &\left(- \int_a^t \sum_{i=1}^n p_i(\xi) q'_i(t) f(\xi) d\xi + \right. \\ &\left. + \int_t^1 \sum_{i=1}^n p'_i(t) q_i(\xi) f(\xi) d\xi - \alpha \sum_{i=1}^n p_i(0) q'_i(t) + \beta \sum_{i=1}^n p'_i(t) q_i(1) \right). \end{aligned}$$

Положим

$$P_i(t) = \int_t^1 p_i(\xi) f(\xi) d\xi \text{ и } Q_i(t) = \int_t^1 q_i(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Таким образом,

$$P'_i(t) = -p_i(t) f(t), \quad Q'_i(t) = -q_i(t) f(t); \quad P_i(1) = 0, \quad Q_i(1) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P'_j(t) = \frac{p_j(t)}{2 \sum_{i=1}^n p_i(t) q_i(t)} &\left(\sum_{i=1}^n q'_i(t) [P_i(a) - P_i(t) + \alpha p_i(0)] - \right. \\ &\left. - \sum_{i=1}^n p'_i(t) [Q_i(t) + \beta q_i(1)] \right). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение имеет место и для $Q'_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$). Эта система затем решается с соответствующими граничными условиями, а $f(t)$ определяется, например, из $P_1(t)$.

Задача 16. Мы уже доказали существование такой оптимальной стратегии игрока II, что

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dy^0(\eta) < v \quad (0 < \xi < a).$$

(Если $a = 0$, то это несущественно.) Поэтому спектр любой оптимальной стратегии игрока I должен быть ограничен точкой $\{0\}$ и сегментом $[a, 1]$. Пусть η_0 — точка интервала $(a, 1)$; предположим, что оптимальная стратегия $x(\xi)$ игрока I имеет разрыв в точке η_0 . Тогда из равенства

$$\int_0^{\eta} L(\xi, \eta) dx(\xi) + \int_{\eta}^1 M(\xi, \eta) dx(\xi) = v \quad (a < \eta < 1)$$

по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует

$$\int_0^{\eta_0-0} L(\xi, \eta_0) dx(\xi) + \int_{\eta_0-0}^1 M(\xi, \eta_0) dx(\xi) = v$$

и

$$\int_0^{\eta_0+0} L(\xi, \eta_0) dx(\xi) + \int_{\eta_0+0}^1 M(\xi, \eta_0) dx(\xi) = v.$$

Следовательно, если ε_0 — величина скачка в точке η_0 , то $\varepsilon_0 [L(\eta_0, \eta_0) - M(\eta_0, \eta_0)] = 0$; так как на интервале $[a, 1]$ $L(\eta, \eta) > M(\eta, \eta)$, отсюда следует, что $\varepsilon_0 = 0$. Рассматривая точку a , мы по-прежнему имеем

$$\int_0^{a+0} L(\xi, a) dx(\xi) + \int_{a+0}^1 M(\xi, a) dx(\xi) = v,$$

и

$$\int_0^{a-0} L(\xi, a) dx(\xi) + \int_{a-0}^1 M(\xi, a) dx(\xi) \leq v.$$

Следовательно, $\varepsilon_0 [M(a, a) - L(a, a)] \geq 0$. Как и раньше, из $L(a, a) > M(a, a)$ вытекает, что $\varepsilon_0 \leq 0$ и, значит, $\varepsilon_0 = 0$.

Задача 17. Так как известная оптимальная стратегия игрока II на сегменте $[a, 1]$ отлична от нуля, из оптимальности стратегии x следует, что

$$\int K(\xi, \eta) dx(\xi) = v, \quad a < \eta < 1.$$

Обозначая через α возможный скачок x в точке 0, а через β — возможный скачок x в точке 1, мы имеем

$$\begin{aligned} v &= \alpha L(0, \eta) + \int_a^\eta L(\xi, \eta) dx(\xi) + \int_\eta^{1-0} M(\xi, \eta) dx(\xi) + \beta M(1, \eta) = \\ &= \alpha L(0, \eta) + L(\eta, \eta) x(\eta) - L(a, \eta) x(a) - \int_a^\eta x(\xi) L_\xi(\xi, \eta) d\xi + \\ &+ M(1, \eta) x(1-0) - M(\eta, \eta) x(\eta) - \int_\eta^1 x(\xi) M_\xi(\xi, \eta) d\xi + \beta M(1, \eta) \\ &\quad (a \leq \eta < 1), \end{aligned}$$

где второе равенство получено в результате интегрирования по частям. Все функции, входящие в это выражение, абсолютно непрерывны и имеют ограниченные производные. Так как на рассматриваемом интервале $L(\eta, \eta) - M(\eta, \eta) > 0$, то деление на эту величину доказывает абсолютную непрерывность $x(\xi)$. Путем дифференцирования последнего уравнения и деления на $L(\eta, \eta) - M(\eta, \eta)$ можно установить непрерывность $x'(\xi)$.

Задача 18. Ход доказательства на этом последнем шаге зависит от того, какой из случаев имеет место. Выберем случай F как типичный. Все остальные случаи рассматриваются аналогично. Из решения предыдущих двух задач мы знаем, что $x = (\alpha_1 J_0, f, \beta_1 J_1)$. Предположим, что $\beta_1 > 0$. Тогда

$$v = \int_0^1 K(1, \eta) dy^0(\eta) = \gamma M(1, 0) + \int_a^1 M(1, \eta) g_a(\eta) d\eta + \delta \Phi(1),$$

и так как $\delta > 0$, то

$$v = \int_0^1 K(\xi, 1) dx(\xi) = \alpha_1 L(0, 1) + \int_a^1 L(\xi, 1) f(\xi) d\xi + \beta_1 \Phi(1).$$

Кроме того, переходя, как это мы уже делали в задаче 16, к пределам, мы получаем

$$\begin{aligned} v &= \gamma M(1, 0) + \int_a^1 M(1, \eta) g_a(\eta) d\eta + \delta L(1, 1), \\ v &= \alpha_1 L(0, 1) + \int_a^1 L(\xi, 1) f(\xi) d\xi + \beta_1 M(1, 1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$0 = \beta_1 [\Phi(1) - M(1, 1)] = \delta [\Phi(1) - L(1, 1)],$$

и, значит, $M(1, 1) = L(1, 1)$, что противоречит условию.

Следовательно, $\beta_1 = 0$.

Далее, дифференцирование равенства

$$v = \alpha_1 L(0, \eta) + \int_a^\eta L(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \int_\eta^1 M(\xi, \eta) f(\xi) d\xi$$

показывает, что f удовлетворяет исходному интегральному уравнению, где $\beta = 0$. Оно не может иметь решения, для которого $\alpha_1 = 0$, так как $\lambda(a) < 1$. Следовательно, решение интегрального уравнения при фиксированном α_1 единственно, а α_1 единственным образом определяется уравнением

$$\int_a^1 f(\xi) d\xi = 1 - \alpha_1.$$

Следовательно, это решение должно совпадать с исходным.

Задача 19. Требуется исследования, аналогичного задачам 16—18.

Задача 20. Рассмотрим, во-первых, случай, когда

$$L(1, 1) \leq M(1, 1), \text{ но } \Phi(1) > M(1, 1).$$

[Здесь величина $\Phi(0)$ не существенна.] Тогда игрок I по-прежнему выбирает 1, но игрок II должен выбирать равномерную плотность на $(1 - \epsilon, 1)$, чтобы приблизиться к $\Phi(1)$. Значение игры равно $M(1, 1)$, так как мы построили ϵ -оптимальные стратегии. Если $\Phi(1) < L(1, 1)$, то аналогичное рассуждение показывает, что значение игры равно $L(1, 1)$. Теперь нам нужно рассмотреть только случаи, в которых $L(1, 1) > M(1, 1)$. Предположим, что L и M являются ядрами группы 2, но что $\Phi(1) > L(1, 1)$; значение $\Phi(0)$ по-прежнему не существенно. Рассмотрим новое ядро $K^*(\xi, \eta)$, получающееся из старого заменой $\Phi(1)$ на $L(1, 1)$. Оптимальными для этого ядра являются стратегии $(f_a, \beta I_1)$, $(g_a, \delta I_1)$, где $\beta, \delta \geq 0$. Мы покажем, что значение этой игры v^* является также значением исходной игры. Для $0 \leq \eta < 1$ мы имеем

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dx^0(\xi) = \int_0^1 K^*(\xi, \eta) dx^0(\xi) \geq v^*.$$

Точно так же

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(\xi, 1) dx^0(\xi) &= \int_a^1 L(\xi, 1) f_a(\xi) d\xi + \beta \Phi(1) \geq \\ &\geq \int_a^1 L(\xi, 1) f_a(\xi) d\xi + \beta L(1, 1) = \int_0^1 K^*(\xi, 1) dx^0(\xi) \geq v^*. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, мы найдем только ϵ -оптимальную стратегию игрока II. Для этого мы используем плотность $g_a(\eta)$ на интервале $[a, 1 - \epsilon]$ и плотность $g_a(\eta) + \delta/\epsilon$ на интервале $[1 - \epsilon, 1]$. Как и раньше, это делает не существенным значение $\Phi(1)$, так как

$$\int_0^1 K(\xi, \eta) dy^0(\eta) = \int_a^1 K(\xi, \eta) g_a(\eta) d\eta + \int_{1-\epsilon}^1 \frac{\delta}{\epsilon} K(\xi, \eta) d\eta.$$

При $\xi = 1$ последний член приближенно равен $\delta M(1, 1)$, а при $\xi < 1$ он приближенно равен $\delta L(1, 1)$; следовательно, $K^*(\xi, y^0) \leq v^* + \epsilon'$ для всех $\xi: 0 \leq \xi \leq 1$, где ϵ' стремится к нулю вместе с ϵ . Если $\Phi(1) < M(1, 1)$, то проходит аналогичное доказательство.

Аналогичный метод применим, когда рассматриваются группы 3 или 4; однако здесь мы имеем большее количество различных случаев, так как значение $\Phi(0)$ уже становится существенным.

Задача 21. Докажем, что линейный оператор U_a преобразует положительные непрерывные функции в непрерывные монотонно убывающие функции. С этой целью продифференцируем равенство

$$U_a g = \int_a^{\xi} \frac{M_{\xi}(\xi, \eta) g(\eta)}{L(\xi, \xi) - M(\xi, \xi)} d\eta + \int_{\xi}^1 \frac{L_{\xi}(\xi, \eta) g(\eta)}{L(\xi, \xi) - M(\xi, \xi)} d\eta;$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{d(U_a g)}{d\xi} = & \frac{1}{L(\xi, \xi) - M(\xi, \xi)} \left(\int_a^{\xi} M_{\xi\xi}(\xi, \eta) g(\eta) d\eta + \int_{\xi}^1 L_{\xi\xi}(\xi, \eta) g(\eta) d\eta + \right. \\ & \left. + [M_{\xi}(\xi, \xi) - L_{\xi}(\xi, \xi)] g(\xi) \right) - \frac{\left(\int_a^{\xi} M_{\xi} g d\eta + \int_{\xi}^1 K_{\xi} g d\eta \right) (L'(\xi, \xi) - M'(\xi, \xi))}{[L(\xi, \xi) - M(\xi, \xi)]^2}. \end{aligned}$$

Из нашего предположения, очевидно, вытекает, что $d(U_a g)/d\xi < 0$.

Кроме того, функция

$$\psi_a(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} (U_a^n g)(\eta)$$

положительна, непрерывна и убывает в силу того, что этими свойствами обладает каждый член ряда.

Глава 14

Задача 1. В этом примере

$$M_1(\eta) = \max_{\theta \geq \eta} P_1(\theta) = \frac{2}{3}, \quad M_2(\xi) = \max_{\theta \geq \xi} P_2(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \xi \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - \xi, & \text{если } \xi > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{3}{2} \left| \frac{1}{3} - \xi \right| - \frac{1}{2}, & \text{если } 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \\ -\xi^2 + \frac{10}{3} \xi - \frac{5}{3}, & \text{если } \frac{1}{2} < \xi \leq 1, \end{cases} \quad \text{и } g(\eta) = -\frac{1}{6} + \frac{5}{3} \left| \frac{1}{2} - \eta \right|.$$

Исследование графиков $G(\eta)$ и $F(\xi)$ показывает, что здесь имеет место случай I, и $v = 0$, $b = 0$, $c = 2/5$. По определению, $\varphi(\xi) = \left| \frac{1}{3} - \xi \right| - \frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2} - \xi \right|$; следовательно, $\varphi(b) = \frac{1}{3} \geq 0$, $\varphi(c) = -\frac{1}{3} \leq 0$. Таким образом, $\{I_0, I_{2/5}\}$ является парой оптимальных стратегий соответственно игроков I и II. При этом I_0 — единственная оптимальная стратегия игрока I, но игрок II может воспользоваться любой чистой стратегией между $2/5$ и $3/5$ (или, конечно, их смесью).

Задача 2. Функция выигрыша имеет вид

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} L(\xi, \eta) = p_1 \xi \alpha + p_2 \eta \beta + p_1 p_2 \beta (1 - \xi - \eta), & \text{если } \xi > \eta, \\ \varphi(\xi) = p_1 \xi \alpha + p_2 \xi \beta, & \text{если } \xi = \eta, \\ M(\xi, \eta) = p_1 \xi \alpha + p_2 \eta \beta + p_1 p_2 \alpha (1 - \xi - \eta), & \text{если } \xi < \eta. \end{cases}$$

Интегральное уравнение $(I - T_a)f = 0$ сводится к следующему:

$$f(t) - \int_a^t \frac{p_2 \beta (p_1 - 1)}{p_1 p_2 (\beta - \alpha) (1 - 2t)} f(\xi) d\xi - \int_t^1 \frac{p_2 (\alpha p_1 - \beta)}{p_1 p_2 (\beta - \alpha) (1 - 2t)} f(\xi) d\xi = 0$$

или

$$p_1 (\beta - \alpha) (1 - 2t) f(t) - \beta (p_1 - 1) \int_a^t f(\xi) d\xi - (\alpha p_1 - \beta) \int_t^1 f(\xi) d\xi = 0.$$

Следовательно,

$$-2p_1 (\beta - \alpha) f(t) + p_1 (\beta - \alpha) (1 - 2t) f'(t) - \beta (p_1 - 1) f(t) + (\alpha p_1 - \beta) f(t) = 0;$$

упрощая, мы получаем уравнение $-3f(t) + (1 - 2t) f'(t) = 0$. Его решением является функция $f(t) = k_1 (2t - 1)^{-3/2}$, где k_1 и a должны удовлетворять уравнениям

$$\alpha p_1 - \beta = \beta (p_1 - 1) (2a - 1)^{-1/2} \quad \text{и} \quad k_1 \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2a - 1}} \right) = 1.$$

Таким образом,

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(1 - p_1)^2}{[1 - (\alpha/\beta) p_1]^2}.$$

Аналогично,

$$b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{(1 - p_2)^2}{[1 - (\beta/\alpha) p_2]^2}.$$

Неравенство $a > b$ равносильно неравенству

$$p_2 > p_1 \frac{1}{[1 + (\beta/\alpha)] p_1 - (\beta/\alpha)}.$$

Этот случай мы рассмотрим так же, как и раньше. Мы найдем, что $g_a(u) = k_2 (2u - 1)^{-3/2}$, где k_2 и δ должны удовлетворять уравнениям

$$k_2 \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2a - 1}} \right) = 1 - \delta$$

и

$$k_2 \left(-1 + \frac{\alpha (1 - p_2)}{\alpha - p_2 \beta} \frac{1}{\sqrt{2a - 1}} \right) = -\delta.$$

Решая эти уравнения относительно k_1 , k_2 и δ , мы получаем

$$k_1 = \frac{1 - p_1}{p_1 [1 - (\alpha/\beta)]}, \quad k_2 = \frac{[p_2 - (\alpha/\beta)] (1 - p_1)}{p_2 [1 - (\alpha/\beta) p_1] [1 - (\alpha/\beta)]},$$

$$\delta = 1 - \frac{p_1 [p_2 - (\alpha/\beta)]}{p_2 [1 - (\alpha/\beta) p_1]};$$

значение игры равно

$$\frac{\alpha}{\beta} \frac{[1 - (\alpha/\beta) p_1] [p_2 - (\alpha/\beta)]}{1 - (\alpha/\beta)} - \alpha p_2 \frac{1 - p_1}{1 - (\alpha/\beta)} + \alpha \frac{1 - (\alpha/\beta) p_1}{1 - (\alpha/\beta)}.$$

Интересно заметить, что при $\alpha = 1$, $\beta = -1$ значение этой игры то же, что и в задаче 2 гл. 13.

Задача 3. Эта игра допускает следующую интерпретацию: игрок I имеет два ружья, игрок II только одно. Если игрок I использует первое ружье и стреляет первым, то он выигрывает единицу; если оба игрока стреляют одновременно, то игрок I проигрывает единицу. Если он использует второе ружье и стреляет первым, он проигрывает единицу; если в этом случае оба игрока стреляют одновременно, игрок I выигрывает единицу. Во всех случаях выигрыш равен нулю, если первым стреляет игрок II.

Покажем прежде всего, что $\sup_x \inf_y K(x, y) = 0$. Если стратегия x такова, что альтернатива A_1 в точке 0 имеет вероятность, не меньшую, чем вероятность в точке 0 альтернативы A_2 , то выбирается стратегия y , зависящая от x ; именно, $y_x = y_0$. Если для стратегии x вероятность альтернативы A_1 в точке 0 меньше вероятности A_2 в точке 0, то y_x распределена равномерно на промежутке $[0, \epsilon]$, где ϵ достаточно малое. В любом случае мы имеем $\inf_y K(x, y) \leq K(x, y_x) \leq$ вероятности, которая приписывается альтернативе A_1 на интервале $(0, \epsilon)$ в соответствии со стратегией x .

Отсюда следует, что $\inf_x K(x, y) \leq 0$ для всех x .

Рассмотрим теперь стратегию x^0 , по которой альтернативам A_1 и A_2 в точке 0 приписываются вероятности $1/2$. Тогда выигрыш игрока II тождественно равен 0; следовательно,

$$\sup_x \inf_y K(x, y) = 0.$$

Покажем теперь, что $\inf_y \sup_x K(x, y) = \frac{1}{3}$. Если в соответствии со стратегией y вероятность события B в точке 0 не меньше $\frac{2}{3}$, то пусть стратегия x_y такова, что A_2 имеет в точке 0 вероятность 1. Если указанная выше вероятность события B в точке 0 меньше $\frac{2}{3}$, то выбираем стратегию x_y с равномерным распределением на интервале $[0, \epsilon]$ для A_1 . В любом случае мы получаем, что $\sup_x K(x, y) \geq \frac{1}{3}$ для всех y . Рассмотрим, наконец, стратегию $y^0 = \frac{2}{3} y_0 + \frac{1}{3} y_1$. Мы имеем $K(x, y^0) \leq \frac{1}{3}$ для всех x , и, следовательно,

$$\inf_y \sup_x K(x, y) = \frac{1}{3}.$$

Задача 4. См. Блекуэлл и Гиршик [1].

Задача 5. По сравнению с первой задачей гл. 13 здесь мы имеем только изменение шкалы времени $\xi = P(\xi)$. Значение по-прежнему равно $(m - n)/(m + n)$, а первый критический момент равен $P^{-1}[1/(m + n)]$.

Задача 6. Если $1/n \leq \lambda < 1/(n - 1)$ ($n = 2, 3, 4, \dots$), то игрок I имеет оптимальную стратегию

$$\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} I_{l/(n-1)},$$

а игрок II оптимальную стратегию

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{i/n},$$

и $v = (n - 1 + \lambda)/n$.

Задача 7. Из теоремы 14.5.1 следует, что все оптимальные стратегии обоих игроков имеют на интервале $[a, b]$ одинаковый вид. Предположим, что $a > 0$. Тогда

$$h(\xi) = \int K(\xi, \eta) dy^0(\eta) = \gamma M(\xi, 0) + \int_a^1 L(\xi, \eta) dy^0(\eta) \quad \text{для } 0 < \xi \leq a,$$

но производная $h'(a)$ существует и, следовательно, должна быть равна 0, откуда следует, что

$$\gamma M_\xi(a, 0) + \int_a^1 L_\xi(a, \eta) dy^0(\eta) = 0.$$

Но из неравенства $L_\xi < 0$ вытекает, что $\gamma > 0$. Отсюда следует, что

$$v = \int K(\xi, a) dx^0(\xi) = \int_a^1 M(\xi, a) dx^0(\xi),$$

так как a принадлежит спектру оптимальных стратегий игрока II; кроме того,

$$v = \int K(\xi, 0) dx^0(\xi) = \int M(\xi, 0) dx^0(\xi),$$

так как $\gamma > 0$. Это противоречит условию, ибо M по η строго убывает. Следовательно, $a = 0$; аналогично $b = 1$.

Предположим, что $\alpha = 0$. Тогда

$$m(\eta) = \int K(\xi, \eta) dx(\xi) = \int_0^\eta L(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \int_\eta^1 M(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \beta M(1, \eta),$$

$$m'(\eta) = \int_0^\eta L_\eta(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \int_\eta^1 M_\eta(\xi, \eta) f(\xi) d\xi + \beta M_\eta(1, \eta)$$

и, таким образом,

$$m'(0) = \int_0^1 M_\eta(\xi, 0) f(\xi) d\xi + \beta M_\eta(1, 0) < 0,$$

что противоречит предположенному. Следовательно, $\alpha > 0$. Аналогично $\gamma > 0$. Поэтому из доказательства теоремы 14.5.1 следует, что $\lambda(T) < 1$ и $\mu(U) < 1$. Таким образом, f_0 и g_0 могут быть выражены указанными формулами и определяются единственным образом, если только единственным образом определены α, β, γ и δ . Но эти константы определяются из четырех данных уравнений. Если два уравнения для α и β имеют более одного решения, то нашлось бы по крайней мере однопараметрическое семейство решений; следовательно, α могло бы быть равно нулю, что, как мы уже видели, про-

тиворечит второму уравнению. Следовательно, α и β определяются единственным образом, и аналогично единственным образом определяются γ и δ .

Задача 8. Очевидно, функции ожидаемого выигрыша равны

$$K_1(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi - c_1, & \text{если } \xi < \eta, \\ \frac{\xi - c_1}{2}, & \text{если } \xi = \eta, \\ 0, & \text{если } \xi > \eta \end{cases} \quad \text{и} \quad K_2(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi < \eta, \\ \frac{\eta - c_2}{2}, & \text{если } \xi = \eta, \\ \eta - c_2, & \text{если } \xi > \eta. \end{cases}$$

Для фиксированного ξ_0 значение $K_2(\xi_0, \eta)$ максимизируется любым $\eta > \xi_0$, если $\xi_0 < c_2$ (максимум равен 0), любым $\eta \geq \xi_0$, если $\xi_0 = c_2$ (максимум равен 0), и максимума не существует, если $\xi_0 > c_2$ (супремум равен $\xi_0 - c_2$). Аналогичные утверждения имеют место для K_1 при фиксированном η_0 . В ситуации равновесия $\{\xi_0, \eta_0\}$ чистые стратегии не могут, следовательно, удовлетворять неравенствам $\xi_0 > \eta_0$, и $\xi_0 < \eta_0$; равенство же $\xi_0 = \eta_0$ имеет место только при $\xi_0 = \eta_0 = c_1 = c_2$.

Задача 9. Предположим, что игрок I имеет абсолютно непрерывную стратегию, при которой ожидаемый выигрыш игрока II не зависит от η в интервале $[a, \infty)$. Это предположение приводит к интегральному уравнению

$$v_2 = (\eta - c_2) \int_{\eta}^{\infty} f(\xi) d\xi \quad (a \leq \eta).$$

Из этого соотношения и из условия нормировки

$$\int_a^{\infty} f(\xi) d\xi = 1$$

мы получаем, что

$$f(\xi) = \frac{a - c_2}{(\xi - c_2)^2}$$

в интервале $a \leq \xi < \infty$ и $v_2 = a - c_2$. Аналогичные рассуждения показывают, что в интервале $[a, \infty)$

$$g(\eta) = \frac{a - c_1}{(\eta - c_1)^2}$$

и, следовательно, так построенные плотности f и g составляют ситуацию равновесия.

Глава 15

Задача 1. $x^0(\xi) = y^0(\xi) = (\xi + \xi^2)/2$.

Задача 2. $v = 1/\ln 2$. По теореме 15.1.1 каждая оптимальная стратегия является устойчивой и, следовательно, не может иметь конечного носителя.

Задача 3. Если заключение неверно, то для любой оптимальной стратегии y

$$v \equiv \int \frac{P(\xi, \eta)}{Q(\xi, \eta)} dy(\eta).$$

Полагая $\xi \rightarrow \infty$ вдоль C , мы получаем $v = 0$, что невозможно.

Задача 5. (а)

$$\frac{1}{\operatorname{ch}(u-v)} = 2e^v e^u \frac{1}{e^{2v} + e^{2u}}.$$

Поскольку u_i и v_j расположены в возрастающем порядке, мы имеем

$$\operatorname{sign} \det \frac{1}{\operatorname{ch}(u_i - v_j)} = \operatorname{sign} \det \frac{1}{z_i + w_j},$$

где $z_i = e^{2u_i}$, $w_j = e^{2v_j}$ и $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_n$, $0 < w_1 < w_2 < \dots < w_n$. Последний определитель представляет собой классический определитель Коши, который можно легко вычислить и показать, что он положителен.

(б) Определитель (2) (стр. 595), примененный к функции $e^u - e^v$ с точностью до некоторого постоянного множителя, сводится к определителю типа Вандермонда вида $\det(e^{z_i w_j})$, где z_i и w_j строго возрастают. Очевидно, значение этого определителя положительно.

(в) Случай $n = 0$ тривиален. Случай $n > 0$ получается последовательными свертками случая $n = 0$.

Задача 6. $y^0 = \frac{1}{2} I_0 + \frac{1}{2} I_1$; $x^0 = \frac{1}{2} I_a + \frac{1}{2} I_{1-a}$, где a приближенно равно 0,072.

Задача 7. Искомым является значение λ , для которого производная функции

$$\varphi(u) = \frac{1}{1 + \lambda u^2} + \frac{1}{1 + \lambda(1-u)^2}$$

имеет кратный корень $u = \frac{1}{2}$; это значение $\lambda = \frac{4}{3}$.

Задача 8. $\lambda = 2$;

$$1 - \sqrt{1 - e^{-\lambda/2}} = [\exp(-\lambda \sqrt{1 - e^{-\lambda/2}})](1 + \sqrt{1 - e^{-\lambda/2}}).$$

Задача 9. Решение аналогично доказательству леммы 15.2.3.

Задача 11. (а) Использовать характеристику канторовского распределения, содержащуюся в примере 2, стр. 591—593.

Задача 13. Ядро, очевидно, инвариантно относительно компактной группы всех вращений единичного круга. Следовательно, существует и оптимальная стратегия, инвариантная относительно вращений.

Задача 14. Пусть $K_n(\xi, \eta)$ — ядро, полученное из $K(\xi, \eta)$ вычеркиванием n -го члена. K_n очевидно, равномерно сходится к K при $n \rightarrow \infty$, но игры с ядрами K_n имеют неединственные оптимальные стратегии (теорема 15.5.3).

Задача 15. Стратегии являются устойчивыми и дают значение игры, равное

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}.$$

Задача 16. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что x и y являются оптимальными стратегиями и значение игры равно нулю. Кроме того, для указанной стратегии x и любой оптимальной стратегии y^*

$$0 \leq \int \int K(\xi, \eta) dx(\xi) dy^*(\eta) = \int e^{-\eta^2} dy^*(\eta),$$

откуда следует, что $y^* = I_0$. Наконец, для любой оптимальной стратегии x^* с моментами μ_n^* мы получаем

$$0 \leq \int K(\xi, \eta) dx^*(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\mu_n^* - \mu_n) \eta^n \sin \frac{1}{\eta} + e^{-\eta^2}.$$

Ясно, что если η мало, то первый ненулевой член этого ряда доминирует над остальными, а так как $\sin(1/\eta)$ меняет знак, мы должны иметь $\mu_n^* = \mu_n$ для всех n . Следовательно, $x^* = x$.

Задача 19. Пусть x^* — любая оптимальная стратегия, и пусть

$$dx^0(\xi) = \frac{dx^*(\xi)}{f(\xi)},$$

где

$$f(\xi) = \int_0^1 h(\xi t) dt.$$

Подстановка $\int k(\xi, \eta) dx^*(\xi) \equiv v$ приводит к соотношению

$$\int_0^1 h(\xi \eta) dx^0(\xi) = v \int_0^1 h(\eta t) dt.$$

Разлагая обе части этого равенства в степенные ряды, можно заметить, что n_i -й момент x^0 может быть определен, если только $a_{n_i} \neq 0$. На основании классической теоремы Мюнца стратегия x^0 единственна.

Задача 20. Аналогична задачам 17 и 19.

Задача 21. Применить задачи 18 и 19, где $h(\xi \eta) = (1 + \xi \eta)^{-2}$.

Задача 22. Очевидно, существуют такие α_i ($i \leq \alpha_i \leq i+1$), что

$$\int_0^1 \xi^{\alpha_i} d\xi (x - x^*) = 0.$$

Следовательно, по теореме Мюнца $x^* = x$.

Задача 23. Значение игры равно нулю, а x^0 является оптимальной стратегией. Кроме того, использование любой оптимальной стратегии x^* и стратегии $y^{(n)} = I_{1/n}$ показывает, что $\mu_{2n}^* \geq \mu_{2n}$ и $\mu_{2n+1}^* \leq \mu_{2n+1}$. Следовательно, $x = x^*$.

Задача 24. См. Карлин и Рестрепо [1], стр. 382.

Задача 25. См. Карлин и Рестрепо [1], стр. 384.

Задача 26. См. Гликсберг и Гросс [2].

Задача 27. $K(\xi, \eta) = -\beta\xi + (2-\alpha)\eta + \xi^2 + (1-\alpha-\beta)\xi\eta - \eta^2$. Заметим, что это ядро строго выпукло по ξ и строго вогнуто по η .

Задача 28. Сводится к утверждению о том, что выпуклое множество вполне определяется счетным числом опорных гиперплоскостей.

Задача 29. Применить задачу 28.

Глава 16

Задача 2. Пусть $L_0(t)$ является решением (оно единственно, поскольку минимизируемый функционал строго выпуклый). С помощью методов, изложенных на стр. 628, можно показать, что $L_0(t)$ является решением в том и только том случае, когда

$$\min_L \int_0^1 [L_0(t) - t] L(t) dt = \int_0^1 [L_0(t) - t] L_0(t) dt,$$

где минимум берется по всем функциям $L(t)$, удовлетворяющим нужным ограничениям. По лемме Неймана — Пирсона, существует такая постоянная k , что

$$L_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t - L_0(t) > k, \\ 0, & \text{если } t - L_0(t) < k, \end{cases} \quad (*)$$

и $L_0(t) - t = -k$ в остальных случаях. Мы хотим, чтобы $L_0(t)$ было возможно ближе к t ; поэтому представляется разумным решение вида

$$L_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < c_1, \\ t - k & \text{при } c_1 < t < c_2, \\ 1 & \text{при } c_2 < t < 1. \end{cases}$$

Но если это так, то мы должны иметь $c_2 - L_0(c_2) = c_2 - 1 \geq k$ и $c_1 - L_0(c_1) = c_1 \leq k$, откуда следует, что $c_2 - 1 \geq c_1$, или $c_2 - c_1 \geq 1$. Этот вид решения возможен только при $p = \frac{1}{2}$, и в этом случае $k = 0$. Поэтому мы испытаем решение вида

$$L_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t < c_1, \\ t - k & \text{при } c_1 < t \leq 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad L_0(t) = \begin{cases} t - k & \text{при } 0 \leq t < c_2, \\ 1 & \text{при } c_2 < t \leq 1. \end{cases}$$

В первом случае $c_1 - L_0(c_1) = c_1 \leq k$ и $c_1 - k \geq 0$, что дает $c_1 = k$. Таким образом, мы получаем в качестве „решения“ $\max(0, t - c_1)$, интеграл от которого равен

$$\frac{(1 - c_1)^2}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

Если $p \leq \frac{1}{2}$, то мы видим, что функция $L_0(t) = \max(0, t - c_1)$, где $c_1 = 1 - \sqrt{2p}$ удовлетворяет условию совместности (*) и поэтому действи-

тельно является решением. Если $p \geq \frac{1}{2}$, то имеет место второй случай, и мы получаем $L_0(t) = \min(1, t + 1 - c_2)$, где $c_2 = \sqrt{2(1-p)}$.

Задача 3. Прежде всего ограничимся рассмотрением множества $\Omega = \left\{ \varphi \mid 0 \leq \varphi(t) \leq M, \varphi \text{ равна } 0 \text{ вне } [-T, T] \text{ и } \int \varphi(t) dt = \alpha \right\}$. Согласно методу, описанному на стр. 628, мы получаем, что $\varphi_0(t)$ дает минимум тогда и только тогда, когда

$$\max_{\varphi \in \Omega} \int_{-T}^T p(t) e^{-\varphi_0(t)} \varphi(t) dt = \int_{-T}^T p(t) e^{-\varphi_0(t)} \varphi_0(t) dt.$$

С помощью леммы Неймана — Пирсона мы получаем, что для соответствующей постоянной k

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} M, & \text{если } \varphi_0(t) < \log \frac{p(t)}{k}, \\ 0, & \text{если } \varphi_0(t) > \log \frac{p(t)}{k}, \end{cases} \quad (**)$$

и $\varphi_0(t) = \log(p(t)/k)$ при остальных t .

Мы можем испытать решение вида

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \log \frac{p(t)}{k} < 0, \\ \log \frac{p(t)}{k}, & \text{если } 0 \leq \log \frac{p(t)}{k} \leq M, \\ M, & \text{если } \log \frac{p(t)}{k} > M, \end{cases}$$

которое удовлетворяет условиям совместности (**).

Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, легко проверить, что интеграл

$$\int_{-T}^T \varphi_0(t) dt$$

является непрерывной функцией k и что он стремится к нулю при неограниченном возрастании k . Кроме того, этот интеграл стремится к $2TM$, когда k стремится к нулю. Следовательно, для достаточно больших T и M мы можем удовлетворить равенству

$$\int_{-T}^T \varphi_0(t) dt = \alpha.$$

Кроме того, если T и M стремятся к ∞ , то $\varphi_0(t)$ сходится к $\max\{0, \log(p(t)/k)\}$,

где k определяется условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} \max\left\{0, \log \frac{p(t)}{k}\right\} dt = \alpha$$

(снова по теореме Лебега). Если мы усечем произвольную функцию φ достаточно большим значением M и ограничим изменение аргумента интервалом $2T$, то мы сможем сравнить φ и φ_0 . Из этого сравнения следует, что функция

$$\varphi_0(t) = \max \left\{ 0, \log \frac{p(t)}{k} \right\}$$

является решением.

Задача 4. Решение имеет вид

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{p(t)g(t)}{h(t)} < k, \\ \frac{1}{g(t)} \log \frac{p(t)g(t)}{kh(t)}, & \text{если } \frac{p(t)g(t)}{h(t)} \geq k, \end{cases}$$

где k определяется так, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \varphi_0(t) dt = \alpha.$$

Метод проверки этого решения аналогичен методу, приведенному в задаче 3.

Задача 5. Предположим, что мы решили обследовать ящик i всего n раз, в моменты $t_1, t_1 + t_2, \dots, t_1 + t_2 + \dots + t_n$. Ожидаемый выигрыш равен в этом случае

$$\frac{p_i}{N} [G(t_1) + G(t_2) + \dots + G(t_n)].$$

Нам нужно максимизировать функцию

$$\sum_{j=1}^n G(t_j)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n t_j \leq N, \quad 0 \leq t_j \leq N.$$

Пусть $t_i^0 (i = 1, \dots, n)$ — решение задачи. Положим

$$I(\lambda) = \sum_{j=1}^n G(\lambda t_j^0 + (1 - \lambda) t_j).$$

Тогда $I(\lambda)$ является строго вогнутой функцией λ , когда λ пробегает единичный интервал, и достигает максимума при $\lambda = 1$. Иначе говоря, $I'(1) \geq 0$ или

$$\sum_{j=1}^n g(t_j^0) t_j^0 \geq \sum_{j=1}^n g(t_j^0) t_j^1.$$

По лемме Неймана — Пирсона, существует такая константа h , что

$$t_j^0 = \begin{cases} N, & \text{если } g(t_j^0) > h, \\ 0, & \text{если } g(t_j^0) < h, \end{cases}$$

¹⁾ Здесь и в задаче 6 $g = G'$. — Прим. перев.

и $g(t_j^0) = h$ в противном случае. Для того чтобы t_j^0 удовлетворяли этим соотношениям, положим $t_j^0 = \frac{N}{n}$ для всех j . Затем положим $h = g(t_j^0)$. Ожидаемый выигрыш для такой тактики равен

$$\sum_{i=1}^k \frac{p_i}{N} n_i G(m_i) = \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{m_i} G(m_i).$$

Конечно,

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{m_i} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N} = 1.$$

Задача 6. Пусть $x_i = 1/m_i$ — некоторый способ поиска, а x_i^0 — оптимальный способ поиска. Непосредственное вычисление показывает, что функция

$$I(\lambda) = \sum_{i=1}^k p_i (\lambda x_i^0 + (1-\lambda) x_i) G\left(\frac{1}{\lambda x_i^0 + (1-\lambda) x_i}\right)$$

строго вогнута. Поэтому, следуя методу п. 16.2, рассмотрим неравенство $I'(1) \geq 0$, т. е.

$$\sum_{i=1}^k p_i \left(G\left(\frac{1}{x_i^0}\right) - \frac{1}{x_i^0} g\left(\frac{1}{x_i^0}\right) \right) (x_i^0 - x_i) \geq 0.$$

По лемме Неймана — Пирсона, существует такая константа h , что

$$x_i^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } G(m_i^0) - m_i^0 g(m_i^0) > \frac{h}{p_i}, \\ \frac{1}{N}, & \text{если } G(m_i^0) - m_i^0 g(m_i^0) < \frac{h}{p_i}, \end{cases}$$

а в остальных случаях x_i^0 произвольна. Пусть $f(y) = G(y) - yg(y)$. Заметим, что $f'(y) = -yg'(y) > 0$, что означает возрастание функции f . Положим теперь

$$x_i^0 = \frac{1}{f^{-1}(h/p_i)}, \quad \text{если } \frac{h}{p_i} \leq f(N), \quad \text{и} \quad x_i^0 = \frac{1}{N}, \quad \text{если } \frac{h}{p_i} > f(N).$$

Если h выбрано достаточно большим, то $\sum x_i^0 = kN^{-1} < 1$; если h выбрано достаточно малым, то $x_i^0 \geq 1$ для всех i , так как $f(0) = 0$; следовательно, $\sum x_i^0 > 1$. Поскольку $\sum x_i^0$ — непрерывная функция h , мы получаем решение по непрерывности. Легко показать, что построенное решение удовлетворяет указанным выше условиям совместности.

Задача 8. См. Блекуэлл и Гиршик [2].

Задача 9. По лемме Неймана—Пирсона, так как $\max_{\varphi} K(\varphi, \psi^0)$ и $\min_{\psi} K(\varphi^0, \psi)$ равны $K(\varphi^0, \psi^0)$, мы заключаем, что

$$\varphi^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } f(t)\psi^0(t) > h, \\ \text{произвольна,} & \text{если } f(t)\psi^0(t) = h, \\ 0, & \text{если } f(t)\psi^0(t) < h. \end{cases} \quad (***)$$

$$\psi^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } f(t)\varphi^0(t) < k, \\ \text{произвольна,} & \text{если } f(t)\varphi^0(t) = k, \\ 0, & \text{если } f(t)\varphi^0(t) > k. \end{cases}$$

(Мы рассматриваем только случай $0 < A, B < 1$; если A или B равны 0 или 1, то условия задачи нарушаются.) Очевидно, что $k \geq 0$, так как из неравенства $k < 0$ следует, что $\psi^0 \equiv 0$. Далее, $h \geq 0$, так как если $h < 0$, то $\varphi^0 \equiv 0$. Докажем, что случай $k = 0$ невозможен.

Предположим противное. Тогда условие $A > 0$ означает, что для некоторого t_0 $\psi^0(t_0) > 0$, откуда следует, что $\varphi^0(t_0) = 0$. Следовательно, $f(t_0)\psi^0(t_0) \leq h$ и, таким образом, $h > 0$. Кроме того, если для любого t $\psi^0(t) > 0$, то, как и выше, $\varphi^0(t) = 0$; если же $\psi^0(t) = 0$, то $f(t)\psi^0(t) = 0 < h$, откуда следует, что $\varphi^0(t) = 0$. Значит, $\varphi^0 \equiv 0$, что противоречит предположенному. Отсюда следует, что $k > 0$. Однако, вообще говоря, h может быть равно 0.

Пусть h и k определяются соответственно уравнениями $h/f(P) = 1$ и $k/f(Q) = 1$, где P и Q удовлетворяют условию (+) и неравенствам $0 < P < Q < 1$. На интервале $[0, P]$ мы имеем $h/f(t) > 1 \geq \psi^0(t)$, откуда следует, что $\varphi^0(t) = 0$ и $k/f(t) > 1 \geq \varphi^0(t)$; поэтому $\psi^0(t) = 1$. На интервале (P, Q) мы имеем $k/f(t) > 1$. Значит, $\psi^0(t) = 1$, так что $\psi^0(t) > h/f(t)$ и, таким образом, $\varphi^0(t) = 1$. На интервале $(Q, 1)$ мы должны иметь $\varphi^0(t) = k/f(t)$ и $\psi^0(t) = h/f(t)$. Но, по определению, $k = f(Q)$ и $h = f(P)$, и φ^0 и ψ^0 теперь полностью определены. Эти „решения“, очевидно, удовлетворяют условиям совместности (***). Заметим, что

$$\int_0^1 \varphi^0(t) dt = Q - P + f(Q) \int_Q^1 \frac{dt}{f(t)} = B$$

и

$$\int_0^1 \psi^0(t) dt = Q + f(P) \int_Q^1 \frac{dt}{f(t)} = A,$$

что и требуется.

Задача 10. Аналогична задаче 9.

Задача 11. Если эти случаи не являются взаимно исключающими, то существует такая пара чисел A, B , что решение P_1, Q_1 уравнений (+) удовлетворяет условию $0 < P_1 < Q_1 < 1$, а решение P_2, Q_2 уравнений (++) удовлетворяет условию $0 \leq Q_2 \leq P_2 \leq 1$. Далее,

$$Q_1 + f(Q_1) \int_{Q_1}^1 \frac{dt}{f(t)} > Q_1 + f(P_1) \int_{Q_1}^1 \frac{dt}{f(t)} = A = P_2 + f(P_2) \int_{P_2}^1 \frac{dt}{f(t)},$$

и, так как функция

$$x + f(x) \int_x^1 \frac{dt}{f(t)}$$

строго возрастает, мы имеем $Q_1 > P_2$. Аналогично из неравенства

$$P_1 + f(P_1) \int_{P_1}^1 \frac{dt}{f(t)} < Q_1 + f(P_1) \int_{Q_1}^1 \frac{dt}{f(t)} = P_2 + f(P_2) \int_{P_2}^1 \frac{dt}{f(t)}$$

следует, что $P_1 < P_2$. Но соотношение

$$\begin{aligned} Q_1 - P_1 + f(Q_1) \int_{Q_1}^1 \frac{dt}{f(t)} &= B = f(Q_2) \int_{P_2}^1 \frac{dt}{f(t)} \leq f(P_2) \int_{P_2}^1 \frac{dt}{f(t)} < \\ &< P_2 - P_1 + f(P_2) \int_{P_2}^1 \frac{dt}{f(t)} \end{aligned}$$

сводится к неравенству

$$Q_1 + f(Q_1) \int_{Q_1}^1 \frac{dt}{f(t)} < P_2 + f(P_2) \int_{P_2}^1 \frac{dt}{f(t)}.$$

Поэтому $Q_1 < P_2$, а это противоречит условию.

Задача 12. Рассмотрим функцию выигрыша

$$\begin{aligned} V(t, p) &= A(t) \exp \left(- \int_0^t r(u) p(u) du \right) = \\ &= \exp \left(- \left(\int_0^t r(u) p(u) du - \log A(t) \right) \right). \end{aligned}$$

По неравенству Йенсена

$$\begin{aligned} \int_0^1 V(t, p) dx_0(t) &\geq \exp \left(- \int_0^1 \left(\int_0^t r(u) p(u) du - \log A(t) \right) dx_0(t) \right) = \\ &= \exp \left(- \int_0^1 r(t) p(t) dt + \log A(1) + \int_0^1 r(t) p(t) x_0(t) dt - \int_0^1 \frac{A'(t)}{A(t)} x_0(t) dt \right) = \\ &= \exp \left(- \int_0^1 r(t) p(t) (1 - x_0(t)) dt + \log A(1) - \int_0^1 \frac{A'(t)}{A(t)} x_0(t) dt \right). \end{aligned}$$

Для случая 1 это дает

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 V(t, p) dx_0(t) \geq \\
 & \geq \exp \left(- \int_0^d r(t) p(t) dt - \int_d^1 r(c) p(t) dt + \log A(d) + r(c) \int_d^1 \frac{A'(t)}{A(t)r(t)} dt \right) = \\
 & = A(d) \exp \left(\int_0^d (r(c) - r(t)) p(t) dt - r(c) \delta - r(c) \int_c^d dt + r(c) \delta \right) = \\
 & = A(d) \exp \left(\int_0^c (r(c) - r(t)) p(t) dt + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{c'}^d (r(t) - r(c)) (1 - p(t)) dt - \int_c^d r(t) dt \right) \geq \\
 & \geq A(d) \exp \left(- \int_c^d r(t) dt \right) = M_1 = V.
 \end{aligned}$$

В более простых случаях 2 и 3 исследование аналогично.

Глава 17

Задача 1. Если понтирующий применяет стратегию φ , то его ожидаемый выигрыш дается выражением

$$\begin{aligned}
 K(\varphi) &= -1 \int [1 - \varphi_1(\xi) - \dots - \varphi_N(\xi)] dF(\xi) + \\
 &+ (a_1 + 1) \int \int \varphi_1(\xi) L(\xi, \eta) dF(\xi) dG(\eta) + \dots \\
 &\dots + (a_N + 1) \int \int \varphi_N(\xi) L(\xi, \eta) dF(\xi) dG(\eta) = \\
 &= -1 + \int \varphi_1(\xi) [1 + (a_1 + 1)(2G(\xi) - 1)] dF(\xi) + \dots \\
 &\dots + \int \varphi_N(\xi) [1 + (a_N + 1)(2G(\xi) - 1)] dF(\xi).
 \end{aligned}$$

Если ξ_0 определено, как и раньше (стр. 663), то коэффициент при $\varphi_N(\xi)$ будет наибольшим и положительным при $\xi > \xi_0$. Отсюда следует, что для $\xi > \xi_0$ $\varphi_N^0(\xi) = 1$, где φ^0 означает оптимальную стратегию. Пусть ζ_0 — корень уравнения

$$1 + (a_1 + 1)(2G(\xi) - 1) = 0.$$

Тогда $\zeta_0 < \xi_0$ и коэффициент при $\varphi_1(\xi)$ будет наибольшим и положительным при $\zeta_0 < \xi < \xi_0$; это означает, что на этом интервале $\varphi_1^0(\xi) = 1$. На интервале $[0, \zeta_0]$ игрок должен по-прежнему пасовать, так как все коэффициенты при φ_i отрицательны.

Задача 2. Единственное отличие состоит здесь в том, что

$$\int L(\xi, \eta) dG(\eta) = G(\xi - 0) + G(\xi + 0) - 1.$$

Там, где это выражение положительно, $\varphi_2^0(\xi) = 1$. Теперь, в отличие от непрерывного случая, концевые точки уже будут, вообще говоря, существенны. С другой стороны, может оказаться, что целый интервал существенным не является. Если $G(\xi - 0) + G(\xi + 0) - 1 < 0$ и $1 + 2(G(\xi - 0) + G(\xi + 0) - 1) > 0$, то $\varphi_1^0 = 1$. Если последняя величина отрицательна, то игрок должен пасовать.

Задача 3. Определим c_1 с помощью соотношения $G(c_1) = a/(a+2)$ (c_1 не обязательно единственно). Если $F(c_1) \geq a/[2(a+1)]$, то решение имеет следующий вид:

$$\psi^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \eta \leq c_1, \\ 1, & \text{если } \eta > c_1; \end{cases}$$

$$\varphi^*(\xi) = \begin{cases} \text{удовлетворяет соотношению } \int_0^{c_1} \varphi^*(\xi) dF(\xi) = \frac{a[1 - F(c_1)]}{a+2}, \\ a \text{ в остальном произвольна, если } 0 \leq \xi \leq c_1, \\ 1, & \text{если } \xi > c_1. \end{cases}$$

Требование совместности в этом случае проверяется точно так же, как и в данной выше модели. Требование $F(c_1) \geq a/[2(a+1)]$ необходимо для того, чтобы обеспечить возможность выполнения равенства

$$\int_0^{c_1} \varphi^*(\xi) dF(\xi) = \frac{a[1 - F(c_1)]}{a+2}.$$

Если $F(c_1) < a/[2(a+1)]$, то определим c_2 из уравнения $F(c_2) = a/[2(a+1)]$ и положим

$$\psi^*(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \eta \leq c_2, \\ 1, & \text{если } \eta > c_2, \end{cases} \quad \varphi^*(\xi) = 1.$$

Тогда коэффициент при ψ в точке c_2 дается выражением

$$-(a+2)F(c_2) + a(1 - F(c_2)) = a - 2(a+1)F(c_2) = 0$$

и ψ^* минимизирует $K(\varphi^*, \psi)$, так как коэффициент является монотонной функцией. Точно так же коэффициент при φ в точке 0 равен $2 - (a+2) \times (1 - G(c_2)) = -a + (a+2)G(c_2)$. Но из неравенства $F(c_1) < F(c_2)$ следует, что $c_1 < c_2$, и поэтому $G(c_2) \geq G(c_1) = a/(a+2)$. Таким образом, $-a + (a+2)G(c_2) \geq -a + a = 0$, и поскольку коэффициент при φ — монотонная функция, то φ^* максимизирует $K(\varphi, \psi^*)$.

Задача 4. Значение игры равно

$$v = K(\varphi^*, \psi^*) =$$

$$= -1 + \sum_{i=1}^n \int_0^1 \varphi_i^*(\xi) \left(2 + a_i \int_0^{\xi} \psi_i^*(\eta) d\eta - (a_i + 2) \int_{\xi}^1 \psi_i^*(\eta) d\eta \right) d\xi.$$

Мы знаем, что коэффициент при φ_i^* равен нулю для $\xi < b_i$ и что функция φ_i^* обращается в нуль всюду, кроме интервала (c_i, c_{i+1}) . Таким образом, нам остается вычислить коэффициент при φ_i^* лишь на этом интервале. Так как $c_i \geq b_i$, этот коэффициент равен

$$\begin{aligned} 2 + a_i \int_{b_i}^{\xi} d\eta - (a_i + 2) \int_{\xi}^1 d\eta &= 2 + a_i (\xi - b_i) - (a_i + 2) (1 - \xi) = \\ &= 2 + a_i (\xi - b_i) + (a_i + 2) (\xi - b_i) - (a_i + 2) (1 - b_i) = 2 (a_i + 1) (\xi - b_i) \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} v &= -1 + \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} 2 (a_i + 1) (\xi - b_i) d\xi = \\ &= -1 + \sum_{i=1}^n (a_i + 1) [(c_{i+1} - b_i)^2 - (c_i - b_i)^2] = \\ &= -1 + \sum_{i=1}^n (a_i + 1) (c_{i+1} - c_i) (c_{i+1} + c_i - 2b_i). \end{aligned}$$

Задача 6. Значение игры равно

$$\begin{aligned} v = K(\varphi^*, \psi^*) &= -1 + 2 \int_0^1 [\varphi_1^*(\xi) + \varphi_2^*(\xi)] d\xi + \\ &+ \int_0^1 \psi_1^*(\eta) \left(-(a+2) \int_0^{\eta} (\varphi_1^*(\xi) + \varphi_2^*(\xi)) d\xi + a \int_{\eta}^1 (\varphi_1^*(\xi) + \varphi_2^*(\xi)) d\xi \right) d\eta + \\ &+ \int_0^1 \psi_2^*(\eta) \left(-(a+2) \int_0^1 \varphi_1^*(\xi) d\xi - \right. \\ &\quad \left. - (a+b+2) \int_0^{\eta} \varphi_2^*(\xi) d\xi + (a+b) \int_{\eta}^1 \varphi_2^*(\xi) d\xi \right) d\eta = \\ &= -1 + 2(m_1 + 1 - c) + \int_c^d [-(a+2)(m_1 + \eta - c) + a(1 - \eta)] d\eta + \\ &+ \int_d^1 [-(a+2)(m_1 + e - c) - (a+b+2)(\eta - e) + (a+b)(1 - \eta)] d\eta = \\ &= 1 + 2m_1 - 2c - (a+2)(m_1 - c)(d - c) + a(d - c) - (a+1)(d^2 - c^2) - \\ &- (a+2)(m_1 + e - c)(1 - d) + (a+b)(1 + e)(1 - d) + 2e(1 - d) - \\ &- (a+b+1)(1 - d^2). \end{aligned}$$

Применяя ко второму члену равенство $(a+2)m_1 = a(1-c)$ [уравнение (17.4.10)], мы получаем

$$v = 1 + 2m_1 - 2c + 2c(a+1)(d-c) + (a+1)c^2 + bd^2 - (a+b+1) - \\ - (a+2)(m_1+e-c)(1-d) + (a+b)(1+e)(1-d) + 2e(1-d).$$

Применяя теперь к третьему с конца члену равенство $(a+2)(m_1+e-c) = (a+b)(1-e)$ [уравнение (17.4.11)], мы получаем

$$v = 2m_1 - 2c - (a+b) + c(a+1)(2d-c) + bd^2 + 2e(1-d)(a+b+1).$$

Задача 7.

$$c = \frac{31}{56}; \quad d = \frac{97}{112}; \quad e = \frac{41}{56}; \quad m_1 = \frac{25}{112}; \quad m_2 = \frac{3}{56}; \quad v = -\frac{37}{112}.$$

Задача 8. Из рис. 25 мы видим, что должны выполняться следующие равенства: $\psi_1^*(\eta) = 1$ для $c < \eta < d$ и $\psi_2^*(\eta) = 1$ для $d < \eta < 1$. Точно так же, $\psi_1^*(\eta) = 0$ для $0 < \eta < c$, а функция ψ_2^* на этом интервале произвольна. Однако для того, чтобы данная пара (ψ_1^*, ψ_2^*) была оптимальной, мы должны иметь $M_1(c) = 0$. Отсюда следует

$$\int_0^c \psi_2^*(\eta) d\eta = m_2.$$

Снова из рис. 25 мы видим, что $\varphi_2^*(\xi) = 1$ на интервале $d < \xi < 1$ и $\varphi_2^*(\xi) = 0$ на интервале $0 < \xi < c$. Однако $\varphi_1^*(\xi)$ произвольна на $0 < \xi < c$, а φ_1^* и φ_2^* на интервале $c < \xi < d$ подчинены условию $\varphi_1^* + \varphi_2^* = 1$, а в остальном произвольны. Требование $N_1(d) = N_2(d)$ дает

$$\int_0^d \tilde{\varphi}_2(\xi) d\xi = 1 - d.$$

Применяя этот результат и условие $N_2(c) = 0$, мы получаем

$$\int_0^c \tilde{\varphi}_1(\xi) d\xi = m_1.$$

Последнее необходимое требование состоит в том, что $N_2(\eta) \geq N_1(\eta)$ для $c < \eta < d$, и это дает вторую часть соотношения (17.4.17).

Ясно, что любая стратегия, удовлетворяющая этим условиям, удовлетворяет также соотношениям совместности.

Задача 9. Пусть φ_1 , φ_2 и φ_3 имеют тот же смысл, что и раньше, но на их сумму наложено более слабое ограничение $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \leq 1$, так что $1 - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3$ — вероятность первоначального паса. Выигрыш равен

$$K^*(\varphi, \phi) = K(\varphi, \phi) +$$

$$+ (-1) \int_0^1 \int_0^1 [1 - \varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi) - \varphi_3(\xi)] [\psi_1(\eta) + \psi_2(\eta) + \psi_3(\eta)] d\xi d\eta + \\ + \int_0^1 \int_0^1 [\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) + \varphi_3(\xi)] [1 - \psi_1(\eta) - \psi_2(\eta) - \psi_3(\eta)] d\xi d\eta,$$

где $K(\varphi, \psi)$ дано. Таким образом,

$$K^*(\varphi, \varphi^*) = \text{const} +$$

$$\begin{aligned} & + \int \varphi_1(\xi) \left(1 + b \int_0^\xi (\varphi_1^* + \varphi_2^*) d\eta - b \int_\xi^1 (\varphi_1^* + \varphi_2^*) d\eta - b \int_0^1 \varphi_3^* d\eta \right) d\xi + \\ & + \int \varphi_2(\xi) \left(1 + b \int_0^\xi (\varphi_1^* + \varphi_2^*) d\eta - b \int_\xi^1 (\varphi_1^* + \varphi_2^*) d\eta + a \int_0^\xi \varphi_3^* d\eta - a \int_\xi^1 \varphi_3^* d\eta \right) d\xi + \\ & + \int \varphi_3(\xi) \left(1 + b \int_0^1 \varphi_1^* d\eta + a \int_0^\xi (\varphi_2^* + \varphi_3^*) d\eta - a \int_\xi^1 (\varphi_2^* + \varphi_3^*) d\eta \right) d\xi. \end{aligned}$$

Решение дается формулами $\varphi_1^* = a/(a+b)$, $\varphi_3^* = b/(a+b)$ на интервале (c, d) и $\varphi_3^* = 1$ на интервале $(d, 1)$, где $c = 1 - 1/b$ и $d = 1 - 1/a$. Константы c и d определяются путем приравнивания нулю значений коэффициентов при $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_3(\xi)$ в точке c .

Задача 10. Возможны два случая. Указанное решение для $n=3$ верно, если $a_3a_1 + a_3a_2 + a_2a_1 - 3a_2^2 \geq 0$. Если имеет место противоположное неравенство, то решение имеет тот же общий вид, за исключением того, что средняя ставка не является существенной на среднем интервале. Именно

$$\varphi_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{a_1b_1}, \\ \frac{a_3}{a_1+a_3}, \\ 0, \end{cases} \quad \varphi_2(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{a_2b_1}, \\ 0, \\ 0 \end{cases} \quad \varphi_3(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{a_3b_1} & \text{для } 0 \leq \xi < \xi_1, \\ \frac{a_1}{a_1+a_3} & \text{для } \xi_1 \leq \xi < \xi_2, \\ 1 & \text{для } \xi_2 \leq \xi \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\xi_1 = \frac{2a_1(a_3 - a_2)}{(a_1 + a_2)(a_2 + a_3)} a_2b_1$$

и

$$\xi_2 - \xi_1 = \frac{(a_1 + a_3)(3a_2^2 - a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3)}{a_3(a_2 + a_1)(a_3 + a_2)}.$$

Задача 11. Ввиду симметричности игры достаточно, как и в п. 17.6, определить стратегии одного игрока. Пусть игрок A получает ξ . Введем следующие обозначения:

- $\varphi_1(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит c и спасует, если игрок B поставит b или a ;
- $\varphi_2(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит c и уравнивает, если игрок B ставит b , но спасует, если игрок B ставит a ;
- $\varphi_3(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит c и спасует, если игрок B поставит b , но уравнивает, если игрок B поставит a ;
- $\varphi_4(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит c и уравнивает, если игрок B ставит b или a ;
- $\varphi_5(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит b и спасует, если игрок B ставит a ;

$\varphi_6(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит b и уравнивает, если игрок B ставит a ;

$\varphi_7(\xi)$ — вероятность того, что игрок A поставит a .

Эти функции подчинены ограничениям $\varphi_i(\xi) \geq 0$, $\sum_{i=1}^7 \varphi_i(\xi) = 1$. Оптималь-

ные стратегии в этой игре зависят от отношений a/c и b/c . Различные виды оптимальных стратегий весьма сложны и находятся с помощью синтеза интуитивных рассуждений и формальных преобразований. Когда вид оптимальной стратегии найден, условия, при которых она имеет место, и критические числа, которые входят в ее определение, могут быть найдены как в п. 17.6.

Из общего числа пяти возможных случаев опишем решение только для двух.

Случай 1. $a^2b + a^2c - 2ac^2 - 4abc - 2ab^2 - b^3 + 7b^2c \leq 0$; $2c - b \geq 0$

Для $0 < \xi < \xi_1$

$$\varphi_1^*(\xi) = \frac{ab}{ab+ac+bc}, \quad \varphi_5^*(\xi) = \frac{ac}{ab+ac+bc}, \quad \varphi_7^*(\xi) = \frac{bc}{ab+ac+bc}.$$

$$\text{Для } \xi_1 < \xi < \xi_2 \quad \varphi_1^*(\xi) = \frac{a}{a+c}, \quad \varphi_7^*(\xi) = \frac{c}{a+c}.$$

$$\text{Для } \xi_2 < \xi < \xi_3 \quad \varphi_2^*(\xi) = \frac{a}{a+c}, \quad \varphi_7^*(\xi) = \frac{c}{a+c}.$$

$$\text{Для } \xi_3 < \xi < \xi_4 \quad \varphi_2^*(\xi) = 1.$$

$$\text{Для } \xi_4 < \xi < \xi_5 \quad \varphi_6^*(\xi) = 1.$$

$$\text{Для } \xi_5 < \xi < 1 \quad \varphi_7^*(\xi) = 1.$$

Здесь

$$\eta_1 = \xi_1 = \frac{2(a-b)(b-c)^2(ab+ac+bc)}{a(b+c)(a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c)},$$

$$\eta_2 = \xi_2 - \xi_1 = \frac{(a+c)(b-c)(a^2b+a^2c+2ac^2+3b^3-5b^2c-2ab^2)}{a(b+c)(a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c)},$$

$$\eta_3 = \xi_3 - \xi_2 = \frac{2(a+c)(a-b)^2(2c-b)}{a(a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c)},$$

$$\eta_4 = \xi_4 - \xi_3 = \frac{2(a-b)^2(b-c)}{a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c},$$

$$\eta_5 = \xi_5 - \xi_4 = \frac{2c(a-b)(b-c)}{a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c},$$

$$\begin{aligned} \eta_6 &= 1 - \xi_5 = \\ &= \frac{c(a^2b^2+a^2c^2-6ab^2c+2a^2bc+2b^3c+b^4+2ac^3-7b^2c^2+4abc^2)}{a(b+c)(a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c)}. \end{aligned}$$

Случай 2. $a^2b + a^2c - 2ac^2 - 4abc - 2ab^2 - b^3 + 7b^2c \leq 0$; $2c - b \leq 0$.

Для $0 < \xi < \xi_1$

$$\varphi_1^*(\xi) = \frac{ab}{ab+ac+bc}, \quad \varphi_5^*(\xi) = \frac{ac}{ab+ac+bc}, \quad \varphi_7^*(\xi) = \frac{bc}{ab+ac+bc}.$$

$$\text{Для } \xi_1 < \xi < \xi_2 \quad \varphi_1^*(\xi) = \frac{a}{a+c}, \quad \varphi_7^*(\xi) = \frac{c}{a+c}.$$

$$\text{Для } \xi_2 < \xi < \xi_3 \quad \varphi_1^*(\xi) = \frac{b-2c}{b-c}, \quad \varphi_2^*(\xi) = \frac{c}{b-c}.$$

$$\text{Для } \xi_3 < \xi < \xi_4 \quad \varphi_6^*(\xi) = 1.$$

$$\text{Для } \xi_4 < \xi < 1 \quad \varphi_7^*(\xi) = 1.$$

Здесь

$$\eta_1 = \xi_1 = \frac{2(a-b)(b-c)^2(ab+ac+bc)}{a(b+c)(a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c)},$$

$$\eta_2 = \xi_2 - \xi_1 = \frac{(a+c)(3a^2c^2 - a^2b^2 - 2ab^2c + 2a^2bc - 6b^3c + b^4 + 2ab^3 - 2ac^3 + 9b^2c^2 - 6abc^2)}{a(b+c)(a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c)},$$

$$\eta_3 = \xi_3 - \xi_2 = \frac{2(a-b)^2(b-c)}{a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c},$$

$$\eta_4 = \xi_4 - \xi_3 = \frac{2c(a-b)(b-c)}{a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c},$$

$$\eta_5 = 1 - \xi_4 = \frac{c(a^2b^2 + a^2c^2 - 6ab^2c + 2a^2bc + 2b^3c + b^4 + 2ac^3 - 7b^2c^2 + 4abc^2)}{a(b+c)(a^2b+a^2c+2ac^2+b^3-2abc-3b^2c)}.$$

Задача 12. Пусть I_N означает максимальный ожидаемый выигрыш при использовании некоторой оптимальной стратегии, когда всего имеется N возможностей. Пусть $\varphi(\xi)$ означает вероятность принять ξ , когда это число предлагается в первый раз. Тогда очевидно, что

$$\begin{aligned} I_N = \max_{0 \leq \varphi \leq 1} \left\{ \int \xi \varphi(\xi) dF(\xi) + I_{N-1} \int [1 - \varphi(\xi)] dF(\xi) \right\} = \\ = \max_{0 \leq \varphi \leq 1} \left\{ \int \varphi(\xi) (\xi - I_{N-1}) dF(\xi) + I_{N-1} \right\}. \end{aligned}$$

Максимум достигается, когда $\varphi(\xi) = 1$ для $\xi > I_{N-1}$ и $\varphi(\xi) = 0$ для $\xi < I_{N-1}$. Поэтому I_N удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$I_N = I_{N-1} + \int_{I_{N-1}}^1 (\xi - I_{N-1}) dF(\xi).$$

В случае равномерного распределения $I_N = (1 + I_{N-1}^2)/2$. Для $N = 2$ критическое значение равно $5/8$; для $N = 3$ критическое значение равно $89/128$.

Задача 13. Пусть S_N означает максимальный ожидаемый выигрыш при использовании оптимальной стратегии, если всего имеется N возможностей. Пусть $\varphi(\xi)$ означает вероятность принять предложение ξ в первый раз. Тогда очевидно, что

$$S_N = \max_{0 \leq \varphi \leq 1} \left\{ \int (\xi + I_{N-1}) \varphi(\xi) dF(\xi) + S_{N-1} \int [1 - \varphi(\xi)] dF(\xi) \right\},$$

где I_N имеет тот же смысл, что и в задаче 12. Как и выше, мы заключаем, что этот максимум достигается, когда

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{при } \xi > S_{N-1} - I_{N-1}, \\ 0, & \text{при } \xi < S_{N-1} - I_{N-1} \end{cases}$$

и

$$S_N = \int_{S_{N-1}-I_{N-1}}^1 (\xi + I_{N-1} - S_{N-1}) dF(\xi) + S_{N-1}.$$

В случае равномерного распределения критическое число по отношению к первому выбору равно $\frac{3}{8}$. Второй выбор производится согласно критерию, найденному в задаче 12.

Будем в задачах 14—18 через $C_i(\xi, \phi)$ обозначать коэффициент при φ_i , если $K(\varphi, \phi)$ представлено в виде, аналогичном уравнению (17.2.1). Точно так же через $D_i(\eta, \varphi)$ будем обозначать коэффициент при ψ_i в другом представлении $K(\varphi, \phi)$.

Задача 14. $\psi_i^*(\eta) = 1$ есть условие оптимальности, так как $D_i(\eta, \varphi) \leq \leq D_i(0, \varphi) \leq 0$ для всех φ . φ_i^* есть характеристическая функция интервала

$$\left[\frac{a_i + c_i - d_i}{2d_i}, 1 \right] \cap [0, 1].$$

Задача 15. Эту задачу можно свести к задаче 14, если поменять ролями игроков.

Задача 16. Используя переменную ролей игроков, предложенную выше, мы можем непосредственно проверить, что $K(\varphi^*, \phi^*) = \max_{\varphi} K(\varphi, \phi^*)$ и $K(\varphi^*, \phi^*) = \min_{\psi} K(\varphi^*, \psi)$.

Задача 17. Пусть φ^*, ϕ^* — произвольная пара оптимальных стратегий, а стратегия ϕ^0 получается из стратегии ϕ^* путем замены фиксированной компоненты ψ_i^* на характеристическую функцию интервала $[\eta_i, 1]$, где

$$1 - \eta_i = \int_0^1 \psi_i^* d\eta.$$

Пара стратегий $\{\varphi^*, \phi^0\}$ будет по-прежнему оптимальна, так как $K(\varphi^*, \phi^0) \leq \leq K(\varphi^*, \phi^*) = \min_{\psi} K(\varphi^*, \psi)$ и $K(\varphi^*, \phi^0) = \max_{\varphi} K(\varphi, \phi^*)$.

Задача 18. Пусть $\{\varphi^*, \phi^*\}$ — пара оптимальных стратегий, где ϕ^* имеет вид, указанный в предыдущей задаче. Тогда $C_i(\xi, \phi^*)$ равно на интервале $0 \leq \xi \leq \eta_i$ константе λ_i . Если $\lambda_i < \lambda_j$ и $0 < \eta_i < 1$, то, увеличивая λ_i до $\lambda_i = \lambda_j$, мы можем, не нарушая оптимальности пары $\{\varphi^*, \phi^*\}$, изменить значение η_i . Таким образом, имеется оптимальная стратегия, для которой $\lambda_i = \lambda^*$ при всех индексах, для которых $\eta_i \neq 1$. Для этих индексов величины η_i указаны в задаче.

Задача 19. Пусть $\varphi_i(\xi)$ означает вероятность назвать i/n , где

$$i = 0, 1, \dots, n \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^n \varphi_i(\xi) = 1.$$

Пусть, далее, a_i есть вероятность того, что игрок II верит игроку I, если последний назвал i/n . В соответствии с такими стратегиями мы имеем

$$\begin{aligned}
 K(\varphi, a) = & - \int_0^1 \varphi_0(\xi) a_0 d\xi + \int_0^1 \varphi_0(\xi) (1 - a_0) d\xi + \int_0^1 \varphi_n(\xi) a_n d\xi - \\
 & - \int_0^1 \varphi_n(\xi) (1 - a_n) d\xi + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\int_0^{i/n} \varphi_i(\xi) a_i d\xi - \int_0^{i/n} \varphi_i(\xi) (1 - a_i) d\xi - \right. \\
 & \left. - \int_{i/n}^1 \varphi_i(\xi) a_i d\xi + \int_{i/n}^1 \varphi_i(\xi) (1 - a_i) d\xi \right] = (1 - 2a_0) \int_0^1 \varphi_0(\xi) d\xi + \\
 & + (2a_n - 1) \int_0^1 \varphi_n(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^{n-1} \left[(2a_i - 1) \int_0^{i/n} \varphi_i(\xi) d\xi - (2a_i - 1) \int_{i/n}^1 \varphi_i(\xi) d\xi \right].
 \end{aligned}$$

Очевидно, что $\varphi_0^0(\xi) = 0$ и $\varphi_n^0(\xi) = 0$. Так как $a_i = \frac{1}{2}$ для всех i является устойчивой стратегией игрока II, мы будем искать устойчивую стратегию игрока I. Для такой стратегии

$$\int_0^{i/n} \varphi_i(\xi) d\xi = \int_{i/n}^1 \varphi_i(\xi) d\xi \quad (i = 1, \dots, n-1).$$

Один из способов удовлетворить этому условию состоит в том, чтобы положить

φ_1^0	φ_2^0	φ_3^0	...	φ_{n-2}^0	φ_{n-1}^0	Интервал определения
$\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$	...	$\frac{1}{2(n-1)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$	$\left(0, \frac{1}{n}\right)$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	...	0	0	$\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	...	0	0	$\left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right)$
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	
0	0	0	...	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right)$
$\frac{1}{2(n-1)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$	...	$\frac{1}{2(n-1)}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2(n-1)}$	$\left(\frac{n-1}{n}, 1\right)$

Для того чтобы сделать эту книгу возможно более полной и вместе с тем доступной читателю, имеющему математическую подготовку, лишь незначительно выходящую за рамки дифференциального и интегрального исчисления, мы посвящаем настоящие приложения краткому обзору тех разделов математики, которые играют фундаментальную роль в изучении этой книги. Там, где исследование требует изложения более современных результатов, их суть, как правило, включена в текст непосредственно.

В приложении А излагаются основные сведения из теории векторных пространств и матриц. В основном наш подход к этой теории — в отличие от обычного — скорее геометрический, нежели алгебраический. Мы не развиваем теорию матриц абстрактно, в терминах общих колец и полей, а ограничиваемся случаем, когда поле скаляров наших векторных пространств состоит из всех вещественных или всех комплексных чисел. Доказательства, которые трудно найти в литературе, мы приводим со всеми деталями; во всех случаях мы хотя бы намечаем аргументацию в обоснование основных утверждений теории.

В приложении Б рассматриваются некоторые аспекты теории выпуклых множеств и выпуклых функций. Значительная часть теории конечных игр, линейного программирования и математической экономики связана с операциями над множествами и функциями, определяемыми линейными и выпуклыми неравенствами. Мы приводим здесь удобные для нашей цели формулировки теорем об отделимости для выпуклых множеств и рассматриваем простые факты теории двойственности выпуклых конусов. В тексте уделяется внимание и нескольким более глубоким вопросам теории выпуклых множеств, например развитию теории сопряженных выпуклых функций, а также некоторым результатам о выпуклости, связанным с пространствами моментов.

Приложение В содержит обзор разнообразных фактов, касающихся функций, интегралов и теорем о неподвижной точке, которые явно используются в ходе некоторых рассуждений в этой книге. Точно определяются понятия полунепрерывных и равностепенно непрерывных функций и перечисляются некоторые свойства таких функций. В разделе В.2 говорится о важной теореме Какутани о неподвижной точке. В разделе В.3 приводятся для справок необходимые свойства интегралов Лебега — Стильтьеса.

В связи с вопросами, затронутыми в этих приложениях, могут быть полезны следующие книги и статьи:

Приложение А: Перлис [1], Биркоф и Мак-Лейн [1], Гантмахер [1].

Приложение Б: Фенхель [1], Харди, Литлвуд и Поля [1], гл. 2.

Приложение В: Грэйвс [1], Рудин [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И МАТРИЦЫ

А.1. Евклидовы и унитарные пространства. *Вещественное векторное пространство* может быть определено следующим образом. Пусть нам заданы: некоторое множество V , ассоциативное и коммутативное сложение (обозначаемое знаком $+$), определенное для пар его элементов, единственный нулевой элемент θ и умножение элементов V на вещественные числа, для которого при вещественных α, β и элементах x, y из V мы имеем:

$$x + \theta = x, \quad 1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = \theta,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$$

В качестве важнейшего примера укажем n -мерное евклидово пространство E^n , состоящее из множества всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из n вещественных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, в котором операции сложения и умножения на вещественное число γ определены следующим образом:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\gamma x_1, \gamma x_2, \dots, \gamma x_n).$$

Нулевым элементом θ является здесь элемент $(0, 0, \dots, 0)$, обозначаемый далее, как θ ; каждому x соответствует противоположный элемент $-x = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ (иначе говоря, $x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0 \cdot x = \theta$), и мы можем определить вычитание, положив $y - x = y + (-x)$. Следует заметить, что в этом примере вещественные числа можно заменить комплексными; тогда соответствующее векторное пространство U^n будет называться n -мерным *унитарным* пространством.

Фактически E^n и U^n являются не просто векторными пространствами; мы можем в них ввести дополнительную операцию образования скалярного произведения (x, y) двух элементов x и y :

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i,$$

где $\bar{y}_i$ — комплексное число, сопряженное с y_i . (Говорят, что два элемента x и y *ортogonalны*, если $(x, y) = 0$.) С помощью этой операции определяется обычное расстояние

$$d(x, y) = (x - y, x - y)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Очевидно, здесь $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ (знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$); кроме того, имеет место неравенство треугольника

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

Число $d(0, x)$ принято называть длиной x , а x_i — i -й компонентой элемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Далее мы повсюду будем считать E^n и U^n векторными пространствами, и любое утверждение, высказанное относительно E^n , может быть равным образом отнесено к U^n (но не наоборот). Чтобы не говорить каждый раз о вещественных или комплексных числах, мы будем именовать встречающиеся числа скалярами (α, β, γ и т. д.), а элементы векторного пространства векторами (x, y, z и т. д.).

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Пусть $\mathcal{P}^n$ — множество всех определенных на интервале $-\infty < a \leq t \leq b < \infty$ полиномов $p(t)$ с вещественными (комплексными) коэффициентами и степенями, не превосходящими $n-1$. Проверить, что при обычном определении сложения полиномов и умножения на вещественный (комплексный) скаляр множество $\mathcal{P}^n$ является вещественным (комплексным) векторным пространством. Показать, что скалярное произведение элементов p_1 и p_2 из $\mathcal{P}^n$ можно определить формулой

$$(p_1, p_2) = \int_a^b p_1(t) \bar{p}_2(t) dt.$$

2. Пусть C — множество комплексных чисел, причем сложение и умножение на вещественные скаляры определено обычным образом. Показать, что C есть вещественное векторное пространство, для которого скалярное произведение элементов $x = a + bi$ и $y = c + di$ можно задать равенством $(x, y) = ac + bd$.

3. В E^3 , например, мы можем сопоставить каждому вектору (x, y, z) точку трехмерного пространства, имеющую декартовы координаты $\{x, y, z\}$. Таким образом, некоторые множества векторов мы можем интерпретировать, как линии, плоскости и т. д. Пояснить это утверждение.

4. Пусть в E^n

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Показать, что $d(x, y)$ удовлетворяет обычным требованиям, предъявляемым к функции расстояния; именно $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$, где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $x = y$, и $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

5. Употребляя обычную функцию расстояния в E^n и обращая внимание на соотношения между понятием „ортогональный“ и обычным определением понятия „перпендикулярный“, сформулировать и доказать для E^n общую теорему Пифагора.

А.2. Подпространства, линейная независимость, базис, прямые суммы, ортогональные дополнения. Подпространство V_1 векторного пространства V есть подмножество, замкнутое относительно сложения векторов и умножения их на скаляры: если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ содержатся в V_1 и α — скаляр, то $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ и $\alpha\mathbf{y}$ также принадлежат V_1 . Относительно этих операций само V_1 является векторным пространством. Например, множество всех линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}^i = \alpha_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}^k$$

фиксированной системы $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k\}$ векторов образует подпространство, называемое *линейной оболочкой* векторов $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$. Наоборот, если V_1 — линейная оболочка $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$, то $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$ порождает V_1 .

Множество векторов $\{\mathbf{x}, \dots, \mathbf{x}^k\}$ называется *линейно независимым*, если из равенства

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0}$$

следует, что $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$). Линейно независимое множество векторов $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k\}$, порождающее V , называется *базисом* V . Очевидно, система

$$\mathbf{e}^1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}^2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \\ \mathbf{e}^n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

образует базис в E^n . (Не все векторные пространства имеют базисы, отличные от всего пространства; тривиальным примером может служить случай, когда V состоит из единственного элемента $\mathbf{0}$. В этом случае мы обычно не будем считать V векторным пространством.)

Если система векторов $\{\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k\}$ порождает V , то некоторая ее подсистема должна составлять базис V ; если система линейно независима, то это очевидно; в противном случае мы имеем

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}^i = \mathbf{0},$$

где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{x}^1 = \sum_{i=2}^k (-\alpha_i \cdot \alpha_1^{-1}) \mathbf{x}^i$$

и, очевидно, $\{x^2, \dots, x^k\}$ порождает V . Если эта подсистема не является независимой, то мы повторяем приведенные рассуждения до тех пор, пока не придем к независимой подсистеме. Преимущество рассмотрения линейно независимых базисов $\{y^1, \dots, y^l\}$ в V состоит в том, что в этом случае каждое x из V единственным образом представимо в виде

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i y^i.$$

Здесь мы можем говорить о единственных скалярах α_i , как о координатах вектора x относительно базиса $\{y^1, \dots, y^l\}$.

Приведем без доказательства несколько важных фактов относительно базисов. Каждое нетривиальное подпространство V_1 из E^n имеет базис, и каждый базис подпространства V_1 содержит одно и то же число элементов; это число называется размерностью подпространства (обозначение $\dim V_1$). Если $V_1 = \{0\}$, то $\dim V_1 = 0$. Если $V_1 \neq E^n$ (в этом случае подпространство V_1 называется собственным), то каждый базис $\{x^1, x^2, \dots, x^k\}$ подпространства V_1 может быть дополнен до базиса $\{x^1, x^2, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l\}$ пространства E^n (таким образом, V_1 имеет размерность $k < n = \dim E^n$). Любая линейно независимая подсистема, будучи базисом своей линейной оболочки, также может быть дополнена таким образом. Поэтому любая линейно независимая подсистема в E^n из n элементов уже является в E^n базисом. Следует заметить, что V_1 как векторное пространство, по существу, есть E^k , вложенное в E^n , ибо при однозначном отображении

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i$$

(α_i — скаляры) E^k на V_1 все суммы и произведения на скаляр соответствуют друг другу.

Базис в E^n или U^n называется *ортонормальным*, если

$$(y^i, y^j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

т. е. если различные элементы базиса ортогональны и каждый из них имеет длину 1. Компоненты произвольного вектора из линейной оболочки системы $\{y^1, \dots, y^k\}$ относительно ортонормального базиса этой системы вычисляются с помощью скалярного произведения:

$$x = \sum_{i=1}^k (x, y^i) y^i,$$

так как разность обеих частей ортогональна каждому y^i и, следовательно, ортогональна самой себе. Каждое подпространство E^n (или U^n) имеет ортонормальный базис.

Если V_1 и V_2 — подпространства V и

$$V = V_1 + V_2 = \{x + y | x \in V_1, y \in V_2\},$$

причем $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, то V есть прямая сумма V_1 и V_2 (обозначение: $V = V_1 \oplus V_2$). В этом случае каждый вектор $z \in V$ единственным образом представим в виде $z = x + y$, где $x \in V_1$, $y \in V_2$, ибо $x + y = x' + y'$ означает, что вектор $x - x' = y' - y$ содержится как в V_1 , так и в V_2 и, следовательно, равен 0. Поэтому если $\{x^1, \dots, x^k\}$ является базисом V_1 , а $\{y^1, \dots, y^m\}$ базисом V_2 , то

$$\{x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^m\}$$

будет базисом V , так как эта система, очевидно, порождает V . В то же время, если $\sum \gamma_i x^i + \sum \delta_j y^j = 0$, или $\sum \gamma_i x^i = -\sum \delta_j y^j$, то каждая из сумм равна 0 и, следовательно, все числа γ_i и δ_j равны нулю.

Для любого подпространства V из E^n (или U^n) множество

$$V^\perp = \{x | (x, y) = 0 \text{ для } y \in V\}$$

называется *ортогональным дополнением* V . Ясно, что $V^\perp$ является подпространством и $E^n = V \oplus V^\perp$; кроме того, $V^{\perp\perp} = (V^\perp)^\perp = V$. Так как очевидно, что $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$, то $\dim V^\perp = n - \dim V$.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Показать, что в пространстве $\mathcal{P}^n$ (см. упр. 1, п. А. 1) полиномы $1, t, \dots, t^{n-1}$ составляют базис; показать также, что $\mathcal{P}^n$ имеет размерность n .

2. Доказать, что элементы 1 и i образуют ортогональный базис пространства $\mathcal{C}$ (см. упр. 2, п. А. 1) и что, таким образом, $\mathcal{C}$ двумерно.

3. Доказать, что любое непустое собственное подпространство пространства E^3 соответствует прямой или плоскости, проходящей через начало координат, а его ортогональное дополнение представляет собой перпендикулярную плоскость (или соответственно прямую), также проходящую через начало координат.

4. Пусть a — ненулевой вектор в пространстве E^n . Пусть $H = \{x | x \in E^n, (x, a) = 0\}$. Показать, что множество H (называемое гиперплоскостью) есть подпространство E^n , и найти его размерность.

5. Найти ортогональный базис пространства $\mathcal{P}^2$ и выразить полиномы 1 и t через этот базис.

А.З. Линейные преобразования, матрицы и линейные уравнения. *Линейное преобразование* T , отображающее E^n в E^m , есть функция с областью задания E^n и областью значений E^m , которая сохраняет суммы и умножения на скаляры:

$T(x + y) = Tx + Ty$ и $T(\alpha x) = \alpha Tx$. Очевидно, что $T0 = 0$, так как $T0 = T(0 + 0) = T0 + T0$. Аналогично $T(x - y) = Tx - Ty$, ибо

$$T(x - y) + Ty = T(x - y + y) = Tx.$$

Ядро преобразования T , $\mathcal{N}(T) = \{x \mid Tx = 0\}$, является подпространством E^n (т. е. из $x, y \in \mathcal{N}(T)$ следует $\alpha x + \beta y \in \mathcal{N}(T)$ для любых скаляров α и β). $\mathcal{N}(T)$ может вырождаться в тривиальное подпространство $\{0\}$. Если преобразование T однозначно, то такое вырождение всегда имеет место; обратно, равенства $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ или $\dim \mathcal{N}(T) = 0$ эквивалентны тому, что T является однозначным преобразованием. Аналогично образ E^n при преобразовании T , т. е. множество $\mathcal{R}(T) = \{Tx \mid x \in E^n\}$, также является подпространством E^m , причем

$$\dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{R}(T) = n. \quad (\text{А. 3.1})$$

Докажем последнее равенство. Если выбрать базис $\mathcal{N}(T)$

$$\{x^1, \dots, x^k\}$$

и расширить его до базиса $\{x^1, \dots, x^k, y^{k+1}, \dots, y^n\}$ пространства E^n , то, поскольку V является линейной оболочкой векторов $\{y^{k+1}, \dots, y^n\}$, $E^n = \mathcal{N}(T) \oplus V$. Нам остается проверить, что $\mathcal{N}(T) \cap V = \{0\}$. Но из того, что $z \in \mathcal{N}(T) \cap V$, следует

$$z = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i = \sum_{j=k+1}^n \beta_j y^j.$$

Далее, векторы $\{x^1, \dots, x^k, y^{k+1}, \dots, y^n\}$ линейно независимы: поэтому все числа α_i, β_j равны 0 и $z = 0$. Но образ произвольного элемента $\sum \alpha_i x^i + \sum \beta_j y^j \in E^n$ есть $T(\sum \beta_j y^j) = \sum \beta_j Ty^j$, и, следовательно, векторы $\{Ty^{k+1}, \dots, Ty^n\}$ порождают $\mathcal{R}(T)$. С другой стороны, это множество линейно независимо, так как из равенства $\sum (\beta_j Ty^j) = 0$ следует $T(\sum \beta_j y^j) = 0$, что означает $\sum \beta_j y^j \in \mathcal{N}(T) \cap V = \{0\}$ и, следовательно, все $\beta_j = 0$. Таким образом, $\dim \mathcal{R}(T) = n - k$, и требуемое доказано. Заметим, что V определяется неоднозначно.

Как следствие получаем, что $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда T — однооднозначное преобразование. Таким образом, если $m = n$, то преобразование T отображает E^n на себя в том и только в том случае, когда это преобразование однооднозначно.

Матрицы. Прямоугольная таблица чисел

$$A = \|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

называется *матрицей* (в данном случае $m \times n$ -матрицей, m — строчной, n — столбцовой) с *элементами* a_{ij} . Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*.

Матрица A определяет линейное преобразование T пространства E^n в E^m . Именно

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \right).$$

Обратно, если мы выберем в E^n ортонормальный базис $\{e^1, \dots, e^n\}$, а в E^m ортонормальный базис $\{f^1, \dots, f^m\}$, то каждое линейное преобразование T может быть так получено. В самом деле, T определяется своими значениями на множестве всех e^j , так как

$$T\left(\sum_{j=1}^n x_j e^j\right) = \sum_{j=1}^n x_j T e^j,$$

а $T e^j$ можно представить в виде суммы

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} f^i$$

при некоторых однозначно определяемых скалярах $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$. Таким образом, мы имеем

$$Tx = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} f^i \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m x_j a_{ij} f^i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) f^i,$$

и компоненты Tx получаются, как и раньше, из матрицы A . Кроме того, ясно, что мы можем вместо $\{e^1, \dots, e^n\}$ и $\{f^1, \dots, f^m\}$ рассматривать любые другие фиксированные упорядоченные базисы в E^n и E^m . Это дает однозначное соответствие между линейными отображениями E^n в E^m , с одной стороны, и $m \times n$ -матрицами — с другой. Это соответствие будет, конечно, зависеть в большой мере от выбранных базисов (и от их индексации). Однако, рассматривая матрицу, как преобразование, мы всегда будем иметь в виду наше начальное соответствие.

Для линейных преобразований T и S , отображающих E^n на E^m , можно определить сумму $T + S$, как такое линейное преобразование, для которого $(T + S)(x) = Tx + Sx$. Аналогично образ элемента x в преобразовании cT (c — скаляр) определяется как $(cT)x = c(Tx)$. Очевидно, что одноименные операции над матрицами сводятся к сложению соответствующих элементов или умножению их на скаляр:

$$A + B = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots \end{vmatrix}$$

и

$$cA = \begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots \end{vmatrix}.$$

Мы видим, таким образом, что все $m \times n$ -матрицы образуют векторное пространство с очевидным базисом e_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$), где e_{ij} — матрица, все элементы которой равны 0, за исключением элемента, стоящего на ij -м месте, который равен единице. Это пространство имеет размерность mn .

Если T отображает E^n в E^m , а S отображает E^m в E^l , то мы можем составить преобразование ST , отображающее E^n в E^l . Точнее говоря, будем полагать $ST(x) = S(Tx)$. Линейное преобразование ST называется *произведением* преобразований S и T . Легко вычислить матрицу, соответствующую этому произведению. Если преобразованию S соответствует $l \times m$ -матрица A , а преобразованию T — $m \times n$ -матрица B , то AB есть $l \times n$ -матрица, у которой ij -й элемент равен

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, \dots, l; j = 1, \dots, n).$$

Если рассматривать элементы пространства E^n , как $n \times 1$ -матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

(вектор-столбцы), то вычисление компонент $\mathbf{T}\mathbf{x}$ (где $\mathbf{T}$ соответствует матрице $\|b_{ij}\|$) сведется к образованию произведения матриц

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}x_j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{mj}x_j \end{pmatrix},$$

откуда образы элементов из E^m получаются как $m \times 1$ -вектор-столбцы. Получающийся вектор-столбец можно также представить в виде

$$x_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix},$$

так что размерностью $\mathfrak{R}(\mathbf{T})$, называемой рангом $\mathbf{T}$ (или $\mathbf{B}$), является число линейно независимых столбцов матрицы $\mathbf{B}$ (рассматриваемых, как векторные элементы пространства E^m). Ранг можно получить при помощи исключения зависимых столбцов или с помощью вычисления определителей. Ранг равен k , если после исключения линейно зависимых строк и столбцов $\mathbf{B}$ наибольшая квадратная подматрица с ненулевым определителем имеет размеры $k \times k$.

Наконец, линейное преобразование E^n в E^1 (последнее пространство мы можем рассматривать как вещественную ось) называется *линейным функционалом*. Как мы уже видели, этот функционал задается [относительно базисов $\{\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n\}$ и $\{\mathbf{f}^1\}$, где $\mathbf{f}^1 = (1)$] с помощью $1 \times n$ -матрицы и в произвольной точке $(x_1, \dots, x_n)$ принимает значение $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ (скаляры c_i фиксированы). Таким образом, каждый линейный функционал можно получить как скалярное произведение. Он отображает $\mathbf{x}$ в $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ при некотором фиксированном $\mathbf{y} \in E^n$.

Линейные уравнения. Описанное соответствие между матрицами и линейными преобразованиями можно применить к исследованию систем линейных уравнений. Рассмотрим следующую систему m уравнений с n неизвестными (вещественными или комплексными числами):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2, \\ \vdots & \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m. \end{aligned} \tag{A. 3.2}$$

Решение этой системы эквивалентно нахождению точки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ в E^n , отображающейся в точку $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_m)$ пространства E^m . Решение для любого $\mathbf{c}$ можно получить тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|$ равен m .

Если все $c_i = 0$, то система называется *однородной* (в противном случае — неоднородной) и имеет тривиальное решение $(0, 0, \dots, 0)$. Однородная система имеет нетривиальные решения, если $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$. Если $n > m$ (т. е. если неизвестных больше, чем уравнений), то нетривиальное решение обязательно существует, ибо в противном случае окажется, что $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = n$, что превосходит размерность E^m , в то время как $\mathcal{R}(\mathbf{A}) \subset E^m$. Если $n = m$, то система (А. 3.2) разрешима при любом $\mathbf{c}$ тогда и только тогда, когда каждое решение единственно. Для этого достаточно, чтобы система имела единственное решение для случая $\mathbf{c} = 0$. Это равносильно утверждению, что $\mathbf{A}$ отображает E^n на себя тогда и только тогда, когда $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{0\}$.

Преобразование E^n в E^n . Пусть $L(E^n)$ — множество всех линейных преобразований T , отображающих E^n в E^n . Если $S, T \in L(E^n)$, то преобразования $S+T$, ST и sT также принадлежат $L(E^n)$, так что $L(E^n)$ образует векторное пространство с (некоммутативным) ассоциативным и дистрибутивным умножением. Нулевой элемент $L(E^n)$ отображает каждый $\mathbf{x}$ в $\mathbf{0}$. Для тождественного преобразования $\mathbf{I}$, отображающего любое $\mathbf{x}$ в $\mathbf{x}$, имеет место $\mathbf{I}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{I} = \mathbf{T}$. В терминах матриц нулевое преобразование соответствует матрице, все элементы которой нули, а

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(единицы стоят здесь на главной диагонали). Мы знаем, что $\mathbf{T}$ является однооднозначным преобразованием тогда и только тогда, когда $\mathbf{T}$ есть преобразование „на“. В этом случае обратное преобразование $\mathbf{T}^{-1}$ (для которого областью определения является все пространство E^n) также линейно и принадлежит $L(E^n)$. Равенство $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ эквивалентно, по определению, $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$. Однооднозначными преобразованиями $L(E^n)$ являются те, которые обладают мультипликативно обратными преобразованиями $\mathbf{T}^{-1}$:

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}.$$

Эти преобразования называются *невыврожденными* или *обратимыми*; все остальные преобразования называются *вырожденными*¹⁾. Аналогичная терминология применима и к матрицам. В частности, матрица A называется невырожденной, если для некоторой матрицы $AB=I$ (или $BA=I$) (ибо матрица A , рассматриваемая как линейное преобразование, не может понижать размерность и поэтому является однозначным отображением „на“). Матрица B при этом, конечно, является (единственной) обратной матрицей и может быть обозначена как A^{-1} , причем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k.$$

Если матрица A — вырожденная, то можно найти числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, не все равные нулю, для которых $A(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

Заметим, наконец, что произведение невырожденных матриц (преобразований) также невырожденно: $(ST) \cdot (T^{-1}S^{-1}) = T^{-1}S^{-1} \cdot ST = I$.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Пусть в пространстве E^2 с базисом $\{e^1, e^2\}$ преобразование A_θ означает поворот всех точек вокруг начала координат на угол θ против часовой стрелки. Показать, что матрица A_θ имеет вид

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Показать далее, что $A_{\theta_1+\theta_2} = A_{\theta_1}A_{\theta_2}$ и $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$.

2. Показать, что в пространстве $\mathcal{P}^n$ интеграл

$$\int_a^b p(t) dt$$

является линейным функционалом; представить его в виде (q, p) , где q — некоторый элемент из $\mathcal{P}^n$, а скобки $()$ означают скалярное произведение, определенное в упр. 1, п. А. 1.

3. Определим в пространстве $\mathcal{P}^n$ с базисом $\{1, t, t^2, \dots, t^{n-1}\}$ линейное преобразование A_k ($k \geq 1$), положив

$$A_k p = \frac{d^k}{dt^k} p(t).$$

¹⁾ В оригинале вырожденные отображения называются сингулярными. — Прим. перев.

Проверить, что A_k — вырожденное преобразование, а

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{k!}{0!} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{(k+1)!}{1!} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} & \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \end{vmatrix}$$

— его матричное представление в указанном базисе.

Показать попутно, что $\mathcal{R}(A_k)$ есть линейная оболочка векторов $\{t^{n-k}, t^{n-k+1}, \dots, t^{n-1}\}$, а $\mathcal{N}(A_k)$ — линейная оболочка векторов $\{1, t, \dots, t^{n-k-1}\}$.

А.4. Собственные значения. Собственные векторы. Каноническая форма Жордана. Если для некоторого λ матрица $T - \lambda I$ вырожденная, то такое λ называется *собственным числом* или *собственным значением* T . Этому числу λ соответствует некоторый вектор $x \neq 0$, такой, что $(T - \lambda I)x = 0$, или, что то же самое, $Tx = \lambda x$. Вектор x называется *собственным вектором* матрицы T , соответствующим собственному значению λ .

Каждое преобразование $T \in L(U^n)$ имеет собственные значения и, следовательно, собственные векторы. Соответствующее утверждение для $L(E^n)$, если требовать вещественности числа λ , уже не имеет места. Однако любая вещественная матрица может также считаться элементом $L(U^n)$ и тем самым иметь комплексные собственные значения и собственные векторы с комплексными компонентами.

Существование собственных чисел устанавливается следующим образом. Заметим, что пространство $L(U^n)$ n^2 -мерно, и потому $n^2 + 1$ элементов $I, T, T^2, \dots, T^{n^2}$ должны быть линейно зависимыми; следовательно, можно найти такие не все равные нулю числа $a_0, a_1, \dots, a_{n^2}$, что $a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_{n^2} T^{n^2} = 0$. Соответствующий полином $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n^2} z^{n^2}$ по основной теореме алгебры можно представить в виде

$$p(z) = \prod_{i=1}^k (z - \lambda_i).$$

Так как тождественное равенство полиномов означает, что коэффициенты p (при степенях z) можно получить путем выполнения умно-

жения в правой части и те же самые коэффициенты (при степенях T) получаются в результате вычисления произведения

$$\prod_{i=1}^k (T - \lambda_i I),$$

мы имеем

$$\prod_{i=1}^k (T - \lambda_i I) = a_0 I + a_1 T + \dots + a_n T^{n^2} = p(T) = 0.$$

Следовательно, одно из $T - \lambda_i I$ должно быть вырожденным.

При любом базисе $\{y^1, \dots, y^n\}$ пространства U^n , записав

$$x = \sum_{i=1}^n x_i y^i$$

и аналогично выразив Tx через базис $\{y^1, \dots, y^n\}$, мы можем представить T в виде матрицы A , отображающей вектор $(x_1, \dots, x_n)$ в вектор с компонентами Tx относительно этого базиса. При подходящем выборе базиса матрица A принимает *жорданову каноническую форму*:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & & A_k \end{array} \right\|,$$

где нули означают соответствующие прямоугольные матрицы с нулевыми элементами, а A_i — квадратные матрицы, которые могут быть записаны (в так называемой блок-диагональной форме) с помощью диагональных блоков („ящиков“) вида

$$B = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{array} \right\|$$

(на главной диагонали стоят λ_i , под ней единицы, а на остальных местах нули). Эти же λ_i появляются в остальных подматрицах A_i , но при $i \neq j$ $\lambda_i \neq \lambda_j$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ составляют множество всех собственных чисел преобразования T . Описанное разложение A на блоки имеет следующий смысл: любой вектор линейной оболочки элементов базиса

$$\{y^j, y^{j+1}, \dots, y^k\},$$

соответствующих блоку $\mathbf{B}$, отображается в вектор того же подпространства. В этом подпространстве $\mathbf{T}$ действует как сумма двух простых преобразований: преобразования, отображающего $\mathbf{x}$ в $\lambda_i \mathbf{x}$, и преобразования, отображающего $\mathbf{y}^j$ в $\mathbf{y}^{j+1}$, $\mathbf{y}^{j+1}$ в $\mathbf{y}^{j+2}$, ..., $\mathbf{y}^{k-1}$ в $\mathbf{y}^k$, $\mathbf{y}^k$ в $\mathbf{0}$ (таким образом, $\mathbf{T} - \lambda_i \mathbf{I}$ сводится к последнему преобразованию на подпространство). Фактически мы имеем дело с разложением E^n в прямую сумму подпространств, и на каждом из них $\mathbf{T}$ имеет довольно простой вид. Во многих важных случаях блок $\mathbf{B}$ имеет размеры 1×1 , так что матрица $\mathbf{A}$ принимает чисто диагональную форму:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{array} \right\|,$$

где уже не все λ_i должны быть различными. Собственные векторы преобразования $\mathbf{T}$ порождают пространство U^n . Если $\mathbf{T}$ имеет n различных собственных значений, то, очевидно, каждый блок $\mathbf{B}$ имеет размеры 1×1 , а матрица $\mathbf{A}$ — диагональную форму.

Выясним теперь строение базиса $\{\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n\}$. Рассмотрим с этой целью для вырожденного преобразования $\mathbf{S}$ из $L(U^n)$ (или из $L(E^n)$) последовательность $\mathcal{N}(\mathbf{S})$, $\mathcal{N}(\mathbf{S}^2)$. Очевидно, $\mathcal{N}(\mathbf{S}) \subset \mathcal{N}(\mathbf{S}^2) \subset \dots$, и так как собственные подпространства имеют размерности, меньшие чем размерность пространства, должно существовать такое $k \leq n$, что

$$\mathcal{N}(\mathbf{S}) \subsetneq \mathcal{N}(\mathbf{S}^2) \subsetneq \dots \subsetneq \mathcal{N}(\mathbf{S}^k) = \mathcal{N}(\mathbf{S}^{k+1}).$$

Тогда $\mathcal{N}(\mathbf{S}^k) = \mathcal{N}(\mathbf{S}^{k+j})$ для всех $j \geq 0$. Действительно, поскольку $\mathcal{N}(\mathbf{S}^k) = \mathcal{N}(\mathbf{S}^{k+1})$, из соотношения $\mathbf{S}^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ следует, что $\mathbf{S}^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Поэтому равенства $\mathbf{S}^{k+j}\mathbf{x} = \mathbf{0} = \mathbf{S}^{k+1}(\mathbf{S}^{j-1}\mathbf{x})$ влекут $\mathbf{S}^k(\mathbf{S}^{j-1}\mathbf{x}) = \mathbf{S}^{k+j-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, откуда в свою очередь следует, что $\mathbf{S}^{k+j-1}\mathbf{x} = \mathbf{S}^{k+j-2}\mathbf{x} = \dots = \mathbf{S}^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Согласно соотношению для размерностей (А.3.1), мы имеем

$$\mathcal{R}(\mathbf{S}) \supsetneq \mathcal{R}(\mathbf{S}^2) \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{R}(\mathbf{S}^k) = \mathcal{R}(\mathbf{S}^{k+1}) = \dots$$

Таким образом, отображение $\mathbf{S}$, рассматриваемое только на $\mathcal{R}(\mathbf{S}^k)$, будучи отображением „на“, является однооднозначным. Но поскольку отображение $\mathbf{S}^k$ однооднозначно, мы имеем $\mathcal{N}(\mathbf{S}^k) \cap \mathcal{R}(\mathbf{S}^k) = \{\mathbf{0}\}$. Если $\{\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^l\}$ — базис пространства $\mathcal{N}(\mathbf{S}^k)$, а $\{\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^m\}$ — базис $\mathcal{R}(\mathbf{S}^k)$, то в силу равенства (А.3.1) $l + m = n$. Объединение

$\{x^1, \dots, x^l; y^1, \dots, y^m\}$ этих базисов образует базис пространства U^n , причем $U^n = \mathcal{N}(S^k) \oplus \mathcal{R}(S^k)$. Относительно этого базиса S будет иметь матричную структуру вида

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где $A — l \times l$ -матрица, а $B — (n-l) \times (n-l)$ -матрица.

Предположим теперь, что T — произвольный элемент пространства $L(U^n)$. Мы знаем, что для T существует собственное значение λ_1 ; следовательно, мы можем взять $S = T - \lambda_1 I$ и положить

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}[(T - \lambda_1 I)^{k_1}],$$

где k_1 — значение k , полученное выше для S . Соответственно $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}[(T - \lambda_1 I)^{k_1}]$. Мы имеем $U^n = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{R}_1$, причем $(T - \lambda_1 I)x$ принадлежит $\mathcal{N}_1$ или $\mathcal{R}_1$, смотря по тому, принадлежит x подпространству $\mathcal{N}_1$ или подпространству $\mathcal{R}_1$. Так как $\lambda_1 x$ находится в том же подпространстве, что и x , то $Tx \in \mathcal{N}_1$, если $x \in \mathcal{N}_1$, и $Tx \in \mathcal{R}_1$, если $x \in \mathcal{R}_1$. Пусть преобразование T_1 , переводящее $\mathcal{R}_1$ в себя, есть T , рассматриваемое на подпространстве $\mathcal{R}_1$. Так как мы можем отождествить $\mathcal{R}_1$ с некоторым U^m , отображение T_1 имеет собственное значение λ_2 , так что $Tx = T_1x = \lambda_2 x$ для некоторого ненулевого $x \in \mathcal{R}_1$. Поскольку $(T - \lambda_1 I)x \neq 0$ (ибо $T - \lambda_1 I$ — однооднозначное отображение $\mathcal{R}_1$ на себя), мы заключаем, что $\lambda_2 \neq \lambda_1$. Определяя подобным же образом $\mathcal{N}_2$ и $\mathcal{R}_2$, мы получим $\mathcal{R}_1 = \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{R}_2$ (следовательно, $U^n = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \mathcal{R}_2$) и

$$T\mathcal{N}_2 = T_1\mathcal{N}_2 = \{T_1x \mid x \in \mathcal{N}_2\} \subset \mathcal{N}_2, \quad T\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2.$$

Продолжая этот процесс далее, мы получим $U^n = \mathcal{N}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{N}_r$ и такую последовательность собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, что $(T - \lambda_i I)^{k_i}x = 0$ для всех $x \in \mathcal{N}_i$ и некоторого $k_i \geq 1$. Выбирая в пространстве U^n произвольный базис, образованный объединением базисов всех $\mathcal{N}_i$, представим матрицу A в блок-диагональной форме, ибо это равносильно тому, что $T\mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_i$. Дальнейшее разложение на подблоки требует более тонких рассуждений. Заметим лишь, что если мы выберем из $\mathcal{N}_1$ элемент x_1 , для которого $(T - \lambda_1 I)^{k_1-1}x_1 \neq 0$ (т. е. элемент $\mathcal{N}[(T - \lambda_1 I)^{k_1}]$, который не принадлежит $\mathcal{N}[(T - \lambda_1 I)^{k_1-1}]$; такой элемент x_1 существует согласно выбору k_1), то для $S = T - \lambda_1 I$ элементы $x_1, Sx_1, \dots, S^{k_1-1}x_1$ независимы. В самом деле, если

$$\gamma_1 x_1 + \gamma_2 Sx_1 + \dots + \gamma_{k_1-1} S^{k_1-1}x_1 = 0,$$

то, применяя преобразование S^{k_1-1} , мы получаем $\gamma_1 S^{k_1-1}x_1 = 0$ и, следовательно, $\gamma_1 = 0$; затем, применяя последовательно преобразо-

вания $S^{k_1-2}, S^{k_1-3}, \dots$, мы получим $\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 0$. Эти векторы не обязательно составляют базис $\mathcal{N}_1$, но можно показать, что существует такое конечное множество $x_1, x_2, \dots$, что векторы $x_1, Sx_1, \dots, S^{k_1-1}x_1; x_2, Sx_2, \dots, S^{j_2-1}x_2; x_3, Sx_3, \dots, S^{j_3-1}x_3; \dots$ уже образуют базис $\mathcal{N}_1$, где $S^{j_2}x_2 = 0, S^{j_3}x_3 = 0, \dots, j_2 \leq k_1, j_3 \leq j_2$ и т. д.¹⁾

Легко видеть, что на линейной оболочке V_0 векторов $x_1, Sx_1, \dots, S^{k_1-1}x_1$ мы можем преобразование S представить в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, на V_0

$$T = \lambda_1 I + S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что каждый такой подблок нашей окончательной матрицы A дает ровно один собственный вектор (здесь $S^{k_1-1}x_1$). Подобное утверждение применимо и к линейной оболочке элементов

$$x_2, Sx_2, \dots, S^{j_2-1}x_2 \text{ и т. д.}$$

Число соответствующих λ_1 собственных векторов, полученных таким образом, называется *геометрической кратностью* собственного числа λ_1 . Это число в точности равно размерности подпространства, порожденного собственными векторами, соответствующими λ_1 . Так как T осуществляет отображения

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \lambda_1 x_1 + Sx_1, \\ Sx_1 &\rightarrow \lambda_1 Sx_1 + S^2x_1, \\ &\vdots \\ S^{k_1-2}x_1 &\rightarrow \lambda_1 S^{k_1-2}x_1 + S^{k_1-1}x_1, \\ S^{k_1-1}x_1 &\rightarrow \lambda_1 S^{k_1-1}x_1, \end{aligned}$$

¹⁾ В целях сохранения в этом месте связности изложения доказательство этого утверждения помещено в конце настоящего пункта (стр. 758).

то отображение $T - \lambda I$ переводит

$$\begin{aligned}x_1 &\rightarrow (\lambda_1 - \lambda) x_1 + Sx_1, \\Sx_1 &\rightarrow (\lambda_1 - \lambda) Sx_1 + S^2x_1, \\&\vdots \\S^{k_1-2}x_1 &\rightarrow (\lambda_1 - \lambda) S^{k_1-2}x_1 + S^{k_1-1}x_1, \\S^{k_1-1}x_1 &\rightarrow (\lambda_1 - \lambda) S^{k_1-1}x_1.\end{aligned}$$

Следовательно, если $\lambda \neq \lambda_1$, то $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ содержит $S^{k_1-1}x_1$, а потому и $S^{k_1-2}x_1$ и, таким образом, все элементы, порождающие V_0 . Поэтому для любого $\lambda \neq \lambda_i$ и всех i преобразование $T - \lambda I$ отображает V_0 на себя и $\mathcal{N}_i \subset \mathcal{R}(T - \lambda I)$. Отсюда следует, что $T - \lambda I$ также есть отображение „на“, и обращение $T - \lambda I^{-1}$ существует. Таким образом, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ есть полный набор собственных чисел T .

Заметим, наконец, что если S_0 — единственное линейное преобразование, отображающее e^i на y^i , т. е. если

$$S_0 \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i e^i \right) = \sum_{i=1}^n \gamma_i y^i,$$

то для $z = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ мы имеем

$$TS_0 z = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j \right) y^i.$$

Поэтому (так как S_0 , будучи отображением „на“, невырождено)

$$S_0^{-1} TS_0 z = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j \right) e^i \quad (S_0^{-1} y^i = e^i).$$

Таким образом, если относительно базиса $\{e^1, \dots, e^n\}$ преобразование T соответствует матрице B , а преобразования S_0, S_0^{-1} — матрицам C, C^{-1} , то мы имеем $C^{-1}BC = A$, или, что то же самое, $B = C(C^{-1}BC)C^{-1} = CAC^{-1}$. Две матрицы A и B , для которых найдется такая матрица C , что $B = CAC^{-1}$, называются подобными. Следовательно, любая матрица подобна некоторой матрице, имеющей (блок-диагональную) жорданову форму. Две матрицы A и B подобны тогда и только тогда, когда их канонические жордановы формы отличаются друг от друга только порядком блоков и подблоков.

Перейдем теперь к формальному доказательству предложения, сформулированного на стр. 756.

(а) Предположим, что нам дана линейно независимая система векторов пространства $\mathcal{N}_1$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}_1, \mathbf{S}\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{S}^{j_1-1}\mathbf{x}_1, \\ & \mathbf{x}_2, \mathbf{S}\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{S}^{j_2-1}\mathbf{x}_2, \\ & \vdots \\ & \mathbf{x}_r, \mathbf{S}\mathbf{x}_r, \dots, \mathbf{S}^{j_r-1}\mathbf{x}_r, \end{aligned}$$

где $k_1 = j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_r$ и $\mathbf{S}^{j_l}\mathbf{x}_l = 0$ ($l = 1, 2, \dots, r$).

(б) Предположим далее, что для каждого $l = 1, 2, \dots, r$ не существует такого $\mathbf{x}$, что $\mathbf{S}^{k_l}\mathbf{x} = 0$, а векторы $\mathbf{x}, \mathbf{S}\mathbf{x}, \dots, \mathbf{S}^{j_l}\mathbf{x}$ вместе с первыми $l-1$ строками векторов из (а) линейно независимы. Тогда либо векторы из (а) образуют базис $\mathcal{N}_1$, либо эту систему можно пополнить так, что она будет составлять базис, и условия (а) и (б) будут выполнены.

Доказательство. Пусть j_{r+1} — наибольшее из чисел, обладающих тем свойством, что $\mathbf{S}^{k_l}\mathbf{x}_{r+1} = 0$ для некоторого $\mathbf{x}_{r+1}$, а $\mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{S}\mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{S}^{j_{r+1}-1}\mathbf{x}_{r+1}$ вместе с векторами из (а) линейно независимы. Тогда, так как по определению $j_{r+1} \leq j_r$, из соотношения $\mathbf{S}^{j_{r+1}}\mathbf{x}_{r+1} = 0$ следует требуемое утверждение.

Предположим теперь, что

$$0 \neq \mathbf{S}^{j_{r+1}}\mathbf{x}_{r+1} = \sum \alpha_i \mathbf{S}^{v_i} \mathbf{x}_{\mu_i},$$

где все $\alpha_i \neq 0$ и $v_1 \leq v_2 \leq \dots$. Очевидно, мы должны для всех i иметь $\mu_i \leq r$. В самом деле, в противном случае мы могли бы последовательно умножить обе части несколько раз на $\mathbf{S}$, подставить в приведенное выше равенство справа $\mathbf{S}^{j_{r+1}}\mathbf{x}_{r+1}$ и получить, что $\mathbf{S}^{j_{k+1}+r}\mathbf{x}_{r+1} \neq 0$ для всех $r = 0, 1, 2, \dots$ (так как $\alpha_i \neq 0$). Это, однако, противоречит тому, что $\mathbf{S}^{k_l}\mathbf{x}_{r+1} = 0$. Если $v_1 \leq j_{r+1} - 1$, то $j_{r+1} + \mu_1 - v_1 - 1 \geq \mu_1$. Но векторы

$$\mathbf{S}^{j_{r+1} + \mu_1 - v_1 - 1} \mathbf{x}_{r+1} = \alpha_1 \mathbf{S}^{\mu_1 - 1} \mathbf{x}_{\mu_1} + \dots,$$

$\mathbf{x}_{r+1}, \mathbf{S}\mathbf{x}_{r+1}, \dots, \mathbf{S}^{j_{r+1} + \mu_1 - v_1 - 2} \mathbf{x}_{r+1}$ и первые $\mu_1 - 1$ строк векторов в (а) независимы, что противоречит (б). Следовательно, $\mathbf{S}^{j_{r+1}}\mathbf{x}_{r+1}$ имеет представление $\mathbf{S}^{j_{r+1}}\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{S}^{j_{r+1}} \left(\sum \alpha_i \mathbf{S}^{v_i} \mathbf{x}_{\mu_i} \right)$, где все $\mu_i \leq r$. Поэтому вектор $\mathbf{x}_{r+1} = \sum \alpha_i \mathbf{S}^{v_i} \mathbf{x}_{\mu_i}$ удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Случай различных собственных чисел. Если матрица $\mathbf{B}$ имеет n различных собственных чисел, то она подобна некоторой диагональной матрице $\mathbf{A}$, заданной в канонической форме: $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{A}$. В этом случае матрица $\mathbf{C}$ может быть построена непосредственно из собственных векторов матрицы $\mathbf{B}$ (эти векторы образуют базис $\{\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n\}$, о котором говорилось в предшествующем пункте). Действительно, если $\mathbf{B}\mathbf{y}^i = \lambda_i \mathbf{y}^i$, а $\mathbf{y}^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i)$, то, записав $\mathbf{y}^i$, как вектор-столбец, мы имеем

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \vdots \\ y_n^i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \vdots \\ y_n^i \end{pmatrix},$$

откуда сразу следует

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^n \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \dots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \dots & y_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^1 & y_n^2 & \dots & y_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как матрица $\mathbf{Y} = \|\mathbf{y}_j^i\|$ отображает базисные вектор-столбцы $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ... соответственно на $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots$, то она отображает пространство U^n на себя. Следовательно, существует обратное отображение $\mathbf{Y}^{-1}$ и $\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Y} = \mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ обозначает указанную диагональную матрицу из собственных значений.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Найти жорданову форму матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Довольно часто приходится иметь дело с квадратными матрицами, все элементы которых неотрицательны, а сумма элементов каждой строки равна 1¹⁾. Показать, что для матрицы такого типа 1 является собственным числом, что вообще все ее собственные числа по модулю не превосходят 1 и что кратность собственного числа 1 равна 1, т. е. что ядра отображений $A - I$ и $(A - I)^2$ совпадают.

3. Построить $n \times n$ -матрицу A с различными собственными числами, для которой $A^n = I$.

4. Отношение эквивалентности для преобразований удовлетворяет, по определению, следующим трем условиям:

(1) любое преобразование эквивалентно самому себе;

(2) если A эквивалентно B , то B эквивалентно A ;

(3) если A эквивалентно B и B эквивалентно C , то A эквивалентно C .

Доказать, что отношение подобия матриц является эквивалентным.

5. Пусть в пространстве E^3 с базисом e^1, e^2, e^3 дан фиксированный вектор a , для которого $(a, a) = 1$. Рассмотрим гиперплоскость $H = \{x \mid (a, x) = 0\}$. Ортогональной проекцией некоторого вектора y' на гиперплоскость H называется такой вектор $y' \subset H$ (очевидно, единственный), что $y' = y - \alpha a$ для некоторого скаляра α . Определим преобразование $Py = y'$. Тогда $Py = y - (y, a)a$ и $\mathcal{R}(P) = H$. Ядром P является пространство, натянутое на вектор a . Собственные числа P равны 0 и 1, а жорданова форма имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверить все эти утверждения.

А. 5. Транспонированные, нормальные и эрмитовы матрицы; ортогональные дополнения. Если A — (произвольная) комплексная $m \times n$ -матрица, то сопряженной транспонированной матрицей к матрице A называется $n \times m$ -матрица A^* с элементами

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m).$$

Очевидно, $(A + \gamma B)^* = A^* + \bar{\gamma} B^*$ и (если произведение AB имеет смысл) $(AB)^* = B^* A^*$. Для $x \in U^n$ и $y \in U^m$

$$(Ax, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \bar{y}_i = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m \bar{a}_{ij} y_i = (x, A^* y).$$

Как следствие, получаем, что $\mathcal{R}(A)$ ортогонально $\mathcal{N}(A^*)$, т. е. $(Ax, y) = 0$, если $A^* y = 0$. Действительно, $(Ax, y) = 0$ для всех x тогда и только тогда, когда $A^* y = 0$. Следовательно, если мы обозначим через $\mathcal{R}(A)^\perp$ множество всех элементов U^m , ортогональных подпространству $\mathcal{R}(A)$, то сможем написать $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$. Аналогично $\mathcal{R}(A^*)^\perp = \mathcal{N}(A)$. Подпространство $\mathcal{R}(A)^\perp$ называется *ортогональным дополнением* $\mathcal{R}(A)$. Ортогональным дополнением любого

¹⁾ Ввиду большой роли, которую матрицы такого рода играют в теории вероятностей, они называются стохастическими. — *Прим. ред.*

подмножества U^n всегда является подпространство. Если V есть подпространство, то легко показать, что $V^{\perp\perp} = (V^\perp)^\perp = V$. Если мы имеем дело с вещественным векторным пространством E^n , то сопряженная транспонированная матрица оказывается просто транспонированной матрицей A^T (т. е. получаемой из A переменной ролей строк и столбцов). При этом все описанные выше свойства матрицы A^T и пространств $\mathcal{N}(A^T)$ и $\mathcal{R}(A^T)^\perp$ сохраняются.

Квадратная $n \times n$ -матрица A называется *нормальной*, если $A^*A = AA^*$ (в общем случае A^*A есть $n \times n$ -матрица, а AA^* — $m \times m$ -матрица). Одним из видов нормальных матриц являются эрмитовы матрицы: матрица A называется *эрмитовой*, если $A = A^*$ (вещественные эрмитовы матрицы называются симметричными; $A = A^T$). Так как $(AB)^* = B^*A^*$ и, очевидно, $A^{**} = A$, то для каждой $n \times n$ -матрицы A матрица AA^* (или A^*A) является эрмитовой.

Нормальные матрицы по сравнению с обычными матрицами обладают рядом весьма тонких свойств. Как мы увидим, *собственные векторы нормальной матрицы A порождают U^n , а собственные векторы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны; поэтому из собственных векторов нормальной матрицы можно составить ортогональный базис для U^n ; кроме того, равенство $Ax = \lambda x$ ($x \neq 0$) эквивалентно $A^*x = \bar{\lambda}x$. Это значит, что матрицы A и A^* имеют одни и те же собственные векторы и сопряженные собственные числа.*

Чтобы убедиться в этом, заметим сначала, что если матрица A нормальна, то матрица $B = A - \lambda I$ также нормальна. Таким образом, если $B^k x = 0$, то $B^{*k} B^k = 0$, а так как матрицы B^* и B коммутируют, $(B^*B)^k x = 0$ и тем более $(B^*B)^{2^k} x = 0$. Пусть $C = B^*B = C^*$. Тогда

$$(C^{2^k} x, x) = 0 = (C^{2^{k-1}} x, C^{2^{k-1}} x)$$

и, таким образом, $C^{2^{k-1}} x = 0$; аналогично $C^{2^{k-2}} x = 0$. Продолжая эти рассуждения, мы найдем, что $Cx = 0$ или $B^*Bx = 0$. Но $(B^*Bx, x) = 0 = (Bx, Bx)$, так что $Bx = 0$. Следовательно, каждый элемент x_i , полученный в нашем жордановом разложении, является собственным вектором матрицы. Поэтому U^n порождается собственными векторами A . Далее, если $Bx = 0$, то

$$(Bx, Bx) = 0 = (B^*Bx, x) = (BB^*x, x) = (B^*x, B^*x)$$

и $B^*x = 0$. Для матрицы $A - \lambda I$ из равенства $Ax = \lambda x$ следует $A^*x = \bar{\lambda}x$; применение этого рассуждения к $\{A^*, \bar{\lambda}\}$ вместо $\{A, \lambda\}$ дает обратное утверждение.

Следовательно, если $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$, $x, y \neq 0$ и $\lambda \neq \mu$, то

$$(Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y) = (x, A^*y) = (x, \bar{\mu}y) = \mu(x, y).$$

Отсюда следует $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$, поэтому $(x, y) = 0$, и различные собственные числа имеют ортогональные собственные векторы. Так как множества собственных векторов, соответствующих λ_i , образуют вместе с 0 подпространство Y_i , мы можем найти для каждого Y_i ортонормальный базис; очевидно, объединение этих базисов образует требуемый ортогональный базис пространства U^n .

Применяя построение последнего пункта, мы найдем, что $Y^{-1}AY = \Lambda$ является диагональной матрицей, причем вектор-столбцы матрицы Y ортонормальны (будучи нашим базисом, составленным из ортонормальных собственных векторов). Так как это сводится к равенствам

$$\sum_{j=1}^n y_j^i \bar{y}_j^k = \delta_{ik},$$

мы имеем $YY^* = I$ и, следовательно, $Y^{-1} = Y^*$. Такая матрица называется *унитарной*, а матрица Λ называется унитарно-эквивалентной (иногда унитарно подобной) матрице Λ . Преобразования, соответствующие унитарным матрицам, сохраняют величину скалярного произведения (а тем самым длину векторов и их ортогональность), ибо $(Yx, Yu) = (Y^*Yx, u) = (x, u)$.

Следующим свойством эрмитовых матриц является вещественность всех λ_i , ибо равные в этом случае матрицы Λ и Λ^* имеют сопряженные собственные числа. Наоборот, любая нормальная матрица с этим свойством является эрмитовой, ибо тогда

$$\Lambda = Y\Lambda Y^* = (Y\Lambda^* Y^*)^* = (Y\Lambda Y^*)^* = \Lambda^*.$$

Унитарная матрица, очевидно, нормальна, и каждое ее собственное число по модулю равно 1 ($|\lambda| = 1$, так как $Ux = \lambda x$ имеет ту же длину, что и x). Обратно, любая нормальная матрица с собственными числами, равными по модулю единице, является унитарной. Вещественная унитарная матрица называется ортогональной. Любое ее вещественное собственное число равно ± 1 и имеет собственные векторы, которые соответствуют либо неподвижным точкам преобразования, либо отображаются в симметричные им относительно начала координат. (Если n четно, то вещественных собственных чисел может и не быть.) Ортогональные матрицы также не изменяют углов.

Проекции. Если $U^n = V \oplus W$, то однозначное представление x в виде суммы $v + w$ ($v \in V$; $w \in W$) соответствует линейному преобразованию P , отображающему x в v , причем $P^2x = Pv = v = Px$, т. е. $P^2 = P$. Если V и W — ортогональные подпространства ($W = V^\perp$), то $P = P^2 = P^*$. Наоборот, любое преобразование P , для которого $P = P^2 = P^*$ (такое преобразование называется *ортогональной проекцией* или просто *проекцией*), приводит к разложению U^n в прямую сумму $U^n = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$. Будучи нормальной матрицей,

Р может быть представлена (при соответствующем выборе ортогонального базиса) в виде диагональной матрицы с нулями и единицами на главной диагонали и нулями на всех остальных местах.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Истолковать и доказать утверждение о том, что любое ортогональное преобразование может рассматриваться как вращение осей около фиксированного начала.

2. Мы определили матрицу A^* в зависимости от некоторого фиксированного базиса пространства U^n , но ее можно определить и непосредственно, исходя из скалярного произведения. Доказать, что для каждого $y \in U^n$ A^*y есть единственный вектор y' , для которого $(Ax, y) = (x, y')$ при любом $x \in U^n$.

3. Пусть $\mathcal{P}^n$ — пространство полиномов с вещественными коэффициентами на сегменте $[a, b]$, а $f(t)$ — заданный четный полином. Определим на $\mathcal{P}^n$ линейное преобразование A :

$$(Ap)(t) = \int_a^b f(t-y)p(y)dy.$$

Показать, что A есть симметричное преобразование.

4. Доказать, что матрица является унитарной тогда и только тогда, когда она переводит ортогональные векторы в ортогональные.

5. Пусть A — нормальное преобразование с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ (собственные числа кратности, большей 1, записаны по одному разу). Пусть E_k — ортогональная проекция на подпространство собственных векторов λ_k . Показать, что если $i \neq j$, то $E_j E_i = 0$. Показать также, что $E_1 + E_2 + \dots + E_k$ есть ортогональная проекция для всех $k \leq r$ и что $E_1 + E_2 + \dots + E_r = I$.

6. Тем же методом, что и в упражнении 5, доказать следующее матричное соотношение:

$$A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \dots + \lambda_r E_r.$$

А.6. Квадратичные формы. Любое выражение

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j,$$

содержащее n вещественных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ (где a_{ij} — вещественные постоянные), называется *квадратичной формой*. Так как

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})x_i x_j,$$

можно вместо первоначально заданных значений a_{ij} рассматривать симметричные, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$. Соответствующая матрица A становится в этом случае эрмитовым преобразованием U^n в себя и имеет только вещественные собственные числа. Пусть λ — одно из этих чисел; тогда соотношение $A(x + iy) = \lambda(x + iy)$ влечет равен-

ства $Ax = \lambda x$ и $Ay = \lambda y$, причем один из этих векторов отличен от 0. Поэтому собственному числу λ соответствует собственный вектор из E^n . Повторяя наши прежние рассуждения в применении к E^n , мы получаем вещественный ортонормальный базис $\{y^1, y^2, \dots, y^n\}$ собственных векторов, соответствующих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Далее, матрица Y , которую мы получаем из векторов $y^1, y^2, \dots, y^n$, является вещественной и унитарной (т. е. ортогональной) матрицей, для которой $Y^*AY = \Lambda$ (Λ — диагональная матрица) или $A = Y\Lambda Y^*$. Следовательно, если мы запишем

$$x = \sum_{i=1}^n x'_i y^i \quad (x \in E^n),$$

откуда следует, что

$$Yx' = \sum_{i=1}^n x'_i y^i = x,$$

то окажется $Y^*x = Y^{-1}x = x'$, и мы получим

$$Q(x) = (Ax, x) = (Y\Lambda Y^*x, x) = (\Lambda Y^*x, Y^*x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2.$$

Таким образом, выбирая подходящий ортогональный базис, мы можем представить Q в диагональной форме, т. е. без произведений различных переменных. Геометрическим местом точек x , удовлетворяющих условию $Q(x) = 1$, будет эллипсоид, если все λ_i положительны. Это имеет место тогда и только тогда, когда форма $Q(x)$ неотрицательна при всех x и из условия $Q(x) = 0$ следует, что $x = 0$, т. е. когда $Q(x)$ — положительно определенная квадратичная форма.

Две квадратичные формы $Q(x)$ и $Q_1(x)$ называются унитарно эквивалентными, если одна получается из другой с помощью унитарного преобразования E^n в себя, т. е. если $Q(x) = Q_1(Ux)$. (Хотя в наших рассуждениях U является ортогональной матрицей, аналогичные результаты справедливы и для комплексных квадратичных форм.) Последнее имеет место тогда и только тогда, когда матрицы A и A_1 унитарно эквивалентны, ибо тогда $(Ax, x) = (A_1Ux, Ux) = (U^*A_1Ux, x)$, а отсюда $A = U^*A_1U$. Таким образом, Q и Q_1 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их диагональные формы содержат одни и те же собственные числа (одинаковых кратностей, но, возможно, по-разному расположенные).

Если Q — положительно определенная квадратичная форма, то обычное скалярное произведение можно заменить на

$$[x, y] = (Ax, y),$$

где A — соответствующая эрмитова матрица, ибо $[x, y]$ будет иметь все требуемые от скалярного произведения свойства. Геометрически это сводится к замене единичной сферы $(x, x) = 1$ на некоторый

эллипсоид. В терминах компонент $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ элемента x относительно этого базиса новая длина x вычисляется, как обычная длина вектора $(\sqrt{\lambda_1}x'_1, \dots, \sqrt{\lambda_n}x'_n)$.

Новое скалярное произведение, конечно, приведет к новому понятию матрицы, сопряженно-транспонированной A , если требовать, чтобы сохранялось свойство $[Ax, y] = [x, A^*y]$. Таким образом, получается аналогичное понятие нормального и эрмитова линейных преобразований относительно нового скалярного произведения. Они, конечно, связаны со старыми посредством очевидного изменения масштаба (по каждой координате x'_i), которое переводит новое скалярное произведение в старое.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Показать, что для любого вещественного матричного преобразования A пространства E^n

$$2(Ax, y) = (A(x+y), x+y) - (Ax, x) - (Ay, y).$$

С помощью этого тождества доказать, что если $(Ax, x) = (Bx, x)$ для всех x из E^n , то $A = B$.

2. Доказать, что произведение $[x, y]$, определенное в настоящем параграфе, удовлетворяет всем требованиям скалярного произведения. Является ли при этом необходимым, чтобы матрица A была эрмитовой?

3. Доказать, что из соотношения

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = Q_1 + Q_2,$$

где Q_1 и Q_2 — квадратичные формы от $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответственно ранга r и $n-r$, следует существование такого ортогонального преобразования C , что

$$x = Cy, \quad Q_1 = \sum_{i=1}^r y_i^2, \quad Q_2 = \sum_{i=r+1}^n y_i^2.$$

4. Доказать, что если Q — положительно определенная квадратичная форма, то геометрическим местом таких точек x , что $Q(x)$ постоянно, является эллипсоид с полуосями, пропорциональными $1/\sqrt{\lambda_r}$, где λ_r — собственные числа матрицы A . Любое направление, соответствующее собственному вектору числа λ_r , представляет собой полуось эллипсоида.

А.7. Функции от матриц. Для любой $n \times n$ -матрицы A и полинома $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ можно без труда составить выражение $a_0 I + a_1 A + \dots + a_k A^k = p(A)$; таким образом, мы получаем функцию от матрицы, переводящую матрицу A в матрицу $p(A)$. Аналогично для надлежащего степенного ряда

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$$

соответствующий матричный ряд

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$$

(где $A^0 = I$) будет сходиться в том смысле, что сходятся последовательности частных сумм соответствующих элементов, а их пределы равны тем же элементам $f(A)$. Например, если f — целая функция, то значение $f(A)$ будет определено для любой квадратной матрицы; в частности,

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \dots$$

Если $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — собственные числа матрицы A , то $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_k)$ — собственные числа $f(A)$. Действительно, из $Ax = \lambda x$ следует, что $A^2x = \lambda Ax = \lambda^2x$, $A^3x = \lambda^3x$, ..., и, следовательно, $f(A)x = f(\lambda)x$, так что каждое значение $f(\lambda_i)$ является собственным числом матрицы $f(A)$. Для этой матрицы соответствующими собственными векторами являются принадлежащие λ_i собственные векторы матрицы A . Чтобы убедиться в том, что все собственные числа $f(A)$ могут быть получены таким путем, рассмотрим жорданову каноническую форму $B^{-1}AB$ матрицы A , заметив, что $B^{-1}A^k B = (B^{-1}AB)^k$ и, таким образом, $B^{-1}f(A)B = f(B^{-1}AB)$. Вычисление матрицы $f(B^{-1}AB)$ может быть осуществлено поблочно; значения ее собственных чисел выявляются при этом непосредственно.

Важным частным примером функции от матриц является $(\lambda I - A)^{-1}$. Если $|\lambda|$ превосходит модули всех собственных чисел, то формальное разложение в ряд

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)^{-1} &= \lambda^{-1} \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)^{-1} = \\ &= \lambda^{-1} \left(I + \frac{1}{\lambda} A + \frac{1}{\lambda^2} A^2 + \dots \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{\lambda^{i+1}} \end{aligned}$$

имеет смысл. Далее, зафиксировав матрицу A , мы можем рассматривать аналитическую функцию комплексной переменной λ , сопоставляющую числу λ матрицу $(\lambda I - A)^{-1}$ и определенную для всех $\lambda \neq \lambda_1, \dots, \lambda_k$. Эта функция аналитична в том смысле, что при $\lambda \neq \lambda_1, \dots, \lambda_k$ существует производная

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda I - A)^{-1} = \lim_{\lambda' \rightarrow \lambda} \frac{1}{\lambda' - \lambda} [(\lambda' I - A)^{-1} - (\lambda I - A)^{-1}] = -(\lambda I - A)^{-2}.$$

Можно применять также интегральную теорему Коши, справедливость которой устанавливается обычным способом; здесь, однако, мы можем интерпретировать аналитичность функции как наличие у нее разложения в степенной ряд около $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ с матричными коэф-

фициентами. Каждое λ_i является полюсом этой функции, ибо если $C = B^{-1}AB$ — жорданова каноническая форма, то мы имеем $A = BCB^{-1}$ и

$$\lambda I - A = \lambda I - BCB^{-1} = B(\lambda I - C)B^{-1}.$$

Следовательно, $(\lambda I - A)^{-1} = B(\lambda I - C)^{-1}B^{-1}$ и достаточно рассмотреть $(\lambda I - C)^{-1}$ или $(C - \lambda I)^{-1}$. Матрица $C - \lambda I$ имеет ту же блочно-диагональную форму, что и C , а блочно-диагональные матрицы (с блоками одинакового размера) перемножаются поблоку, т. е.

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & 0 \\ 0 & BD \end{pmatrix},$$

где A и C — $k \times k$ -матрицы, B и D — $l \times l$ -матрицы. Поэтому достаточно вычислить обратную матрицу для каждого блока

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_i - \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i - \lambda & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_i - \lambda \end{array} \right\|$$

матрицы $C - \lambda I$. Положив

$$D = (\lambda_i - \lambda)I + E = (\lambda_i - \lambda) \left(I + \frac{1}{\lambda_i - \lambda} E \right),$$

где E — $k \times k$ -матрица с единицами под главной диагональю и нулями на остальных местах, и формально разложив D^{-1} в ряд по аналогии с разложением $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$, мы получим ряд

$$\begin{aligned} D^{-1} &= (\lambda_i - \lambda)^{-1} \left(I + \frac{1}{\lambda_i - \lambda} E \right)^{-1} = \\ &= (\lambda_i - \lambda)^{-1} \left(I - \frac{1}{\lambda_i - \lambda} E + \frac{1}{(\lambda_i - \lambda)^2} E^2 - \dots \right), \end{aligned}$$

который сходится ввиду того, что $E^k = 0$. Более того, как легко проверить, по этой же причине его значение, умноженное на

$$I + \frac{1}{\lambda_i - \lambda} E,$$

является искомой обратной матрицей. Таким образом, высшая степень выражения $(\lambda_i - \lambda)^{-1}$, в которой оно входит в ряд, равна k , и D^{-1} имеет разложение Лорана (с постоянными матричными коэффициентами), соответствующее полюсу порядка k в точке λ_i . Следо-

вательно, порядок полюса, который мы имеем в точке λ_i для матрицы $(\lambda I - C)^{-1}$ (или $(\lambda I - A)^{-1}$), представляет собой размер наибольшего блока, отвечающего λ_i ; напомним, что это есть то наибольшее k , для которого

$$\mathcal{N}[(\lambda I - A)^k] = \mathcal{N}[(\lambda I - A)^{k+1}].$$

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Показать, что если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$.

2. Найти ряд Лорана для $(\lambda I - A)^{-n}$ и показать, что он сходится, когда λ превосходит по модулю все собственные числа матрицы A . Показать, что в этих же условиях

$$\frac{d}{d\lambda} (\lambda I - A)^{-n} = -n (\lambda I - A)^{-n-1}.$$

3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ и $E_1, E_2, \dots, E_r$ (определенные в упр. 5, п. А.5)—собственные числа и ортогональные проекции, соответствующие нормальной матрице A . Пусть $f(\lambda)$ — сходящийся степенной ряд. Показать, что

$$f(A) = \sum_{j=1}^r f(\lambda_j) E_j.$$

4. Показать, что если ряд $f(d) = A_0 + A_1 d + A_2 d^2 + \dots$ сходится абсолютно в некотором интервале, содержащем d_0 , то

$$f'(d_0) = A_1 + 2A_2 d_0 + 3A_3 d_0^2 + \dots$$

5. Пусть A — нормальная матрица с ненулевыми собственными числами. Как определить $\ln A$?

А.8. Определители, миноры, алгебраические дополнения. *Определителем* $|A|$ (записываемым иногда как $\det A$) $n \times n$ -матрицы A называется сумма

$$\sum_{\pi} \delta(\pi) a_{1, \pi(1)} a_{2, \pi(2)} \dots a_{n, \pi(n)} = \sum_{\pi} \delta(\pi) a_{\pi(1), 1} a_{\pi(2), 2} \dots a_{\pi(n), n}, \quad (\text{А.8.1})$$

где π пробегает все перестановки $\{1, 2, \dots, n\}$, причем $\delta(\pi)$ равно 1, если π — четная перестановка, и -1 , если π нечетная. Перемена местами любых двух строк (или столбцов) матрицы A приводит к матрице B , для которой $|B| = -|A|$, так как в соответствующих членах выражения (А.8.1) появляются перестановки противоположной четности. Таким образом, если A имеет две одинаковые строки (или столбца), то $|A| = 0$. Определитель матрицы, получающейся после вычеркивания l -й строки и j -го столбца, называется *минором* m_{lj} элемента a_{lj} ; *алгебраическое дополнение* c_{lj} элемента a_{lj} определяется как $c_{lj} = (-1)^{l+j} m_{lj}$.

Из соотношения (А. 8.1) непосредственно следует, что

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} c_{kj} \quad (\text{А. 8.2})$$

для всех i, j . Это так называемые разложения определителя матрицы $|A|$ по строке или столбцу.

Далее, если $i \neq j$, то

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} c_{jk} = 0 = \sum_{k=1}^n a_{ki} c_{kj},$$

так как эти суммы представляют собой разложения по строке и столбцу определителя матрицы B с двумя одинаковыми строками или столбцами. Следовательно, если $i \neq j$, то

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{ik} - \lambda \sum_{k=1}^n a_{jk} c_{ik} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} - \lambda a_{jk}) c_{ik},$$

так что $|A|$ совпадает по значению с определителем матрицы, полученной из A вычитанием j -й строки, умноженной на λ , из i -й строки. Записав $|A|$ в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

мы можем, таким образом, не изменяя значения определителя, из любой его строки (или столбца) вычесть кратное другой строки (или столбца).

Пусть

$$A \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_r \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_r \end{pmatrix}$$

обозначает определитель матрицы, полученной из A в результате удаления всех строк, кроме i_1 -й, i_2 -й, ..., i_r -й и всех столбцов, j_1 -го, j_2 -го, ..., j_r -го, где $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Таким образом,

$$A \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_r \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{i_r j_1} & \dots & \dots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}.$$

Определенные так „подопределители“ произведения $\mathbf{AB}$ связаны с „подопределителями“ матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ следующим образом:

$$\mathbf{AB} \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_r \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_r \end{pmatrix} = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_r} \mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_r \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_r \end{pmatrix} \mathbf{B} \begin{pmatrix} k_1, & k_2, & \dots, & k_r \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_r \end{pmatrix}, \quad (\text{A. 8.3})$$

где сумма распространяется на все $\{k_1, k_2, \dots, k_r\}$, удовлетворяющие указанному соотношению.

Из соотношения (A. 8.2) и последующих замечаний ясно, что если через $\text{adj}(\mathbf{A})$ обозначить матрицу, у которой ij -й элемент равен

$$b_{ij} = c_{ji}$$

(эта матрица называется *присоединенной* к $\mathbf{A}$), то $\mathbf{A} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| \mathbf{I} = \text{adj}(\mathbf{A}) \mathbf{A}$. Таким образом, если $|\mathbf{A}| \neq 0$, то матрица

$$\frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj}(\mathbf{A})$$

является обратной к $\mathbf{A}$. Но согласно равенству (A. 8.3), $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$, поэтому из существования $\mathbf{A}^{-1}$ вытекает $|\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{I}| = 1$ и $|\mathbf{A}| \neq 0$. Следовательно, невырожденными являются матрицы, определители которых отличны от 0.

Пусть $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{AB}$ — жорданова каноническая форма матрицы $\mathbf{A}$. Из соотношения $|\mathbf{B}^{-1} \mathbf{AB}| = |\mathbf{B}^{-1}| |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|$ следует, что определитель $|\mathbf{A}|$ есть произведение соответствующих степеней собственных чисел $\mathbf{A}$. Следовательно, если среди собственных чисел есть 0 (скажем, $\lambda_i = 0$), то мы можем незначительно изменить λ_i так, чтобы матрица не имела нулевого собственного числа и была бы невырожденной. Соответствующие изменения элементов матрицы $\mathbf{A}$ будут малы, и мы получаем, что каждая вырожденная матрица является пределом последовательности невырожденных матриц.

Далее, поскольку

$$|\mathbf{B}^{-1} \mathbf{AB} - \lambda \mathbf{I}| = |\mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{B}| = |\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}|,$$

где $\mathbf{B}$ — вышеупомянутая матрица, то

$$|\mathbf{B}^{-1} \mathbf{AB} - \lambda \mathbf{I}| = \prod_{i=1}^k (\lambda_i - \lambda)^{n_i}.$$

Таким образом, λ_i суть корни уравнения

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0,$$

называемого *характеристическим уравнением* матрицы $\mathbf{A}$. Кратность λ_i , как корня этого уравнения, называется *алгебраической кратностью* λ_i (алгебраическая кратность больше или равна гео-

метрической кратности, которая определяется, как число линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_i ; она и равна числу элементов главной диагонали жордановой формы, равных λ_i .

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Показать, что если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — различные точки вещественной плоскости, то соотношение

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

является уравнением прямой линии, проходящей через эти точки.

2. Доказать следующее утверждение: дана невырожденная $n \times n$ -матрица A и вектор u из U^n . Пусть A_{ij} — матрица, в которой i -й столбец заменен на u , а все остальные столбцы оставлены без изменения. Тогда решение системы уравнений $Ax = u$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, дается формулой¹⁾

$$x_i = \frac{|A_{iy}|}{|A|} \quad (i = 1, \dots, n).$$

3. Показать, что если в некоторой матрице все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю, то диагональные элементы являются собственными числами.

4. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A (среди них могут быть и равные). Найти $|(I - \lambda A)^{-1}|$.

5. Под $|x|$ мы понимаем $(x, x)^{1/2}$. Матрица (и соответствующее ей преобразование) называется ограниченной на U , если существует такая постоянная K , что $\|Ax\| \leq K\|x\|$ для всех x из U . Точная нижняя грань K_0 таких K называется нормой матрицы A . Доказать, что все матричные преобразования U^n ограничены. Показать, что если A есть предел невырожденных матриц, то матрица A является вырожденной тогда и только тогда, когда нормы обратных им матриц неограниченно возрастают.

А.9. Некоторые тождества. Пусть U — $n \times n$ -матрица, все элементы которой равны 1, и пусть $u = (1, 1, \dots, 1)$ — n -вектор из U . В п. 2.4 были использованы следующие тождества, связывающие определители и присоединенные матрицы для матриц вида $A + aU$:

$$|A + aU| = |A| + a(u, \text{adj}(A)u),$$

$$u \text{adj}(A + aU) = u \text{adj}(A),$$

$$\text{adj}(A + aU)u = \text{adj}(A)u.$$

Вычисление $(u, \text{adj}(A)u)$ дает здесь

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

¹⁾ Здесь A_{iy} — результат замены в матрице A ее i -го столбца на вектор u . — Прим. ред.

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} . Если рассматривать $|\mathbf{A}|$ как функцию n^2 переменных a_{ij} , то разложение по строке

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}$$

дает $\partial|\mathbf{A}|/\partial a_{ij}$. Таким образом, рассматривая $|\mathbf{A} + a\mathbf{U}|$ как функцию a , положив $a'_{ij} = a_{ij} + a$ и обозначив алгебраическое дополнение a'_{ij} в матрице $\mathbf{A} + a\mathbf{U}$ через A'_{ij} , мы получим

$$\frac{d}{da} |\mathbf{A} + a\mathbf{U}| = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial a'_{ij}} |\mathbf{A} + a\mathbf{U}| \frac{d}{da} (a'_{ij}) = \sum_{i,j=1}^n A'_{ij}.$$

Но $\sum_{j=1}^n A'_{ij} \cdot 1$ есть, очевидно, разложение по элементам i -й строки определителя матрицы, получающейся из $\mathbf{A} + a\mathbf{U}$ заменой i -й строки на $1, 1, \dots, 1$, т. е. матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a & a_{12} + a & \dots & a_{1n} + a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} + a & a_{i-1,2} + a & \dots & a_{i-1,n} + a \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{i+1,1} + a & a_{i+1,2} + a & \dots & a_{i+1,n} + a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + a & a_{n2} + a & \dots & a_{nn} + a \end{vmatrix}.$$

Мы можем здесь вычесть a раз i -ю строку из всех других и получить

$$\sum_{j=1}^n A'_{ij} = \sum_{j=1}^n A_{ij}. \quad (\text{А. 9.1})$$

Таким образом,

$$\frac{d}{da} |\mathbf{A} + a\mathbf{U}| = \sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

и эта производная не зависит от a . Отсюда следует, что $|\mathbf{A} + a\mathbf{U}|$ является линейной функцией:

$$|\mathbf{A} + a\mathbf{U}| = |\mathbf{A}| + a \sum_{i,j=1}^n A_{ij},$$

что дает наше первое тождество.

Далее, равенство (А. 9.1) может быть переписано так:

$$\left\| \begin{array}{cccc} A'_{11} & A'_{12} & \dots & A'_{1n} \\ A'_{21} & A'_{22} & \dots & A'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{n1} & A'_{n2} & \dots & A'_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \sum A'_{1j} \\ \sum A'_{2j} \\ \vdots \\ \sum A'_{nj} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} \right\|,$$

что является нашим третьим тождеством. Второе тождество доказывается с помощью аналогичных рассуждений, применяемых на этот раз к сумме

$$\sum_{i=1}^n A'_{ij},$$

как к разложению определителя по элементам столбца.

Из определения непосредственно следует, что для произвольной $n \times n$ -матрицы A имеет место соотношение $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

Следовательно, если матрица A невырождена, то

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A),$$

и мы имеем

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{|A|^n} |\text{adj}(A)|.$$

Таким образом, $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$. Так как это последнее соотношение имеет место для любого предела невырожденных матриц, оно справедливо и для всех матриц вообще.

Для любой невырожденной матрицы A выполняется соотношение

$$A^{-1} \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \frac{A \begin{pmatrix} j'_1 & j'_2 & \dots & j'_{n-p} \\ i'_1 & i'_2 & \dots & i'_{n-p} \end{pmatrix}}{|A|} (-1)^{\sum_{v=1}^p (i_v + j_v)}, \quad (\text{А. 9.2})$$

где $\{j'_1, j'_2, \dots, j'_{n-p}\}$ образуют дополнительное к $\{j_1, j_2, \dots, j_p\}$ множество индексов столбцов; аналогично определены $\{i'_1, i'_2, \dots, i'_{n-p}\}$. Равенство (А. 9.2) принято называть тождеством Сильвестра.

Рассмотрим случай, когда $i_1 = j_1 = 1, i_2 = j_2 = 2, \dots, i_p = j_p = p$, так что тождество принимает вид

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ 1 & p & \dots & p \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} A \begin{pmatrix} p+1 & p+2 & \dots & n \\ p+1 & p+2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Заметив, что транспонированная матрица имеет тот же определитель, что и исходная, и обозначив через A_{ij} алгебраическое дополнение

элемента a_{ij} , мы получим, что произведение

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1p} & A_{1,p+1} & \dots & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2p} & A_{2,p+1} & \dots & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{pp} & A_{p,p+1} & \dots & \dots & A_{pn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \\ a_{1,p+1} & a_{2,p+1} & \dots & a_{n,p+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(где первые p строк первого определителя совпадают с соответствующими строками матрицы $\text{adj}(\mathbf{A})$, в то время как последние $n - p$ строк имеют единицы на главной диагонали и нули на всех остальных местах) равно

$$\begin{vmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ a_{1,p+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{p,p+1} & a_{p+1,p+1} & \dots & a_{n,p+1} \\ a_{1,p+2} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{p,p+2} & a_{p+1,p+2} & \dots & a_{n,p+2} \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{1,n} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{p,n} & a_{p+1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= |\mathbf{A}|^p \mathbf{A} \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

(определитель разложен по первым p строкам). С другой стороны, если мы разложим (по первым $n - p$ строкам) первый сомножитель нашего произведения, то получим

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p \\ 1, 2, \dots, p \end{pmatrix} |\mathbf{A}|,$$

где $\mathbf{C} = \text{adj}(\mathbf{A})$. Следовательно,

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p \\ 1, 2, \dots, p \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|^{p-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Но

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{C}$$

и, таким образом,

$$\mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|^p} \mathbf{C} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

При дальнейшей замене соответствующих строк и столбцов мы получим (А.9.2). Если положить $\mathbf{C} = \text{adj}(\mathbf{A})$, то тождество (А.9.2) примет вид

$$\frac{1}{|\mathbf{A}|^p} \mathbf{C} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} = (-1)^{\sum_{v=1}^p (i_v + j_v)} \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A} \begin{pmatrix} j'_1, \dots, j'_{n-p} \\ i'_1, \dots, i'_{n-p} \end{pmatrix}$$

или

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} = (-1)^{\sum_{v=1}^p (i_v + j_v)} |\mathbf{A}|^{p-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} j'_1, \dots, j'_{n-p} \\ i'_1, \dots, i'_{n-p} \end{pmatrix},$$

так как

$$\frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Очевидно, определители

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix}$$

являются обобщенными минорами матрицы $\mathbf{A}$. В частности, ij -й минор $\mathbf{A}$ равен

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n \\ 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n \end{pmatrix},$$

и

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|.$$

Фиксируем $p < n$ и положим

$$d_{ij} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p, i \\ 1, \dots, p, j \end{pmatrix} (i, j \geq p+1),$$

так что $(n-p)(n-p)$ -система $\mathbf{D} = \|d_{ij}\|$ образует матрицу. Тогда справедливо следующее равенство (теорема Сильвестра):

$$\mathbf{D} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_q \\ j_1, \dots, j_q \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}^{q-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p, i_1, \dots, i_q \\ 1, \dots, p, j_1, \dots, j_q \end{pmatrix}. \quad (\text{А.9.3})$$

Так как мы рассматриваем только матрицу, полученную из $\mathbf{A}$ вычеркиванием всех строк, кроме $1, 2, \dots, p, i_1, \dots, i_q$, и всех столбцов, кроме $1, 2, \dots, p, j_1, \dots, j_q$, то мы, не ограничивая общности, можем предположить, что эта матрица является первоначальной матрицей $\mathbf{A}$, и тем самым доказать тождество в случае, когда $q = n - p$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix} &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}^{n-p-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}^{n-p-1} |\mathbf{A}|. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{C} = \text{adj}(\mathbf{A})$; тогда

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \\ 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Учитывая наше первое тождество (в которое входит присоединенная матрица), мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} p+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n \\ p+1, \dots, s-1, s+1, \dots, n \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{r+s} |\mathbf{A}|^{n-p-2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p, s \\ 1, \dots, p, r \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^{r+s} |\mathbf{A}|^{n-p-2} d_{sr} \end{aligned} \quad (\text{A. 9.4})$$

и

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|^{n-p-1} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}. \quad (\text{A. 9.5})$$

Но величины

$$b_{sr} = (-1)^{s+r} \mathbf{C} \begin{pmatrix} p+1, \dots, r-1, r+1, \dots, n \\ p+1, \dots, s-1, s+1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (r, s \geq p+1)$$

являются элементами матрицы $\mathbf{B}$, присоединенной к $(n-p)(n-p)$ -матрице

$$\left\| \begin{array}{cccc} c_{p+1, p+1} & c_{p+1, p+2} & \dots & c_{p+1, n} \\ c_{p+2, p+1} & c_{p+2, p+2} & \dots & c_{p+2, n} \\ \vdots & & & \\ c_{n, p+1} & c_{n, p+2} & \dots & c_{n, n} \end{array} \right\|.$$

Поэтому

$$\mathbf{B} \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix} = |\mathbf{B}| = \mathbf{C} \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix}^{n-p-1}$$

ввиду того, что

$$C \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix}$$

есть определитель этой матрицы, и $|\operatorname{adj}(\mathbf{A}_0)| = |\mathbf{A}_0|^{k-1}$ для любой $k \times k$ -матрицы $\mathbf{A}_0$. Далее, очевидно, что $b_{sr} = |\mathbf{A}|^{n-p-2} d_{sr}$, откуда следует, что

$$|\mathbf{B}| = |\mathbf{A}|^{(n-p-2)(n-p)} D \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix},$$

и

$$C \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix}^{n-p-1} = |\mathbf{A}|^{(n-p)(n-p-2)} D \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, согласно равенству (А.9.5), мы имеем

$$|\mathbf{A}|^{(n-p-1)^2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}^{n-p-1} = |\mathbf{A}|^{(n-p)(n-p-2)} D \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix},$$

или

$$D \begin{pmatrix} p+1, \dots, n \\ p+1, \dots, n \end{pmatrix} = |\mathbf{A}| \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1, \dots, p \\ 1, \dots, p \end{pmatrix}^{n-p-1},$$

что завершает доказательство.

А.10. Блочные матрицы. Образует из $n \times n$ -матрицы $\mathbf{A}$ p -ю связанную с ней (блок-) матрицу $\mathcal{A}_p$, элементами которой являются $p \times p$ -определители матрицы $\mathbf{A}$, упорядоченные лексикографически. (Так, например, $\{1, 3\}$ предшествует $\{1, 8\}$; $\{2, 6\}$ предшествует $\{3, 1\}$.) Например, матрицей $\mathcal{A}_2$ является квадратная матрица размеров

$$\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}:$$

$$\left\| \begin{array}{cccccc} A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 2 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, 3 \end{pmatrix} \dots A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 1, n \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ 2, 3 \end{pmatrix} \dots A \begin{pmatrix} 1, 2 \\ n-1, n \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1, 3 \\ 1, 2 \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 1, 3 \\ 1, 3 \end{pmatrix} \dots A \begin{pmatrix} 1, 3 \\ 1, n \end{pmatrix} & A \begin{pmatrix} 1, 3 \\ 2, 3 \end{pmatrix} \dots A \begin{pmatrix} 1, 3 \\ n-1, n \end{pmatrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A \begin{pmatrix} n-1, n \\ 1, 2 \end{pmatrix} & \dots \dots \dots & \dots \dots A \begin{pmatrix} n-1, n \\ n-1, n \end{pmatrix} \end{array} \right\|.$$

Аналогично $\mathcal{A}_p$ является $\binom{n}{p} \times \binom{n}{p}$ -матрицей.

Из формулы (А. 8.3) непосредственно следует, что если $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$, то $\mathcal{A}_p \cdot \mathcal{B}_p = \mathcal{C}_p$, где $\mathcal{A}_p$, $\mathcal{B}_p$ и $\mathcal{C}_p$ — p -е блок-матрицы соответственно матриц $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. В частности, если $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, то $\mathcal{B}_p$ есть матрица, обратная $\mathcal{A}_p$.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ обозначают полную систему собственных чисел (с учетом кратности) матрицы $\mathbf{A}$. Предположим, что $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{T}\mathbf{P}^{-1}$, где матрица

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

представляет собой жорданову каноническую форму матрицы $\mathbf{A}$. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{P}_p \mathcal{J}_p \mathcal{P}_p^{-1}, \quad (\text{А. 10.1})$$

где $\mathcal{J}_p$ — треугольная матрица с диагональными элементами

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} l_1, & \dots, & l_p \\ l_1, & \dots, & l_p \end{pmatrix} = \lambda_{l_1} \lambda_{l_2} \dots \lambda_{l_p}.$$

Таким образом, собственные векторы матрицы $\mathcal{A}_p$, очевидно, являются диагональными элементами $\mathcal{J}_p$.

В том важном частном случае, когда все собственные числа различны, мы (на стр. 759) уже проверили, что преобразование подобия $\mathbf{P}$ может быть задано матрицей, вектор-столбцы которой суть собственные векторы, соответствующие $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Анализируя соотношение (А. 10.1), мы видим, что, поскольку $\mathcal{J}_p$ — диагональная матрица, собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \dots \lambda_{k_p}$, равен

$$\mathbf{P} \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_p \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_p \end{pmatrix},$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ означает текущий индекс его компонент.

Матрица $\mathbf{A}$ называется *вполне положительной* (В. П.) матрицей порядка p , если

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} l_1, & l_2, & \dots, & l_p \\ j_1, & j_2, & \dots, & j_p \end{pmatrix} \geq 0$$

для любых двух наборов индексов $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_p \leq n$; $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n$. Из соотношения (А. 8.3) следует, что

произведение двух вполне положительных матриц порядка p снова является вполне положительной матрицей порядка p . Матрица называется слабо вполне положительной, если

$$(-1)^{\sum_{v=1}^p (i_v + j_v)} A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} \geq 0$$

при

$$1 \leq \begin{matrix} i_1 < i_2 < \dots < i_p \\ j_1 < j_2 < \dots < j_p \end{matrix} \leq \tilde{n}.$$

Из тождества Сильвестра (А. 9.2) непосредственно заключаем, что если A является В. П. порядка p , то матрица $B = A^{-1}$ (при условии, что она существует) слабо В. П. порядка p .

В качестве иллюстрации возьмем матрицу $A = \|a_{ij}\|$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} b_i c_j, & i \leq j, \\ b_j c_i, & i \geq j, \end{cases}$$

а все числа b_i и c_i отличны от нуля и имеют один и тот же знак. Вычислениями можно проверить, что матрица A является В. П. всех порядков тогда и только тогда, когда

$$\frac{b_1}{c_1} \leq \frac{b_2}{c_2} \leq \dots \leq \frac{b_n}{c_n}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Показать, что если A — нормальная или унитарная матрица, то $\mathcal{A}_p$ — также нормальная или унитарная.
2. Доказать, что если матрица A — симметрическая, то $\mathcal{A}_p$ также симметрическая и что если квадратичная форма, соответствующая матрице A , положительно определена, то это же справедливо и для $\mathcal{A}_p$.
3. Доказать, что если $|A| > 0$ и матрица A слабо В. П. порядка p , то A^{-1} В. П. порядка p .
4. Выразить $\mathcal{A}_p$ через $|A|$.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ

Б.1. Выпуклые множества в E^n . Множество X векторов из E^n называется *выпуклым*, если для любых двух векторов x и y из X имеет место соотношение $\alpha x + \beta y \in X$, где $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. Простейшими выпуклыми множествами являются линейные подпространства, сферы и треугольники.

Для конечного числа векторов $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^r$ и вещественных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ множество

$$H = \{ \mathbf{x} \mid (\mathbf{a}^i, \mathbf{x}) = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, r \}$$

является замкнутым и выпуклым. В частности, для ненулевого вектора $\mathbf{a}$ и вещественного числа α множество $H = \{ \mathbf{x} \mid (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \alpha \}$ называется *гиперплоскостью* (или $(n-1)$ -мерным линейным многообразием).

Гиперплоскость H определяет два замкнутых полупространства:

$$H_1 = \{ \mathbf{x} \mid (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq \alpha \}, \quad H_2 = \{ \mathbf{x} \mid (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq \alpha \}.$$

Оба эти полупространства являются замкнутыми выпуклыми множествами.

Гиперплоскость H называется *опорной* к выпуклому множеству X , если X содержится в одном из полупространств, определяемых H , и граница X имеет с H хотя бы одну общую точку. Более точно, гиперплоскость H является опорной для множества X , если

$$\inf_{\mathbf{x} \in X} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \alpha.$$

(Здесь в качестве одной из возможных точек следует допускать также ту или иную „бесконечно удаленную“ точку.)

► **Лемма Б. 1.1.** Пусть X — выпуклое множество, а $\mathbf{y}$ — точка, внешняя относительно замыкания X . Тогда существует такой вектор $\mathbf{a}$, что

$$\inf_{\mathbf{x} \in X} (\mathbf{a}, \mathbf{x}) > (\mathbf{a}, \mathbf{y}).$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}^0$ — такая граничная точка X , что

$$\overline{V(\mathbf{y} - \mathbf{x}^0, \mathbf{y} - \mathbf{x}^0)} = |\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| = \inf_{\mathbf{x} \in X} |\mathbf{y} - \mathbf{x}|. \quad (\text{Б. 1.1})$$

Если $\mathbf{x} \in X$, то $\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \in \bar{X}$ ($0 \leq t \leq 1$), где через $\bar{X}$ обозначено замыкание X .

Согласно условию (Б. 1.1), мы имеем

$$|\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) - \mathbf{y}|^2 \geq |\mathbf{x}^0 - \mathbf{y}|^2. \quad (\text{Б. 1.2})$$

Это неравенство дает нам

$$2t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 - \mathbf{y}) + t^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \mathbf{x} - \mathbf{x}^0) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Следовательно, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 - \mathbf{y}) \geq 0$ или

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0 - \mathbf{y}) \geq (\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0 - \mathbf{y}) > (\mathbf{y}, \mathbf{x}^0 - \mathbf{y}).$$

Пусть $a = x^0 - y$. Тогда $a \neq 0$ и

$$\inf_{x \in X} (x, a) \geq (x^0, a) > (y, a);$$

что и требовалось доказать.

► Лемма Б.1.2. Пусть X — выпуклое множество, а точка y лежит на границе X . Тогда существует опорная плоскость, проходящая через y , т. е. существует такой ненулевой вектор a , что

$$\inf_{x \in X} (a, x) = (a, y).$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность точек $\{y^v\}$, внешних относительно замыкания X и таких, что $\lim_{v \rightarrow \infty} y^v = y$.

По лемме Б.1.1 существует последовательность $\{a^v\}$, которую можно считать нормированной так, что $(a^v, a^v) = 1$, и для которой

$$\inf_{x \in X} (x, a^v) > (y^v, a^v) \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Для предельной точки a последовательности $\{a^v\}$ и для любого $x \in X$ мы имеем

$$(x, a) = \lim_{v \rightarrow \infty} (x, a^v) \geq \lim_{v \rightarrow \infty} (y^v, a^v) = (y, a),$$

что и требовалось доказать.

Сопоставляя доказанные леммы, мы получаем следующую теорему.

► Теорема Б.1.1. Замкнутое выпуклое множество есть пересечение всех своих опорных полупространств, и каждая граничная точка множества лежит на некоторой опорной гиперплоскости.

► Теорема Б.1.2. Если X и Y — два выпуклых множества, не имеющие общих внутренних точек, то существует гиперплоскость H , которая разделяет X и Y , т. е. существуют такие ненулевой вектор a и скаляр α , что $(a, x) \geq \alpha$ для всех $x \in X$ и $(a, y) \leq \alpha$ для всех $y \in Y$.

Доказательство. Рассмотрим множество

$$X - Y = \{x - y \mid x \in X, y \in Y\},$$

которое является выпуклым и не содержит 0 в качестве внутренней точки. Согласно леммам Б.1.1 и Б.1.2, такое множество содержит такой отличный от нулевого вектор a , для которого

$$(a, x - y) \geq (a, 0) = 0 \quad (x \in X, y \in Y).$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

► Теорема Б.1.3. Если X и Y — замкнутые выпуклые множества, не имеющие общих точек, и по крайней мере одно из них ограничено, то существует гиперплоскость H , определяемая параметрами $\{a, \alpha\}$, которая строго разделяет X и Y , т. е. $(a, x) > \alpha$ для всех $x \in X$ и $(a, y) < \alpha$ для всех $y \in Y$.

Доказательство. В данном случае множество $X - Y$ замкнуто и не содержит нуля; поэтому утверждение теоремы непосредственно следует из леммы Б.1.1.

На протяжении книги часто используется следующий результат.

► Лемма Б.1.3. Пусть X — выпуклое множество, не имеющее общих точек с неотрицательным ортантом. Тогда существует такой вектор $a > 0$ (каждая компонента которого неотрицательна и по крайней мере одна положительна), что $(a, x) \leq 0$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Применим теорему Б.1.2 к множествам X , Y , где Y обозначает неотрицательный ортант. Согласно этой теореме, существует такой вектор $a \neq 0$, что $(a, x) \leq 0$ для всех $x \in X$ и $(a, y) \geq 0$ для всех $y \in Y$. Легко проверить, что $a > 0$.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Теорема Б.1.3 может оказаться неверной, если оба множества X и Y не являются ограниченными. Показать, что можно построить опровергающий пример уже в $E^2 = \{(x_1, x_2)\}$, приняв $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0\}$, $Y = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq e^{-x_1}\}$.

2. Доказать, что каждое множество и его замыкание имеют одни и те же внешние точки. Доказать также, что каждое выпуклое множество и его замыкание имеют одни и те же внутренние точки и, следовательно, одни и те же граничные точки.

3. Доказать, что в E^2 многоугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда каждый из его внутренних углов меньше 180° .

4. Доказать, что пересечение любого числа выпуклых множеств выпукло. Доказать, что замыкание выпуклого множества выпукло.

5. Доказать, что любое множество из E^n однозначно определяет подпространство наименьшей возможной размерности, в котором оно лежит.

6. Чтобы получить выпуклую оболочку замкнутого ограниченного множества в E^2 , мы можем, образно говоря, обернуть это множество ниткой и затем натянуть ее. Область, ограниченная ниткой, образует искомую выпуклую оболочку. Показать, что этим же методом можно найти выпуклую оболочку двух треугольников или двух кругов. Что говорится в лемме Б.1.2 относительно выпуклой оболочки двух треугольников (или двух кругов)?

Б.2. Выпуклые оболочки множеств и крайние точки выпуклых множеств. Наименьшее выпуклое множество, содержащее данное множество X , называется *выпуклой оболочкой* X . Обычно выпуклая оболочка обозначается через $[X]$, а иногда через $\text{Co}(X)$. Мно-

жество $[X]$ может быть определено конструктивно следующим образом:

$$[X] = \left\{ \sum_{k=1}^r \alpha_k x^k \mid x^k \in X, \sum_{k=1}^r \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0, k = 1, \dots, r \right\},$$

где r — произвольное целое положительное число. Если, в частности, $X = \{a^1, \dots, a^r\}$, то $\{a^1, \dots, a^r\}$ называют выпуклым многогранником, натянутым на точки a^i . Легко показать, что если X ограничено, то и $[X]$ ограничено; если X компактно, то и $[X]$ компактно. Очевидно, множество $[a^1, \dots, a^r]$ замкнуто и ограничено.

Весьма важную роль играет следующий известный факт.

► Лемма Б.2.1. Пусть X — некоторое множество из E^n , а $[X]$ его выпуклая оболочка. Тогда каждая точка $[X]$ может быть представлена как выпуклая комбинация не более чем $n+1$ точек множества X .

Доказательство. Достаточно показать, что если

$$x = \sum_{k=1}^r \alpha_k x^k (x^k \in X, \alpha_k > 0) \text{ и } \sum_{k=1}^r \alpha_k = 1 \quad (r > n+1),$$

то количество векторов $x^1, \dots, x^r$, использованных для представления x , может быть уменьшено. Так как векторы $x^1, \dots, x^r$ ($r > n+1$) линейно зависимы, существуют вещественные числа $\beta_1, \dots, \beta_r$, не равные одновременно нулю, для которых

$$\sum_{k=1}^r \beta_k x^k = 0, \quad \sum_{k=1}^r \beta_k = 0.$$

Пусть ε — такое вещественное число, что $\alpha_k + \varepsilon \beta_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, r$) и для некоторого k , скажем k_0 , имеет место равенство $\alpha_{k_0} + \varepsilon \beta_{k_0} = 0$. Тогда

$$x = x + \sum_{k=1}^r \varepsilon \beta_k x^k = \sum_{k=1}^r (\alpha_k + \varepsilon \beta_k) x^k,$$

где $\alpha_k + \varepsilon \beta_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, r$), $\alpha_{k_0} + \varepsilon \beta_{k_0} = 0$ и

$$\sum_{k=1}^r (\alpha_k + \varepsilon \beta_k) = 1,$$

что и требовалось доказать.

Накладывая на X дополнительные ограничения, можно усилить предыдущий результат следующим образом.

► Лемма Б.2.2. Если X состоит не более чем из n компонент связности, то число $n+1$ в лемме Б.2.1 может быть уменьшено до n .

Доказательство. Рассмотрим множество S , натянутое на $n+1$ фиксированных точек из X , и предположим, что S имеет внутреннюю точку x^0 , которая не может быть представлена в виде линейной комбинации n или меньшего количества точек из X . Для каждой $(n-2)$ -мерной грани L множества S определим множество

$$T_L = \{x = (1 - \lambda)x^0 + \lambda y \mid \lambda \leq 0, y \in L\}.$$

Множество T_L не может пересекать X , так как если бы точка $c = (1 - \lambda)x^0 + \lambda y$ принадлежала X , то мы имели бы $\lambda \leq 0$ и равенство

$$x^0 = \frac{1}{1 - \lambda} c + \frac{-\lambda}{1 - \lambda} y$$

было бы представлением x^0 в виде комбинации n или меньшего количества точек из X . Множества T_L , полученные пересечением $(n-2)$ -мерных граней множества S , образуют границы $n+1$ непересекающихся конусов с вершинами в точке x^0 , объединение которых совпадает со всем пространством E^n . Кроме того, каждая вершина x^i множества S принадлежит только одному конусу. Так как множество X не может пересекать границы этих конусов, оно должно иметь по меньшей мере $n+1$ компонент связности, что противоречит предположению.

► **Лемма Б.2.3.** Если X есть ограниченное множество из E^n ,

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x^i,$$

где

$$x^i \in X, \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1,$$

то x принадлежит выпуклой оболочке X .

Это утверждение легко доказывается с помощью индукции по размерности наименьшего линейного пространства, содержащего точку x , и теоремы Б.1.1. Предположим, что утверждение леммы верно для множеств из E^n . Пусть X обозначает некоторое ограниченное множество из E^{n+1} . Если x есть граничная точка замыкания выпуклой оболочки Γ множества $\{x^i\}$, то любая опорная плоскость p множества Γ , проходящая через x , necessarily содержит все x^i . Но часть, общая для p и Γ , лежит в евклидовом пространстве размерности не более n , и поэтому применимо индуктивное предположение. Наконец, если x — внутренняя точка множества Γ , то утверждение леммы очевидно.

Точка x множества X называется крайней¹⁾ точкой X , если в X не существует таких точек x^1 и x^2 , что $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ при некотором λ ($0 < \lambda < 1$), где $x^1 \neq x^2$.

► Лемма Б.2.4. *Замкнутое ограниченное множество X натянуто на свои крайние точки, т. е. каждая точка $x \in X$ может быть представлена в виде*

$$x = \sum_{k=1}^r \lambda_k x^k \quad (\lambda_k \geq 0; \quad k = 1, \dots, r; \quad \sum_k \lambda_k = 1),$$

где $x^1, \dots, x^r$ — крайние точки X .

Доказательство снова проводится индукцией по размерности наименьшего линейного пространства, содержащего X . Формальные детали мы опустим.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть S — выпуклое подмножество пространства E^n , содержащее нулевой вектор и n линейно независимых векторов. Доказать, что S имеет внутренние точки относительно E^n .

2. Применяя лемму Б.2.1 к E^2 , показать, что выпуклую оболочку множества S можно получить, как объединение всевозможных треугольников из E^2 с вершинами в S .

3. Пусть e — точка замкнутого ограниченного выпуклого множества S , наиболее удаленная от начала. Доказать, что e является крайней точкой множества S .

4. Показать, что любое замкнутое выпуклое множество в E^n является пересечением несчетного числа замкнутых полупространств.

5. Доказать, что замкнутое выпуклое множество в E^n имеет конечное число крайних точек тогда и только тогда, когда оно является пересечением конечного числа замкнутых полупространств.

6. Показать, что каждая опорная гиперплоскость к замкнутому ограниченному выпуклому множеству содержит некоторые его крайние точки.

Б.3. Выпуклые конусы. Множество $X \subset E^n$ называется *выпуклым конусом*, если при любых x и y из X

$$\alpha x + \beta y \in X \quad (\alpha, \beta \geq 0).$$

Очевидно, что выпуклый конус является выпуклым множеством. В качестве простейших примеров выпуклых конусов можно указать линейные подпространства и полупространства.

Наименьший выпуклый конус, содержащий множество X , называется выпуклым конусом, *натянутым на X* ²⁾, и обозначается

¹⁾ Крайние точки называют также экстремальными и (реже) угловыми. — *Прим. перев.*

²⁾ Иногда его называют конической оболочкой X . — *Прим. перев.*

через $\wp(X)$. Иначе говоря,

$$\wp(X) = \left\{ \sum_{k=1}^r \alpha_k \mathbf{x}^k \mid \alpha_k \geq 0, \mathbf{x}^k \in X, k = 1, \dots, r; r \text{ — любое} \right\}.$$

*Двойственный*¹⁾ конус X^+ определяется как множество всех направленных опорных к конусу X гиперплоскостей, проходящих через начало. Формально

$$X^+ = \{\mathbf{a} \mid (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq 0 \text{ для всех } \mathbf{x} \in X\}. \quad (\text{Б.3.1})$$

Очевидно, что X^+ также является замкнутым выпуклым конусом.

Следующие четыре свойства являются простыми следствиями определения.

- (1) Если $X \subset Y$, то $X^+ \supset Y^+$;
- (2) $X \subset X^{++}$;
- (3) $X^+ = X^{+++}$;
- (4) $(X + Y)^+ = X^+ \cap Y^+$, если $\mathbf{0} \in X, Y$.

► Теорема Б.3.1. Для любых замкнутых выпуклых конусов X и Y справедливы соотношения

- (I) $X = X^{++}$ (двойственность),
- (II) $(X + Y)^+ = X^+ \cap Y^+, \left. \begin{array}{l} \right\} \text{ (модулярность).} \\ \text{(III) } (X \cap Y)^+ = \overline{X^+ + Y^+} \end{array} \right\}$

(Напомним, что черта сверху обозначает замыкание.)

Доказательство. (I) Пусть $\mathbf{y} \notin X$. Тогда по теореме Б.1.3 существует такой вектор $\mathbf{a}$, что $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) > (\mathbf{a}, \mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x} \in X$. Так как X является конусом, то $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \geq 0 > (\mathbf{a}, \mathbf{y})$ для всех $\mathbf{x} \in X$. Следовательно, $\mathbf{a} \in X^+$, $\mathbf{y} \notin X^{++}$, что и требовалось доказать.

(II) Это утверждение мы уже упоминали выше [см. свойство (4)].

$$\text{(III) } (X \cap Y)^+ = (X^{++} \cap Y^{++})^+ = (X^+ + Y^+)^{++} = \overline{X^+ + Y^+}.$$

Аналогично можно доказать следующую теорему.

Теорема Б.3.2. Для любого множества X

$$\overline{\wp(X)} = X^{++}.$$

¹⁾ Синонимы: сопряженный, полярный. — *Прим. перев.*

Выпуклые многогранные конусы. Выпуклый конус, натянутый на конечное число векторов $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^r$, называется *выпуклым многогранным конусом* и обозначается через

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^r) = \left\{ \sum_{k=1}^r \lambda_k \mathbf{a}^k \mid \lambda_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, r \right\},$$

или, в матричных обозначениях,

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^r) = \mathcal{P}(\mathbf{A}),$$

где $\mathbf{A}$ — $n \times r$ -матрица, столбцами которой служат векторы $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^r$. В частности, для ненулевого вектора $\mathbf{a}$ мы имеем $\mathcal{P}(\mathbf{a}) = \{\lambda \mathbf{a} \mid \lambda \geq 0\}$. Множество $\mathcal{P}(\mathbf{a})$ называется лучом, проходящим через $\mathbf{a}$.

Выпуклый многогранный конус замкнут. Это является следствием следующей более общей теоремы.

► Теорема Б.3.3. *Выпуклый многогранный конус представляет собой пересечение конечного числа опорных полупространств. Иначе говоря, для любого конечного множества векторов $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^r$ существуют такие векторы $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^s$, что*

$$\mathcal{P}(\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^r) = (\mathbf{b}^1)^+ \cap \dots \cap (\mathbf{b}^s)^+,$$

и обратно.

Векторы $\mathbf{b}^j$ можно найти, взяв все опорные плоскости для выпуклого пространства, натянутого на векторы $\mathbf{a}^l$, проходящие через начало.

Теорема двойственности для выпуклых многогранных конусов в матричных обозначениях формулируется следующим образом.

► Теорема Б.3.4. *Скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ неотрицательно для всех $\mathbf{y}$ таких, что $\mathbf{yA} \geq \mathbf{0}$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{Au}$ при некотором $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.*

Следующая теорема оказывается весьма полезной в теории линейного программирования.

► Теорема Б.3.5. *Пусть X — ограниченный выпуклый многогранник или выпуклый замкнутый конус, не имеющий общих точек (кроме $\mathbf{0}$) с неотрицательным ортантом пространства E^n . Тогда существует такой вектор $\mathbf{a}$ со строго положительными компонентами ($\mathbf{a} > \mathbf{0}$), что $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq 0$ для всех векторов $\mathbf{x} \in X$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда X является конусом. Допустим, что из условий $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq 0$ для всех $\mathbf{x} \in X$ следует, что $a_i = 0$ для некоторого индекса i , скажем для $i = 1$. Тогда

$$(-X)^+ \cap (I)^+ \subset H = \{(u_1, \dots, u_n) \mid u_1 = 0\},$$

где I обозначает неотрицательный ортант. По теореме двойственности (теорема Б.3.1)

$$-\overline{X+I} \supset H^+,$$

и легко показать, что множество $-X+I$ замкнуто.

Так как $(\alpha, 0, 0, \dots, 0) \in H^+$ при всех α , существуют такие векторы $\mathbf{x} \in X$ и $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, что

$$-\mathbf{x} + \mathbf{b} = (\alpha, 0, \dots, 0) = \mathbf{a}.$$

Если мы возьмем $\alpha < 0$, то, очевидно, $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ будет неотрицательным вектором, принадлежащим X , первые две компоненты которого положительны, а это противоречит нашему предположению.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Пусть в пространстве E^3

$$X = \{(x, y, 1) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Найти $\rho(x)$.

2. Пусть в E^2

$$X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = \sqrt{x_2^2 + 1}\}.$$

Тогда

$$\rho(X) = \{(0, 0)\} + \{(x_1, x_2) \mid 0 < |x_2| < x_1\}.$$

Таким образом, множество X и его выпуклая оболочка могут быть замкнуты, в то время как $\rho(X)$ открыто. Проверить это утверждение.

3. Доказать, что $\overline{\rho(X)} \supset \rho(\overline{X})$.

4. Пусть C — выпуклое множество. Показать, что $\rho(C)$ представляет собой объединение всех лучей, проходящих через крайние точки множества C .

5. Доказать, что если C — замкнутое ограниченное выпуклое множество, то $\rho(C)$ — выпуклая оболочка объединения всех лучей, проходящих через крайние точки множества C .

6. Пусть $\mathbf{x}_0$ — вектор из ограниченного выпуклого многогранного множества X . Доказать, что существует такой вектор $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, что $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leq (\mathbf{a}, \mathbf{x}_0)$ для всех $\mathbf{x} \in X$ тогда и только тогда, когда не существует такого вектора $\mathbf{x}_1$ из X , что $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \geq \mathbf{0}$.

Б.4. Выпуклые и вогнутые функции. Функция $f(\mathbf{x})$, определенная на выпуклом подмножестве X пространства E^n , называется *выпуклой*, если

$$f[t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}] \leq tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X; 0 \leq t \leq 1). \quad (\text{Б. 4.1})$$

Если в выражении (Б.4.1) имеет место строгое неравенство при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и $0 < t < 1$, то функция $f(\mathbf{x})$ называется *строго выпуклой*. Функция $f(\mathbf{x})$ называется *вогнутой* (строго вогнутой), если $-f(\mathbf{x})$ выпукла (строго выпукла).

В качестве примеров выпуклых функций можно привести e^x и $x_1^2 + x_2^2$.

Из условия (Б. 4.1) следует, что

$$f\left(\sum_{k=1}^r t_k \mathbf{x}^k\right) \leq \sum_{k=1}^r t_k f(\mathbf{x}^k), \quad (\text{Б. 4.2})$$

где

$$\mathbf{x}^k \in X, \quad \sum t_k = 1, \quad t_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, r.$$

Укажем некоторые важные факты относительно выпуклых функций; доказательства их легко провести непосредственно.

(1) Пусть

$$[X, f] = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \xi \end{pmatrix} \mid \mathbf{x} \in X, \xi \geq f(\mathbf{x}) \right\}.$$

Тогда $f(\mathbf{x})$ будет выпуклой функцией, определенной на X в том и только в том случае, если $[X, f]$ — выпуклое множество в E^{n+1} .

Если функция $f(\mathbf{x})$ строго выпукла, то $[X^0, f]$ есть строго выпуклое множество S , т. е. середина любого отрезка, соединяющего точки S , является относительно внутренней точкой S . Здесь X^0 означает внутренность X .

(2) Если $f_k(\mathbf{x})$ ($k = 1, \dots, r$) — выпуклые функции на X и $\lambda_k \geq 0$ ($k = 1, \dots, r$), то $\sum_k \lambda_k f_k(\mathbf{x})$ также является выпуклой функцией на X .

(3) Пусть $f_v(\mathbf{x})$ — множество выпуклых функций на X . Тогда

$$X_0 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in X, \sup_v f_v(\mathbf{x}) < \infty\}$$

— выпуклое множество, а $\sup_v f_v(\mathbf{x})$ — выпуклая функция на X_0 .

(4) Если функция $f(\mathbf{x})$ строго выпукла на X , то она имеет не более одного локального минимума. Локальный минимум всегда является и глобальным минимумом.

(5) Если $f(\mathbf{x})$ — выпуклая функция на X , то она непрерывна в относительно внутренних точках X .

(6) Для граничных точек y множества X имеет место соотношение

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow y} f(\mathbf{x}) \leq f(y).$$

(7) Если X — открытое выпуклое множество и функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в X , то мы можем получить следующую характеристику выпуклости функции $f(\mathbf{x})$. Именно $f(\mathbf{x})$ выпукла тогда и только тогда, когда для точек $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}$ из X выполняется неравенство

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \geq \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^0 (x_i - x_i^0).$$

(8) Если функция $f(x)$ выпукла на открытом множестве X , то $f(x)$ имеет почти всюду (в смысле меры Лебега) вторые частные производные.

(9) Если множество X одномерно, а $f(x)$ — выпуклая функция на X , то f имеет производную всюду, за исключением не более чем счетного множества точек. Кроме того, производные справа и слева существуют всюду и непрерывны соответственно справа и слева.

(10) Если $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция, а X произвольное выпуклое множество в E^n , то $f(x)$ выпукла тогда и только тогда, когда матрица, составленная из вторых производных

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j},$$

положительно полуопределена для любого $x \in X$. Если матрица

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

положительно определена, то $f(x)$ строго выпукла.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. Доказать, что (a, x) — выпуклая функция на E^n , ни при каком a не являющаяся строго выпуклой. Для $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ функция

$$f(x) = \sum_1^r \lambda_i |x_i|^{a_i} \quad (a_i \geq 1)$$

выпукла на E^n , если все $\lambda_i \geq 0$.

2. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на E^n . Показать с помощью теоремы об опорных гиперплоскостях, что имеет место следующее утверждение: для любой точки x_0 в E^n существует такая линейная функция $l(x)$ [т. е. (l, x)], что $l(x) \leq f(x)$ и $l(x_0) = f(x_0)$. Сравнить этот результат со свойством (7).

3. Если $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$ — неотрицательные монотонно возрастающие выпуклые функции на E^1 , то такова же и функция $\prod_{k=1}^n f_k(x)$.

4. Если $f(x)$ — выпуклая (строго выпуклая) функция в E^n и матрица $A \neq 0$, то $f(Ax + b)$ также выпуклая (строго выпуклая); здесь A и b — матрица и вектор соответствующих размерностей.

5. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на выпуклом множестве X пространства E^n . Тогда f выпукла в том и только в том случае, если

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \left(\frac{f(x)+f(y)}{2}\right), \quad x, y \in X.$$

6. Построить выпуклую функцию на $[0, 1]$, которая не имеет производной в бесконечном числе точек.

П Р И Л О Ж Е Н И Е В

РАЗЛИЧНЫЕ ВОПРОСЫ

В.1. Полунепрерывные и равностепенно непрерывные функции. Полунепрерывные функции. Вещественная функция $f(x)$, определенная на некотором множестве $X \subset E^n$, называется *непрерыв-*

ной в точке x_0 , если как только $x_n \rightarrow x_0$ (т. е. как только евклидово расстояние $d(x_n, x_0)$ стремится к нулю), так $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Эквивалентное определение в терминах окрестностей формулируется следующим образом. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$, что из $d(x, x_0) < \delta$ следует

$$-\varepsilon \leq f(x) - f(x_0) \leq \varepsilon. \quad (\text{В. 1.1})$$

Функция *непрерывна на X* , если она непрерывна в каждой точке множества X .

Если δ может быть выбрано независимым от x_0 из X , то говорят, что функция $f(x)$ *равномерно непрерывна на X* .

Функция $f(x)$ называется *полу непрерывной сверху в точке x_0* , если для произвольного $\varepsilon (\varepsilon > 0)$ и всех значений x , для которых $d(x, x_0) \leq \delta$, при соответствующем выборе δ выполняется правое неравенство из (В. 1.1). Аналогично $f(x)$ *полу непрерывна снизу в точке x_0* , если левое неравенство (В. 1.1) имеет место для любого $\varepsilon > 0$ и соответствующего δ . Иначе говоря, функция f *полу непрерывна сверху (снизу) в точке x_0* тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0) \quad [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)].$$

Если функция f *полу непрерывна сверху на X* (т. е. в каждой точке X), то множество $L = \{x | f(x) < \alpha\}$ при каждом вещественном α относительно открыто в X , и наоборот. Ибо если x_0 принадлежит L , то существует такое $\varepsilon > 0$, что $f(x_0) + \varepsilon < \alpha$. По определению *полу непрерывной сверху функции*, существует открытая сфера с центром в точке x_0 радиуса δ , все точки которой, принадлежащие X , принадлежат и L . Следовательно, L относительно открыто. Обратное доказывается аналогично. Функция f *полу непрерывна снизу на X* , если множество $\{x | f(x) > \alpha\}$ относительно открыто для каждого вещественного α .

С помощью этих определений мы можем легко установить следующие свойства *полу непрерывных функций*.

(1) Множество всех *полу непрерывных сверху (снизу) функций* замкнуто относительно сложения. Если f *полу непрерывна сверху (снизу)*, то $-f$ *полу непрерывна снизу (сверху)*.

(2) Если функции f_α *полу непрерывны сверху (снизу) на X и ограничены снизу (сверху)*, то функция $\inf_\alpha f_\alpha$ ($\sup_\alpha f_\alpha$) *полу непрерывна сверху (снизу)*. (Для доказательства проще всего использовать последнее определение *полу непрерывности сверху*.)

(3) *Полу непрерывная сверху (снизу) функция, заданная на компактном множестве, достигает максимума (минимума)*.

(4) *Полу непрерывная сверху (снизу) функция, определенная на компактном множестве, может быть аппроксимирована убывающей*

(возрастающей) последовательностью непрерывных функций, и наоборот.

Равностепенно непрерывные функции. Говорят, что семейство функций f_α , определенных на множестве X , *равностепенно непрерывно в точке* x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ (не зависящее от α), что $|f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)| < \varepsilon$ для $d(x, x_0) \leq \delta$ и всех α . Говорят, что функции f_α *равностепенно непрерывны на* X , если они равностепенно непрерывны в каждой точке X . Если δ может быть выбрано не зависящим от $x_0 \in X$, то мы говорим о равномерной равностепенной непрерывности семейства f_α . Для иллюстрации этого понятия рассмотрим два семейства равностепенно непрерывных функций.

(1) Пусть $K(s, t)$ — равномерно непрерывная функция, определенная на единичном квадрате, а $f_\alpha(t)$ — семейство равномерно ограниченных функций ($0 \leq t \leq 1$). Тогда

$$g_\alpha(s) = \int_0^1 K(s, t) f_\alpha(t) dt$$

представляет собой равномерно равностепенно непрерывное семейство функций. Это вытекает из оценки

$$|g_\alpha(s_1) - g_\alpha(s_2)| \leq M \max_{0 \leq t \leq 1} |K(s_1, t) - K(s_2, t)|,$$

где M — граница f_α .

(2) Пусть $f_\alpha(z)$ есть семейство равномерно ограниченных функций, аналитических в единичном круге C комплексной плоскости. Тогда на X (любом круге, содержащемся в C) функции f_α равномерно равностепенно непрерывны. Это утверждение доказывается с помощью той же аргументации, что и в примере (1), путем применения интегральной формулы Коши для представления f_α в точках множества X .

Наиболее важное для наших целей свойство равностепенно непрерывных семейств функций выражается классической теоремой Асколи, которую можно сформулировать следующим образом. Пусть f_α — равномерно ограниченное равностепенно непрерывное семейство вещественных функций, определенных на компактном сепарабельном множестве X . Тогда из него можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность f_{α_i} .

Наметим вкратце идею доказательства. Определяется счетное плотное множество $\{x_i\}$ в X . С помощью диагонального процесса можно выбрать равномерно сходящуюся для всех x_i подпоследовательность f_{α_i} . Вследствие равностепенной непрерывности эта подпоследовательность f_{α_i} равномерно сходится.

В.2. Теоремы о неподвижной точке. Следующие теоремы мы приведем без доказательств, которые можно найти в работе Какутани [1].

Теорема Брауэра о неподвижной точке. Пусть $\varphi(x)$ — взаимно однозначное точечное отображение замкнутого симплекса X в себя. Тогда существует такая точка $x_0 \in X$, что $x_0 = \varphi(x_0)$. (Для наших целей мы определяем симплекс в E^n , как выпуклое множество, натянутое на нулевой вектор и n линейно независимых ортов.)

В действительности теорема верна для любого множества, которое гомеоморфно n -мерному симплексу.

Эта теорема о неподвижной точке была обобщена Какутани на случай точечно-множественных отображений. Прежде чем формулировать его результат, разъясним несколько терминов. Отображение φ , которое переводит каждую точку $x \in X$ в некоторое подмножество X , называется *точечно-множественным отображением*. Такое отображение называется *полунепрерывным сверху*, если из соотношений $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \in \varphi(x_n)$ следует $y_0 \in \varphi(x_0)$.

Легко проверить, что отображение φ полунепрерывно сверху тогда и только тогда, когда график $\{(x, y) | x \in X, y \in \varphi(x)\}$ замкнут в E^{2n} .

Говорят, что точечно-множественное отображение *полунепрерывно снизу*, если для каждого $y \in \varphi(x_0)$ при $x_n \rightarrow x_0$ существуют такие $y_n \in \varphi(x_n)$, что $y_n \rightarrow y$.

Точечно-множественное отображение называется *непрерывным*, если оно полунепрерывно сверху и снизу.

Определение полунепрерывности сверху для точечно-множественного отображения сводится к определению, приведенному в пункте В. 1, когда φ — точечная функция, при условии, что мы определим отношение включения $y \in \varphi(x)$, как $y \leq \varphi(x)$. Можно также сформулировать свойства точечно-множественных отображений в терминах понятия окрестности. Например, отображение $\varphi(x)$ полунепрерывно сверху в точке x_0 , если для каждого открытого множества U , содержащего $\varphi(x_0)$, существует такое $\delta(U) > 0$, что из $d(x, x_0) < \delta$ следует $\varphi(x) \subset U$.

Теорема Какутани о неподвижной точке. Пусть X — замкнутый симплекс и φ — полунепрерывное сверху отображение, которое переводит каждую точку множества X в замкнутое выпуклое подмножество X . Тогда существует такая точка $x_0 \in X$, что $x_0 \in \varphi(x_0)$.

Эта теорема о неподвижной точке была в дальнейшем обобщена Эйленбергом и Монтгомери [1] и Беглом [1].

В. 3. Функции множеств и распределения вероятностей. Дадим краткий обзор некоторых фактов теории, опирающейся на интеграл Лебега — Стильтьеса. Полное рассмотрение приведено у Грэйвза [1].

Класс борелевских множеств. Множество всех точек, каждая из которых принадлежит какому-либо члену последовательности множеств $\{S_n\}$, называется *объединением* этой последовательности; множество точек, принадлежащих каждому члену последовательности, называется ее *пересечением*. Эти два множества обозначаются соответственно через

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Множество точек, которые принадлежат S_1 , но не принадлежат S_2 , называется их *разностью* и обозначается $S_1 \setminus S_2$.

Класс $\mathfrak{S}$ подмножеств E^k называется *аддитивным* классом множеств, если он удовлетворяет следующим условиям:

- (1) E^k принадлежит $\mathfrak{S}$;
- (2) если $S_1, \dots, S_n, \dots$ принадлежат $\mathfrak{S}$, то

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

принадлежат $\mathfrak{S}$;

- (3) если S_1 и S_2 принадлежат $\mathfrak{S}$, то $S_1 \setminus S_2$ принадлежит $\mathfrak{S}$.

Наименьший аддитивный класс множеств, который содержит все „прямоугольники“ в E^k (или все интервалы, если $k = 1$), называется классом *борелевских множеств* в E^k .

Неотрицательные функции множеств. *Неотрицательной* функцией множеств называется функция P , которая определена на классе $\mathfrak{S}$ борелевских множеств и удовлетворяет следующим условиям:

- (1) $P(S) \geq 0$ для всех $S \in \mathfrak{S}$;
- (2) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n)$, если $S_n \cap S_m = \Lambda$ при $n \neq m$;
- (3) $P(S) < \infty$, если S ограничено.

Класс всех неотрицательных функций множеств, определенных на классе борелевских множеств вещественных чисел, эквивалентен классу всех монотонно неубывающих непрерывных справа ¹⁾ функций (определенных на вещественной оси). Соответствие неотрицательных функций множеств неубывающим функциям будет однозначным, если отождествить возрастающие функции, разность которых постоянна. Это соответствие устанавливается следующим образом:

¹⁾ В отечественной литературе принята модификация определения, при которой рассматриваются неубывающие функции, непрерывные слева.—*Прим. ред.*

по данной функции P и любому вещественному числу α определим

$$F(x, \alpha) = \begin{cases} P\{\xi | \alpha < \xi \leq x\}, & x > \alpha, \\ 0, & x = \alpha, \\ -P\{\xi | x < \xi \leq \alpha\}, & x < \alpha. \end{cases}$$

Функция $F(x, \alpha)$ является возрастающей для каждого α и непрерывна справа; кроме того, если $\alpha_1 < \alpha_2$, то

$$F(x, \alpha_1) - F(x, \alpha_2) = P\{\xi | \alpha_1 < \xi \leq \alpha_2\}.$$

Таким образом, $F(x, \alpha_1)$ и $F(x, \alpha_2)$ отличаются на постоянную, не зависящую от x . С другой стороны, если $F(x)$ — любая монотонно возрастающая функция, которая, кроме того, непрерывна справа, можно положить

$$P\{\xi | a < \xi \leq b\} = F(b) - F(a).$$

Последняя функция множеств, определенная на интервалах, может быть расширена до неотрицательной функции множеств, определенной на всех борелевских множествах.

Если $P\{\xi | -\infty < \xi < \infty\} = 1$, то функция множеств P называется *вероятностной мерой*, а для соответствующей точечной функции F выполняется условие нормировки $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$. Функцию F , нормированную таким образом, называют *функцией распределения*. Если существует производная $F'(x) = f(x)$, то она называется *плотностью распределения*. Очевидно, что

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Любая функция f , которая удовлетворяет двум последним условиям, является плотностью для некоторой функции распределения.

Эти понятия могут быть обобщены на E^n . Распределениями вероятностей являются здесь неотрицательные функции множеств P , удовлетворяющих условию $P(E^n) = 1$. Каждому P соответствует функция распределения F , определяемая следующим образом:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi \in E^n | \xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n\}.$$

Эта функция F является монотонно неубывающей по каждой переменной

$$F(-\infty, x_2, \dots, x_n) = \dots = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, -\infty) = 0$$

и

$$F(\infty, \infty, \dots, \infty) = 1.$$

Кроме того, F непрерывна справа по каждой переменной. Разность $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_n F$, где, по определению,

$$\begin{aligned} \Delta_i F &= F(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + \delta_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - \\ &- F(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n), \end{aligned}$$

неотрицательна, так как эта разность равна

$$P\{\xi | a_1 < \xi_1 \leq a_1 + \delta_1, \dots, a_n < \xi_n \leq a_n + \delta_n\}.$$

Обратно, любая функция, удовлетворяющая четырем перечисленным условиям, является некоторой функцией распределения.

Частные распределения. Если $F(x_1, \dots, x_n)$ — функция распределения, определенная на E^n , то $F(x_1, \dots, x_{n-1}, \infty)$ также является функцией распределения, но уже определенной на E^{n-1} . Вообще если k переменным приписывается значение $+\infty$, то F становится функцией распределения оставшихся $n - k$ переменных, называемой распределением.

Интеграл Лебега — Стильтьеса. Пусть g — ограниченная функция, определенная на E^n , а P — вероятностное распределение, определенное на классе борелевских множеств пространства E^n . Для того чтобы определить верхний и нижний интегралы функции g относительно P , рассмотрим сначала какое-либо разбиение E^n на непересекающиеся борелевские множества $E_1, \dots, E_k$ и положим

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x \in E_i} g(x), & M_i &= \sup_{x \in E_i} g(x), \\ s &= \sum_{i=1}^k m_i P(E_i), & S &= \sum_{i=1}^k M_i P(E_i). \end{aligned}$$

Числа s и S называются соответственно нижней и верхней суммами Дарбу для данного разбиения. Варьируя подразделение, мы получаем различные значения сумм Дарбу; если некоторое разбиение получается в результате дальнейшего измельчения другого, то нижняя сумма Дарбу при этом не убывает, а верхняя сумма Дарбу не возрастает. Точная верхняя граница нижних сумм Дарбу называется *нижним интегралом* функции g относительно P , а точная нижняя граница верхних сумм Дарбу называется *верхним интегралом*. Если оба эти интеграла равны, то говорят, что функция g *интегрируема* относительно P . Ее интеграл есть общее значение верхнего и нижнего интегралов; эта величина обычно обозначается

$$\int g(x) dP(x).$$

Если F — точечная функция, соответствующая функции множеств P , то предыдущее обозначение обычно заменяется на

$$\int g(x) dF(x).$$

Кроме очевидных аддитивных свойств интеграла, мы укажем для справок критерий Лебега мажорированной сходимости. Пусть $|f_n| \leq g$ и g интегрируема по отношению к P . Если последовательность f_n сходится всюду к f (на самом деле достаточно сходимости почти всюду относительно меры P), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n dP = \int f dP. \quad (\text{В. 3.1})$$

Если f_n образуют монотонно возрастающую последовательность интегрируемых функций, не подчиненных никаким другим ограничениям, а P — положительная мера, то тот же результат остается в силе и при условии, что допускаются бесконечные значения.

Последовательности распределений. Слабая* сходимость ¹⁾. Последовательность $\{F_n\}$ функций распределения *сходится слабо** к функции распределения F_0 , если $F_n(x) \rightarrow F_0(x)$ в каждой точке непрерывности F_0 . Каждая последовательность функций распределения содержит подпоследовательность F_{n_k} , слабо* сходящуюся к функции F , которая не обязательно является функцией распределения. Однако если g непрерывна, $g(\pm \infty) = 0$ и $F_{n_k} \rightarrow F$ (слабо*), то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int g(x) dF_{n_k}(x) = \int g(x) dF(x). \quad (\text{В. 3.2})$$

Если к тому же F — функция распределения, то соотношение (В. 3.2) имеет место для любой функции g , которая ограничена и непрерывна.

Эти результаты известны под названием теоремы Хелли о сходимости.

¹⁾ В отечественной литературе этот вид сходимости обычно называется сходимостью „в основном“. — *Прим. перев.*

БИБЛИОГРАФИЯ

Алле (Allais M.)

- [1] *Traité d'économie pure*. Paris, Imprimerie Nationale, 1952. 852 p.

Аллен (Allen R. G. D.)

- [1] *Математическая экономия*, М., ИЛ, 1963.

* **Арнофф, Сенгупта** (Arnoff E. L., Sengupta S. S.)

- [1] *Mathematical programming*. «Progress in operations research, vol. I». New York — London, Wiley, 1961, 105—210. Библиография 205 назв.

* **Африат** (Afriat S. N.)

- [1] Preference scales and expenditure systems, *Econometrica*, **30**, № 2 (1962), 305—323.

Бегл (Begle E. G.)

- [1] A fixed point theorem, *Ann. Math.*, **51**, № 3 (1950), 544—550.

Беллман (Bellman R.)

- [1] *Динамическое программирование*, М., ИЛ, 1960, 400 стр.

- [2] On games involving bluffing, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, ser. 2, **1**, № 2 (1952), 139—156.

Беллман, Гиршик (Girshick M. A.)

- [1] An extension of results on duels with two opponents, one bullet each, silent guns, equal accuracy, The RAND Corporation, D-403, 1949. См. также Дрешер [2]*.

Беллман, Гликсберг, Гросс (Glicksberg I., Gross O.)

- [1] On some variational problems occurring in the theory of dynamic programming, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, ser. 2, **3**, № 1 (1954), 1—35.

Беллман, Шифман (Shiffman M.)

- [1] On the min-max of $\int_0^1 f(x)a(x)d(x)dt(x)$, The RAND Corporation, RM-308-1, 1949.

Бельзер (Belzer R. L.)

- [1] Silent duels, specified accuracies, one bullet each, The RAND Corporation, RAD (L)-301, 1948. См. также Дрешер [2].

Берж (Berge C.)

- [1] Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs, *J. de mathématiques pures et appliquées*, **32**, № 2 (1953), 129—184.

Бил (Beale E. M. L.)

- [1] Aa algorithm for solving the transportation problem when the shipping cost over each route is convex, *Naval. Res. Logist. Quart.* **6**, № 1 (1959), 43—59.

Биркгоф, Мак-Лейн (Birkhoff G., MacLane S.)

- [1] A survey of modern algebra, New York, Macmillan, 1941.

Блекетт (Blackett D. W.)

- [1] Some Blotto games, *Naval Res. Logist. Quart.*, 1, № 1—2 (1954), 55—60.

Блекуэлл (Blackwell D.)

- [1] The silent duel, one bullet each, arbitrary accuracy, The RAND Corporation, RM-302, 1948. См. также Дрешер [2].

- [2] The noisy duel, one bullet each, arbitrary, non-monotone accuracy, The RAND Corporation, D-442, 1949. См. также Дрешер [2].

Блекуэлл, Гиршик (Girshick M. A.)

- [1] Теория игр и статистических решений, М., ИЛ, 1958, 374 стр.

- [2] A loud duel with equal accuracy where each duelist has only a probability of possessing a bullet, The RAND Corporation, RM-219, 1949.

Блекуэлл, Шифман (Shiffman M.)

- [1] A bomber-fighter duel, The RAND Corporation, D-509, 1949.

- [2] A bomber-fighter duel, The RAND Corporation, RM-193, 1949.

Болдуин, Кэнти, Майзель, Мак-Дермот (Baldwin R. R., Cantey W. E., Maisel H., McDermott J. P.)

- [1] The optimum strategy in blackjack, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 51, № 4 (1956), 429—439.

Боненбласт (Bohnenblust H. F.)

- [1] Теория игр. В книге «Современная математика для инженеров» под ред. Э. Беккенбаха, М., ИЛ, 1958, 216—236. См. также *Матем. просвещение*, вып. 4. 1959, 53—86.

Боненбласт, Карлин (Karlin S.)

- [1] Об одной теореме Вилля. Сборник * [1], 489—496.

Боненбласт, Карлин, Шепли (Shapley L. S.)

- [1] Решения дискретных игр двух лиц. Сборник * [2], 17—44.

- [2] Игры с непрерывной выпуклой функцией выигрыша. Сборник * [1], 337—352.

Борель (Borel E.).

- [1] Applications aux jeux de hasard, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1938.

- [2] 1) The theory of play and integral equations with skew symmetrical kernels, 2) On games that involve chance and the skill of the players, 3) On systems of linear forms of skew symmetric determinants and the general theory of play, *Econometrica*, 21, № 1 (1953), 97—117.

Браун (Brown G. W.)

- [1] Some notes on computation of games' solutions, The RAND Corporation, D-436, 1949.

- [2] Iterative solution of games by fictitious play. Сборник [13], гл. XXIV.

Браун (Brown R. H.)

- [1] Решение одной антагонистической игры. Сборник * [1], 419—425.

Браун и фон Нейман (Brown G. W., von Neumann J.)

- [1] Solutions of games by differential equations. Сборник [10], 73—79.

Брауншвейгер, Кларк (Braunschweiger C. C., Clark H. E.)

- [1] An extension of the Farkas theorem, *Amer. Math. Monthly*, **69**, № 4 (1962), 272—277.

* Булавский В. А.

- [1] * Итеративный метод решения общей задачи линейного программирования, *Сибирск. матем. журнал*, **3**, № 3 (1962), 313—332.

* Бут (Boot J. C. G.)

- [1] Notes on quadratic programming: The Kuhn-Tucker and Theil-van de Panne conditions, degeneracy and equality constraints, *Manag. Sci.*, **8**, № 1 (1961), 85—98.

* Бэтчелор (Batchelor J. H.)

- [1] Operations research. An annotated bibliography. 2nd ed. St. Louis (Mo.), Univ. Press, 1959, 866 pp.

- [2] Operations research. An annotated bibliography. Vol. 2. St. Louis (Mo.), Univ. Press, 1962, 628 pp.

Вагнер (Wagner H.)

- [1] A practical guide to the dual theorem, *Operat. Res.*, **6**, № 3 (1958), 364—384.

Вайда (Vajda S.)

- [1] Теория игр и линейное программирование. Сборник [12], 11—106.

Вальд (Wald A.)

- [1] Последовательный анализ, М., Физматгиз, 1960.

- [2] Statistical decision functions, New York, Wiley, 1950.

- [3] Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, **6** (1935), 12—20.

- [4] Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wertlehre, II, *Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums*, **7** (1936), 1—6.

- [5] Statistical decision functions which minimize the maximum risk, *Ann. Math.*, **46** (1945), 265—280.

- [6] Statistical decision theory, *Ann. Math. Stat.*, **20** (1949), 165—205.

- [7] Note on zero-sum two-person games, *Ann. Math.*, **52** (1950), 739—742.

- [8] On some systems of equations of mathematical economics, *Econometrica*, **19** (1951), 368—403.

Вальрас (Walras L.)

- [1] Elements of pure economics, or the theory of social wealth. (Transl. by W. Jaffe). Homewood (Ill.), Irwin, 1954.

* Вернер (Wegner P.)

- [1] A non-linear extension of the simplex-method, *Manag. Sci.*, **7**, № 1 (1960), 43—55.

Вейль (Weil H.)

- [1] Элементарная теория выпуклых многогранников, Сборник * [2], 254—273,

* Вилд (Wilde D. J.)

- [1] Differential calculus in nonlinear programming, *Operat. Res.*, 10, № 6 (1962), 764—773.

Виль (Ville J.)

- [1] Note sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs. *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications*, par E. Borel et collaborateurs, t. IV, fasc. 2, Paris, 1938, 105—113.

* Вильямс (Williams A. C.)

- [1] Marginal values in linear programming, *J. Soc. Industr. and Appl. Math.*, 11, № 1 (1963), 82—94.

Вильямс (Williams J. D.)

- [1] Совершенный стратег, или букварь по теории игр, М., Советское Радио, 1960.

* Воробьев Н. Н.

- [1] Конечные бескоалиционные игры, *УМН*, 14, № 4 (1959), 21—56.

- [2] Математическая теория игр, Л., «Знание», 1963, 72 стр.

Вуд, Данциг (Wood M. K., Dantzig G. B.)

- [1] Programming of interdependent activities, I. General discussion, *Econometrica*, 17, № 2 (1949), 193—199. (В переработанном виде опубликована в качестве гл. I сборника [13].)

Вулф (Wolfe Ph.)

- [1] Определенность полиэдральных игр. Сборник [12], 298—301.

- [2] The simplex method for quadratic programming, The RAND Corporation, P-1295, 1957. См. также *Econometrica*, 27, № 3 (1959), 382—398.

- [3] * A duality theorem for nonlinear programming, *Quart. Appl. Math.*, 19, № 3 (1961), 239—244.

- [4] * Accelerating the cutting plane method for nonlinear programming, *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, 9, № 3 (1961), 481—488.

Гаддум, Гофман, Соколовский (Gaddum J. W., Hoffman A. J., Sokolowsky D.)

- [1] On the solution of the caterer problem, *Naval Res. Logist. Quart.*, 1, № 3 (1954), 223—229.

Гантмахер Ф. Р.

- [1] Теория матриц, М., ГТТИ, 1953, 491 стр.

Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.

- [1] Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, М., ГТТИ, 1950.

* Гарвин (Garwin W. W.)

- [1] Introduction to linear programming, N. Y., McGraw-Hill, 1960, 281 pp.

Гасс (Gass S. I.)

- [1] Линейное программирование (методы и приложения), М., Физматгиз, 1961, 303 стр.

- [2] * Recent developments in linear programming. «Advances in the computers, vol. 2», New York — London, Acad. Press, 1961, 295—377. Библиография 228 назв.

Гейл (Gale D.)

- [1] The law of supply and demand, *Math. Scand.*, 3, № 1 (1955), 155—169.
- [2] Замкнутая линейная модель производства. Сборник [12], 382—400.
- [3] Information in games with finite resources. Сборник [9], 141—145.
- [4] The theory of matrix games and linear economic models. Lecture notes, Dept. of Math., Brown University, Providence R. I., 1957.
- [5] * Теория линейных экономических моделей, М., ИЛ, 1963, 418 стр.

Гейл, Гросс (Gross O.)

- [1] Заметка о полиномиальных и вырожденных играх. Сборник * [1].

Гейл, Кун, Таккер (Kuhn H. W., Tucker A. W.)

- [1] О симметричных играх. Сборник * [2], 62—71.
- [2] Linear programming and the theory of games. Сборник [13], гл. XIX.

Гейл Д., Шерман (Scherman S.)

- [1] Решения конечных игр двух лиц. Сборник * [2], 45—61.

Гирш, Данциг (Hirsch W., Dantzig G. B.)

- [1] The fixed charge problem, The RAND Corporation. RM-1383, 1954.

Гликсберг (Glicksberg I.)

- [1] Noisy duel, one bullet each, with simultaneous fire and unequal worths, The RAND Corporation, RM-474, 1950.
- [2] Дальнейшее обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке с приложением к ситуациям равновесия Нэша. Сборник * [1] 497—503.

Гликсберг, Гросс (Gross O.)

- [1] Butterfly Games, The RAND Corporation, RM-655, 1951.
- [2] Некоторые замечания об играх на квадрате. Сборник * [1] 205—217.

Голдман, Таккер (Goldman A. J., Tucker A. W.)

- [1] Теория линейного программирования. Сборник [12], 172—213.

Грейвз (Graves L. M.)

- [1] The theory of functions of real variables, New York, McGraw-Hill, 1946.

Гросс (Gross O.)

- [1] A rational payoff characterization of the Cantor distribution, The RAND Corporation, D-1349, 1952.
- [2] The derivatives of the value of a game, The RAND Corp., RM-1286, 1954.
- [3] A simple linear programming problem explicitly solvable in integers, The RAND Corporation, RM-1560, 1955.

Гурвиц (Hurwicz L.)

- [1] Программирование в линейных пространствах. См. Эрроу, Гурвиц, Удзава, [1] гл. IV.

Данскин (Danskin J. M.)

- [1] Итеративный метод решения непрерывных игр. Сборник * [1], 414—418.
- [2] Mathematical treatment of a stockpiling problem, *Naval Res. Logist. Quart.*, 2, № 2 (1955), 99—109.

Данскин, Джилмен (Gillman L.)

- [1] Explicit solution of a game over function space, The RAND Corporation, P-235, 1951.
- [2] A game over function space, *Rivista Mat. Univ. Parma*, 4, № 1 (1953).

Данциг (Dantzig G. B.)

- [1] A proof of the equivalence of the programming problem and the game problem. Сборник [13], гл. XX.
- [2] Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. Сборник [146], гл. XXI.
- [3] The theory of mathematical programming, Notes at the RAND Corporation.
- [4] * Linear programming and extensions. Princeton, Princeton Univ. Press, 1963, 625 pp.

Данциг, Вальд (Wald A.)

- [1] On the fundamental lemma of Neyman and Pearson, *Ann. Math. Statist.*, 22, № 1 (1951), 87—93.

Данциг, Гофман (Hoffman A. J.)

- [1] Теорема Дилворта о частично упорядоченных множествах. Сборник [12], 311—317.

Данциг, Орден, Вулф (Orden A., Wolfe P.)

- [1] The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints, *Pacific J. Math.*, 5, № 2 (1955), 183—195.

Дебрё, (Debreu G.)

- [1] A social equilibrium existence theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 38, № 9 (1952), 886—893.
- [2] Valuation equilibrium and Pareto optimum, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 40, № 7 (1954), 588—592.

Дебрё, Херштейн (Herstein J. N.)

- [1] Non-negative square matrices, *Econometrica*, 21, № 4 (1953), 597—607.

* Деннис Дж.

- [1] Математическое программирование и электрические цепи, М., ИЛ, 1961.

Джекобс (Jacobs W. W.)

- [1] The caterer problem, *Naval Res. Logist. Quart.*, 1, № 2 (1954), 154—165.

Джиллис, Мейберри, фон Нейман (Gillies D. B., Mayberry J. P., von Neumann J.)

- [1] Two variants of poker. Сборник [11], 13—50.

Джилман (Gillman L.)

- [1] Operations analysis and the theory of games: an advertising example, *J. Amer. Stat. Assoc.*, 45, № 4 (1950), 541—546.

Джорджеску-Реген (Georgescu-Roegen N.)

- [1] The aggregate linear production function and its application to von Neumann's economic model. Сборник [13], гл. IV.

* Дорн (Dorn W. D.)

- [1] Duality in quadratic programming, *Quart. Appl. Math.*, 18, № 2 (1960).
- [2] A duality theorem for convex programs, *IBM J. Res. and Developm.*, 4, № 4 (1960), 407—413.
- [3] Self-dual quadratic programs, *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, 9, № 1 (1961), 51—54.

Дорфман (Dorfman R.)

- [1] Application of linear programming to the theory of the firm, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951.

Дорфман, Самуэльсон, Солоу (Samuelson P. A., Solow R. M.)

- [1] Linear programming and economic analysis, New York, McGraw-Hill, 1958, 525 pp.

Дрешер (Dresher M.)

- [1] Theory and applications of games of strategy, The RAND Corporation, R-216, 1951.

- [2] * Стратегические игры. Теория и приложения. Сов. Радио, 1964, 352 стр.

- [3] Methods of solution in game theory, *Econometrica*, 18, № 3 (1950), 179—181.

- [4] Games of strategy, *Mathematics Magazine*, 25, № 2 (1951), 93—99.

- [5] Le Her, The RAND Corporation (не опубликовано). См. также [2] *.

Дрешер, Карлин (Karlin S.)

- [1] Решение выпуклых игр методом неподвижных точек. Сборник * [1], 180—194.

Дрешер, Карлин, Шепли (Shapley L. S.)

- [1] Полиномиальные игры. Сборник * [1].

* Д'Эзоп (D'Esopo D. A.)

- [1] A convex programming procedure, *Naval Res. Logist. Quart.*, 6, № 1 (1959), 33—42.

* Зойтендейк (Zoutendijk G.)

- [1] Методы возможных направлений, М., ИЛ, 1963, 128 стр.

Какутани (Kakutani S.)

- [1] A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.*, 8, № 0 (1941), 451—458.

Канторович Л. В.

- [1] О перемещении масс, *Докл. АН СССР*, 37, № 7—8 (1942), 227—229.

- [2] * Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, М., Изд. АН СССР, 1959, 344 стр.

- [3] * Математические методы в организации и планировании производства, Изд. ЛГУ (1939). См. также сб. [3] *.

Капланский (Kaplansky I.)

- [1] A contribution to von Neumann's theory of games, *Ann. Math.*, 46, № 0 (1945), 474—479.

Карлин (Karlin S.)

- [1] Операторное истолкование принципа минимакса. Сборник [1], 47—76.

- [2] Сведение некоторых классов игр к интегральным уравнениям. Там же.

- [3] The theory of infinite games, *Ann. Math.*, 58, № 2 (1953), 371—401.

- [4] Polya type distributions, II, *Ann. Math. Stat.*, 28, № 2 (1957).

- [5] Об играх, описываемых колоколообразными ядрами. Сборник [1].

- [6] Positive operators, *J. of Math. and Mech.* (1960).

Карлин, Рестрепо (Restrepo R.)

- [1] Multistage poker models. Сборник [9], 337—363.

Карлин, Шепли (Shapley L. S.)

- [1] Some applications of a theorem on convex functions, *Ann. Math.*, **52**, № 1 (1950), 148—153.
[2] Geometry of moment spaces, *Memoirs of the American Math. Society*, **12** (1953), 1—93.

* Келли (Kelley J. E.)

- [1] The cutting plane method for solving convex programs, *J. Soc. Industr. Appl. Math.*, **8**, № 4 (1960), 703—712.

Кемени, Моргенштерн, Томпсон (Kemeny J. G., Morgenstern O., Thompson G. L.)

- [1] A generalization of the von Neumann model of an expanding economy, *Econometrica*, **24**, № 1 (1956), 115—135.

Кифер (Kiefer J.)

- [1] Invariance, minimax sequential estimation and continuous time processes, *Ann. Math. Stat.*, **28**, № 4 (1957), 573—601.

* Клейн (Klein L. R.)

- [1] A textbook of econometrics. Evanston (Ill.), Row. Peterson & Co., 1956, 355 p.

* Корбут А. А.

- [1] Целочисленные задачи линейного программирования. Экономико-математические методы, вып. 2. М., Изд. АН СССР, 1964.

Котелянский Д. М.

- [1] О некоторых свойствах матриц с положительными элементами, *Матем. сб.*, **31**, № 3 (1952), 497—506.
[2] Об одном свойстве знакосимметричных матриц, *Успехи матем. наук*, **8**, № 4 (1953), 163—167.

* Красносельский М. А.

- [1] Положительные решения операторных уравнений, М., Физматгиз, 1962, 394 стр.

Крейн М. Г., Рутман М. А.

- [1] Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, *Успехи матем. наук*, **3**, № 1 (1948), 3—95.

Кречмер (Kretschmer K. S.)

- [1] Linear programming in locally convex spaces and its use in analysis (Технологический институт Карнеджи, диссертация на степень доктора философии). См. также статью автора.
[2] * Programmes in paired spaces, *Canadian J. Math.*, **13**, № 2 (1961), 221—238.

Кудо (Kudo H.)

- [1] On minimax invariant estimates of the transformation parameter, *National Science Report of the Ochanomizu University*, **6**, № 1 (1955), 31—73.

Кун (Kuhn H. W.)

- [1] A simplified two-person poker. Сборник [10], 97—103.

[2] A combinatorial algorithm for the assignment problem, Logistics papers, issue 11 (George Washington University Logistics Research Project), 1954.

[3] The Hungarian method for the assignment problem, *Naval Res. Logist. Quart.*, 2, № 2 (1955), 83—97.

[4] Об одной теореме Вальда. Сборник [12], 361—371.

[5] Variants of the Hungarian method for assignment problems, *Naval Res. Logist. Quart.*, 3, № 4 (1956), 253—258.

Кун, Таккер (Kuhn H. W., Tucker A. W.)

[1] Non-linear programming. Сборник [7], 481—492.

[2] * John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 64, № 3 (part 2) (1958), 100—122.

Купман (Коорман В. О.)

[1] The theory of search, I. Kinematic bases, *Operat. Res.*, 4, № 3 (1956), 324—346.

Купманс (Коорманс Т. С.)

[1] Three essays on the state of economic analysis, New York, McGraw-Hill, 1957.

[2] Alternative proof of the substitution theorem for Leontief models in the case of three industries. Сборник [13], гл. VIII.

[3] Water storage policy in a simplified hydroelectric system, Proceedings of the International Conference on Operations Research, Bristol, Stonebridge Press, 1957, 197—233.

Купманс, Рейтер (Reiter S.)

[1] A model of transportation. Сборник [13], гл. XIV.

* Куртийо (Courtilot M.)

[1] On varying all the parameters in a linear-programming problem and sequential solution of a linear-programming problem, *Operat. Res.*, 10, № 4 (1962), 471—475.

* Кюнзи (Künzi H. P.)

[1] Abgekürzte Verfahren beim quadratischen Programmieren, *Unternehmensforschung*, 5, № 3 (1961), 144—165.

* Кюнзи, Крелле (Krelle W.)

[1] Nichtlineare Programmierung, Berlin, Springer-Verlag, 1962, 221 p. Библиография 155 назв.

Лемке (Lemke C. E.)

[1] The dual method of solving the linear programming problem, *Naval Res. Logist. Quart.*, 1, № 1 (1954), 36—47.

[2] * A method of solution for quadratic programs, *Manag. Sci.*, 8, № 4 (1962), 442—453.

Леонтьев (Leontief W. W.) и др.

[1] Исследования структуры американской экономики, Теоретический и эмпирический анализ по схеме затраты — выпуск, М., Госстатиздат, 1958, 640 стр.

Лумис (Loomis L. H.)

- [1] On a theorem of von Neumann, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 32, № 2 (1946), 213—215.

Льюс, Райфа (Luce R. D., Raiffa H.)

- [1] Игры и решения, М., ИЛ, 1961, 642 стр.

* Маданский (Madansky A.)

- [1] Methods of solutions of linear programs under uncertainty, *Operat. Res.*, 10, № 4 (1962), 463—471.

- [2] Dual variables in two-stage linear programming under uncertainty, *J. Math. Anal. and Appl.*, 6, № 1 (1963), 98—108.

Мак-Дональд (McDonald J.)

- [1] Strategy in poker, business and war, New York, Norton, 1950.

Мак-Кензи (McKenzie L. W.)

- [1] Competitive equilibrium with dependent consumer preferences. В сб. [6].

- [2] Demand theory without an utility index, *Rev. of Econ. Studies*, 24, № 2 (1956—57), 185—189.

- [3] * Stability of equilibrium and the value of positive excess demand, *Econometrica*, 28, № 3 (1960), 606—617.

Мак-Кинси Дж. (McKinsey J. C.)

- [1] Введение в теорию игр, М., Физматгиз, 1960, 420 стр.

Мак-Клоски, Трефетен (McCloskey J. F., Trefethen F. N.)

- [1] Operations research for management, Baltimore, Johns Hopkins Univ. Press, 1954.

* Мангасарян (Mangasarian O. L.)

- [1] Duality in non-linear programming, *Quart. Appl. Math.*, 20, № 3 (1962), 300—302.

Манн (Manne A. S.)

- [1] Scheduling of petroleum refinery operations, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1956.

Марковиц (Markowitz H. M.)

- [1] Portfolio selection, *J. of Finance*, 7, (1952), 77—91.

- [2] The optimization of a quadratic function subject to linear constraints, *Naval Res. Logist. Quart.*, 3, № 2 (1956), 111—113.

Марковиц, Манн (Manne A. S.)

- [1] On the solution of discrete programming problems, *Econometrica*, 25, № 1 (1957), 84—110.

Метцлер (Metzler L. A.)

- [1] Stability of multiple markets: the Hicks conditions, *Econometrica*, 13, № 3 (1945), 277—292.

Миллс (Mills H. D.)

- [1] Маргинальные значения матричных игр и задач линейного программирования. Сборник [12], 287—297.

Мозак (Mosak J. L.)

- [1] General equilibrium theory in international trade, Bloomington (Indiana), The Principia Press, 1944.

Моргенштерн, ред. (Morgenstern O.)

- [1] Economic activity analysis, New York, Wiley, 1954.

Морисима (Morishima M.)

- [1] On the laws of change of the price system in an economy which contains complementary commodities, *Osaka Economics Papers*, 1 (1952), 101—113.

- [2] Prices, interest and profits in a dynamic Leontief system, *Econometrica*, 26, № 3 (1958), 358—380.

Моцкин (Motzkin T. S.)

- [1] Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen. Inaugural Dissertation, Jerusalem, 1936.

Моцкин, Райфа, Томпсон, Тролл (Raiffa H., Thompson G. L., Thrall R. M.)

- [1] Метод двойного описания. Сборник * [2], 81—109.

Найт (Knight F. H.)

- [1] A note on professor Clark's illustration of marginal productivity, *J. of Political Economics*, 33, № 4 (1925), 550—553.

* Негиси (Negishi T.)

- [1] The stability of a competitive economy: a survey article, *Econometrica*, 30, № 4 (1962), 635—669.

Нейман, Пирсон (Neuman J., Pearson E.)

- [1] On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses, *Philosophical transactions of the Royal Society*, A-231 (1933), 289—337.

фон Нейман (von Neumann J.)

- [1] К теории стратегических игр. Сборник [2], 173—204.

- [2] Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 8 (1937), 73—83.

Английский перевод: A model of general economic equilibrium, *Rev. Econ. Studies*, 13, № 1 (1945—46), 1—9.

- [3] Об одной нулевой игре двух лиц, эквивалентной задаче оптимального назначения. Сборник [2], 145—155.

- [4] A numerical method to determine optimum strategy, *Naval Res. Logist. Quart.*, 1, № 2 (1954), 109—115.

фон Нейман, Моргенштерн (Morgenstern O.)

- [1] Theory of games and economic behavior, 3d ed., Princeton, Princeton Univ. Press, 1953.

* Немчинов В. С.

- [1] Экономико-математические методы и модели, М., Соцэкгиз, 1962, 410 стр.

Никайдо (Nikaido H.)

- [1] On a minimax theorem and its applications to functional analysis, *J. of the Math. Soc. of Japan*, 5, № 1 (1953), 86—94.

- [2] Note on the general economic equilibrium for non-linear production functions, *Econometrica*, 22, № 1 (1954), 49—53.

- [3] On von Neumann's minimax theorem, *Pacific J. Math.*, 4, № 1 (1954).

* Ньютман (Newman P.)

- [1] Approaches to stability analysis, *Economica* (Engl.), 28, № 109 (1961), 12—29.

Нэш (Nash J. F.)

- [1] Equilibrium points in N -person games, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 36, № 1 (1950), 48—49.

Нэш, Шепли (Nash J. F., Shapley L. S.)

- [1] A simple three-person poker game. Сборник [10], 105—116.

Пейсаков (Peisakoff M. P.)

- [1] Transformation parameters. Ph. D. Thesis, Princeton University, 1950.

Перлис (Perlis S.)

- [1] Theory of matrices, Cambridge (Mass.), Addison-Wesley, 1952.

Питман (Pitman E. J. G.)

- [1] The estimation of location and scale parameters of a continuous population of any given form, *Biometrika*, 30, № 3 (1939), 391—421.

- [2] Tests of hypotheses concerning location and scale parameters, *Biometrika*, 31, № 2 (1939), 200—215.

Прагер (Prager W.)

- [1] On the role of congestion in transportation problems, *Zeitschr. für angewandte Math. u. Mech.*, 35 (1955), 381—396.

- [2] On the caterer problem, *Manag. Sci.*, 3, № 1 (1956), 15—23.

Радемахер, Шенбергер (Rademacher H., Schoenberg I. J.)

- [1] Helly's theorems on convex domains and Tchebycheff's approximation problem, *Canadian J. Math.*, 2 (1950), 245—256.

Райли, Гасс (Riley V., Gass S. I.)

- [1] A bibliography of linear programming and associated techniques, Baltimore, Johns Hopkins Univ. Press, 1958.

Рейтер (Reiter S.)

- [1] Efficiency and prices in the theory of an international economy. Technical Report № 13, Stanford University, 1954.

Рейнфельд, Фогель (Reinfeld N. V., Vogel W. R.)

- [1] Математическое программирование, М., ИЛ, 1960, 302 стр.

Рестрепо (Restrepo R.)

- [1] Tactical problems involving several actions. Сборник [9], 313—335.

- [2] Games with a random move (не опубликовано).

Робинсон (Robinson J.)

- [1] Итеративный метод решения игр. Сборник [2], 110—117.

Рудин (Rudin W.)

- [1] Principles of mathematical analysis, New York, McGraw-Hill, 1953.

Савидж (Savage I. R.)

- [1] Cycling, *Naval Res. Logist. Quart.*, 3, № 3 (1956), 163—175.

Сайон (Sion M.)

- [1] Некоторые общие теоремы о минимаксах. Сборник * [1], 40—46,

Сайон, Вулф (Sion M., Wolfe P.)

- [1] On a game without a value. Сборник [9], 299—305.

Самуэльсон (Samuelson P. A.)

- [1] Foundations of economic analysis, Cambridge (Mass.), Harvard Univ. Press, 1955.

- [2] A note on the pure theory of consumers' behavior, *Economica*, 18 (1938), 61—71; 353—354.

- [3] Frank Knight's theorem in linear programming, The RAND Corporation, D-782, 1950. См. также *Zeitschr. Nationalökon.*, 18, № 3 (1958), 310—317.

- [4] Abstract of a theorem concerning substitutability in open Leontief models. Сборник [13], гл. VII.

* Сапс (Suppes P.)

- [1] Behavioristic foundations of utility, *Econometrica*, 28, № 2 (1960), 186—202.

* Симонар (Simonnard M.)

- [1] *Programmation linéaire*, Paris, Dunod, 1962, 419 p.

Слущкий (Slutsky E.)

- [1] Sulla teoria del bilancio del consumatore, *Giornale degli Economisti*, 51, № 1 (1915), 19—23.

Смит (Smith W. E.)

- [1] Various optimizers for single-stage production, *Naval Res. Logist. Quart.*, 3, № 1 (1956), 59—66.

Солоу (Solow R. M.)

- [1] On the structure of linear models, *Econometrica*, 20, № 1 (1952), 29—46.

Солоу, Самуэльсон (Solow R. M., Samuelson P. A.)

- [1] Balanced growth under constant returns to scales, *Econometrica*, 21, (1953), 412—424.

Сьютс (Suits D. B.)

- [1] Dynamic growth under diminishing returns to scales, *Econometrica*, 22, № 4 (1954), 496—501.

* Тейл, Ван-де-Панне (Theil H., van de Panne C.)

- [1] Quadratic programming as an extension of conventional quadratic maximization, *Manag. Sci.*, 7, № 1 (1960), 1—20.

Томпсон (Thompson G. L.)

- [1] О решении одной задачи теории игр. Сборник [12], 372—381.

Удзава (Uzawa H.)

- [1] On the logical relation between preference and revealed preference. Technical Report № 38, Dept. of Economics, Stanford University, 1956.

- [2] A note on the stability of equilibrium. Technical Report № 44, Dept. of Economics, Stanford University, 1957.

- [3] A note on the Menger-Wieser theory of imputation. Technical Report № 45, Dept. of Economics, Stanford University, 1957.

- [4] Градиентный метод для вогнутого программирования. II. Глобальная устойчивость в строго вогнутом смысле. См. Эрру, Гурвиц, Удзава. гл. VII.

Фань Цзи (Fan Ky)

- [1] Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **38**, № 2 (1952), 121—126.

[2] Теоремы о минимаксе. Сборник * [1], 31—39.

Фань Цзи, Гликсберг, Гофман (Glicksberg I., Hoffman A. J.)

- [1] Systems of inequalities involving convex functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**, № 3 (1957), 617—622.

Фаркас (Farkas J.)

- [1] Theorie der einfachen Ungleichungen, *J. für reine u. angewandte Math.*, **124**, № 1 (1901), 1—27.

Феллер (Feller W.)

- [1] Введение в теорию вероятностей и ее приложения, М., ИЛ, 1952.

Фенхель (Fenchel W.)

- [1] Convex cones, sets and functions. Lecture notes, Dept. of Math., Princeton University, 1953.

Фергюсон, Сарджент (Ferguson R. O., Sargent I. F.)

- [1] Linear programming, New York, McGraw-Hill, 1958.

* Филипп (Philip J.)

- [1] A quadratic programming method with error estimates for approximate solutions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. u. verw. Geb.*, **1**, № 3 (1953).

Флеминг (Fleming W. H.)

- [1] Об одном классе игр над пространством функций и родственных вариационных задач. Сборник * [1], 98—122.

Флуд (Flood M. M.)

- [1] On the Hitchcock distribution problem, *Pacific J. Math.*, **3**, № 2 (1953).

Форд, Фулкерсон (Ford L. R., Fulkerson D. R.)

- [1] Maximal flow through a network, *Canadian J. Math.*, **8**, № 3 (1956).
 [2] A simple algorithm for finding maximal network flows and an application to the Hitchcock problem, *Canadian J. Math.*, **9**, № 2 (1957).
 [3] A primal-dual algorithm for the capacitated Hitchcock problem, *Naval Res. Logist. Quart.*, **4**, № 1 (1957), 47—54.
 [4] * Flows in networks, Princeton, Princeton Univ. Press, 1962, 208 pp.

Готовится русский перевод.

Франк, Вулф (Frank M., Wolfe P.)

- [1] An algorithm for quadratic programming, *Naval Res. Logist. Quart.*, **3**, № 1—2 (1956), 95—110.

Фробениус (Frobenius G.)

- [1] Über Matrizen aus positiven Elementen, *Sitzungsberichte Akad. Wiss., Phys.-math. Kl.*, **8** (1908), 471—476.

Фулкерсон (Fulkerson D. R.)

- [1] Hitchcock transportation problem, The RAND Corporation, P-890, 1956.
 [2] A network-flow feasibility theorem and combinatorial applications (Notes on linear programming, part XLV), The RAND Corporation, RM-2159, 1958.

* Хадли (Hadley G.)

- [1] Linear programming, Reading (Mass.) — London, Addison Wesley, 1962, 520 p.

* Хан (Hahn F. H.)

- [1] Gross substitutes and the dynamic stability of general equilibrium, *Econometrica*, 26, № 1 (1958), 169—170.

Харди, Литльвуд, Полиа (Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G.)

- [1] Неравенства, М., Гостехиздат, 1949.

Хаутэккер (Houthakker H. S.)

- [1] Revealed preference and the utility function, *Economica*, 17 (1950), 159—174.

- [2] La forme des courbes d'Engel, *Cahiers du Séminaire d'Econométrie* (1953), 59—66.

- [3] * The capacity method of quadratic programming, *Econometrica*, 28, № 1 (1960), 62—87.

- [4] * The present state of consumption theory. A survey article, *Econometrica*, 29, № 4 (1961), 704—740.

Хельмер (Helmer O.)

- [1] Open problems in game theory, *Econometrica*, 20, № 1 (1952), 90 (abstract).

Хикс (Hicks J. R.)

- [1] Value and capital, Oxford, Oxford University Press, 1953.

Хильдрет (Hildreth C.)

- [1] A quadratic programming procedure, *Naval Res. Logist. Quart.*, 4, № 1 (1957), 79—85.

Хичкок (Hitchcock F. L.)

- [1] Distribution of a product from several sources to numerous localities, *J. Math. Phys.*, 20, № 2 (1941), 224—230.

Хокинс, Саймон (Hawkins D., Simon H. A.)

- [1] Note: Some conditions of macroeconomic stability, *Econometrica* 17, № 2 (1949), 245—248.

Хон, Модильяни (Hohn F. E., Modigliani F.)

- [1] Production planning over time and the nature of the expectation and planning horizon, *Econometrica*, 23, № 1 (1955), 46—66.

Чарнс (Charnes A.)

- [1] Optimality and degeneracy in linear programming, *Econometrica*, 20, № 2 (1952), 160—170.

Чарнс, Купер (Cooper W. W.)

- [1] Generalizations of the warehousing model, *Operat. Res. Quart.*, 6, № 2 (1955), 131—172.

- [2] * Management models and industrial applications of linear programming. Volumes I—II. New York, Wiley, 1961.

* Чарнс, Купер, Кортанек (Kortanek K.)

[1] Duality, Haar programs and finite sequence spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 48, № 6 (1962), 783—786.

[2] Duality in semi-infinite programs and some works of Haar and Carathéodory, *Manag. Sci.*, 9, № 2 (1963), 209—228.

[3] A duality theory for convex programs with convex constraints, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68, № 6 (1962), 605—608.

Чарнс, Купер, Хендерсон

[1] Введение в линейное программирование, М., Изд. МГЭИ (1960), 97.

Ченери (Chenery H. B.)

[1] The role of industrialization in development programs, *Amer. Econ. Review*, 45, № 1 (1955), 40—56.

Ченери, Кречмер (Chenery H. B., Kretschmer K. S.)

[1] Resource allocation for economic development, *Econometrica*, 24, № 3, (1956), 365—399.

Ченери, Удзава (Uzawa H.)

[1] Применение нелинейного программирования к вопросам экономического развития. См. Эрроу, Гурвиц, Удзава, [1], гл. XV.

Черчман, Аккофф, Арнофф (Churchman C. W., Ackoff R. L., Arnoff E. L.)

[1] Introduction to operations research, New York, Wiley, 1957, 655 p.

* Чипмэн (Chipman J. S.)

[1] The foundations of utility, *Econometrica*, 28, № 2 (1960), 193—224.

Шёнберг (Schoenberg I. J.)

[1] On smoothing operations and their generating functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 59 (1953), 199—230.

* Шёнфельд (Schönfeld P.)

[1] Grundzüge der Theorie der faktischen Präferenz («Revealed preference»), *Zeitschr. Nationalökon.*, 22, № 3 (1962), 292—336. Библиография 40 назв.

Шепли (Shapley L. S.)

[1] The theory of n -person games (неопубликованные заметки).

[2] The silent duel, one bullet vs. two, equal accuracy, The RAND Corporation, RM-445, 1950. См. также Дрешер [2].

[3] An example of an infinite non-constant — sum game, The RAND Corporation, RM-898, 1952.

Шепли, Сноу (Shapley L. S., Snow R. N.)

[1] Basic solutions of discrete games. Сборник [10], 27—37. См. также сборник * [2].

Шерман (Sherman S.)

[1] Games and subgames, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2, № 2 (1951), 186—187.

Шифман (Shiffman M.)

[1] On the equality of $\min \max = \max \min$, and the theory of games, The RAND Corporation, RM-243, 1949.

[2] Игры с выбором момента времени. Сборник * [1], 218—248.

Штиглер (Stigler G. J.)

- [1] The cost of substance, *J. of Farm. Economics*, 27 (1945), 303—314.

Эйземан (Eisemann K.)

- [1] Linear programming. *Quart. Appl. Math.*, 13, № 3 (1955), 209—232.

* Эйзенберг (Eisenberg E.)

- [1] Duality in homogeneous programming, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12, № 5 (1961), 783—787.

Эйленберг, Монтгомери (Eilenberg S., Montgomery D.)

- [1] Fixed point theorems for multivalued transformations, *Amer. J. Math.*, 68, № 2 (1946), 214—222.

Энхovens, Эрроу (Enthoven A. C., Arrow K. J.)

- [1] A theorem on expectations and the stability of equilibrium, *Econometrica*, 24, № 3 (1956), 288—293.

Эрроу (Arrow K. J.)

- [1] Alternative proof of the substitution theory for Leontief models in the general case. Сборник [13], гл. IX.

- [2] An extension of the basic theorems of classical welfare economics. Сборник [7], 507—532.

Эрроу, Баранкин Е. В., Блекуэлл Д. (Barankin E. W., Blackwell D.)

- [1] Допустимые точки выпуклых множеств. Сборник * [2], 274—280.

Эрроу, Блок, Гурвиц (Block D., Hurwicz L.)

- [1] On the stability of the competitive equilibrium, II, *Econometrica*, 27, № 1 (1959), 82—109.

Эрроу, Харрис, Маршак (Harris T. E., Marschak J.)

- [1] Optimal inventory policy, *Econometrica*, 19, № 3 (1951), 250—272.

Эрроу, Гурвиц (Hurwicz L.)

- [1] Reduction of constrained maxima to saddle-point problems. Сборник [8], V, 1—20.

- [2] Градиентный метод для вогнутого программирования. I. Локальные результаты. См. Эрроу, Гурвиц, Удзава [1], гл. VI.

- [3] On the stability of the competitive equilibrium, I, *Econometrica*, 26, № 4 (1958), 522—552.

Эрроу, Гурвиц, Удзава (Uzawa H.)

- [1] Исследования по линейному и нелинейному программированию, М., ИЛ, 1962, 334 стр.

- [2] * Constraint qualification in maximization problems, *Naval Res. Logist. Quart.*, 8, № 2 (1961), 175—191.

Эрроу, Дебрё (Debreu G.)

- [1] Existence of an equilibrium for a competitive economy, *Econometrica*, 22, № 3 (1954), 265—290.

Эрроу, Карлин (Karlin S.)

- [1] Торговые операции в условиях полной определенности. См. Эрроу, Гурвиц, Удзава [1], гл. XIII.

Эрроу, Карлин, Скарф (Scarf H.)

- [1] Studies in the mathematical theory of inventory and production, Stanford, California, Stanford University Press, 1958.

Эрроу, Мак-Манус (McManus M.)

- [1] A note on dynamic stability, *Econometrica*, 26, № 3 (1958), 448—454.

Эрроу, Нерлав (Nerlove M.)

- [1] A note on expectation and stability, *Econometrica*, 26, № 2 (1958).

* Эрроу, Энтховен (Enthoven A. C.)

- [1] Quasi-concave programming, *Econometrica*, 29, № 4 (1961), 779—800.

СБОРНИКИ

- [1]* Бесконечные антагонистические игры (под ред. Н. Н. Воробьева), М., Физматгиз (1963), 503.
- [2]* Матричные игры (под ред. Н. Н. Воробьева), М., Физматгиз, 1961, 280 стр.
- [3]* Применение математики в экономических исследованиях (под ред. В. С. Немчинова), М., Соцэкгиз, 1959, 486 стр.
- [4]* Применение математики в экономических исследованиях, том 2 (под ред. В. С. Немчинова), М., Соцэкгиз, 1961, 535 стр.
- [5]* Применение теории игр в военном деле (под ред. В. О. Ашкенази), М., Сов. Радио, 1961, 359 стр.
- [6] Linear programming, Proceedings of the Second Symposium (vol. I—II), National Bureau of Standards, U. S. Dept. of Commerce, January 27—29, 1955.
- [7] Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, ed. J. Neyman. Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951.
- [8] Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1955, Volumes I—V.
- [9] Дрешер, Таккер, Вулф, ред. (Dresher M., Tucker A. W., Wolfe P.)
Contributions to the theory of games, vol. III (Ann. of Math. Studies, vol. 39). Princeton, Princeton University Press, 1957.
- [10] Кун, Таккер, ред. (Kuhn H. W., Tucker A. W.)
Contributions to the theory of games, vol. I (Ann. Math. Studies, vol. 24), Princeton, Princeton University Press, 1950.
- [11] Contributions to the theory of games, vol. II (Ann. Math. Studies, vol. 28), Princeton, Princeton University Press, 1953.
- [12] Линейные неравенства и смежные вопросы. Сборник статей. С приложением книги С. Вайда, Теория игр и линейное программирование, М., ИЛ, 1959, 470 стр.

- [13] Купманс, ред. (Koortmans T. C.)
Activity analysis of production and allocation. (Cowles Commission Monograph № 13). New York, Wiley, 1951.
- [14] Льюис, Таккер, ред. (Luce R. D., Tucker A. W.)
Contributions to the theory of games, vol. IV (Ann. Math. Studies, vol. 40), Princeton, Princeton Univ. Press, 1959.
- [15]* Дрешер, Шепли, Таккер, ред. (Dresher M., Shapley L. S., Tucker A. W.)
Advances in game theory (Ann. Math. Studies, vol. 52), Princeton, Princeton Univ. Press (в печати).

СПИСОК СОАВТОРОВ

- Аккофф (Ackoff R. L.) см. Черчман, Аккофф, Арнофф
Арнофф (Arnoff E. L.) см. Черчман, Аккофф, Арнофф
Баранкин (Barankin E. W.) см. Эрроу, Баранкин, Блекуэлл
Блекуэлл (Blackwell) см. Эрроу, Баранкин, Блекуэлл
Блок (Block D.) см. Эрроу, Блок, Гурвиц
Вальд (Wald A.) см. Данциг, Вальд
Ван-де-Панне (van de Panne C.) см. Тейл, Ван-де-Панне
Вулф (Wolfe P.) см. Сайон, Вулф
Франк, Вулф
Гаррис (Harris T. E.) см. Эрроу, Гаррис, Маршак
Гасс (Gass S. I.) см. Райли, Гасс
Гиршик (Girshick M. A.) см. Беллман, Гиршик
Блекуэлл, Гиршик
Гликсберг (Glicksberg I.) см. Беллман, Гликсберг, Гросс
Фань Цзи, Гликсберг, Гофман
Гофман (Hoffman A. J.) см. Гаддум, Гофман, Соколовский
Данциг, Гофман
Фань Цзи, Гликсберг, Гофман
Гросс (Gross O.) см. Беллман, Гликсберг, Гросс
Гейл, Гросс
Гликсберг, Гросс
Гурвиц (Hurwicz L.) см. Эрроу, Блок, Гурвиц
Эрроу, Гурвиц
Эрроу, Гурвиц, Удзава
Данциг (Dantzig G. B.) см. Гирш, Данциг
Дебрё (Debreu G.) см. Эрроу, Дебрё
Джилмен (Gillman L.) см. Данскин, Джилмен
Карлин (Karlin S.) см. Боненбласт, Карлин
Боненбласт, Карлин, Шепли
Дрешер, Карлин
Дрешер, Карлин, Шепли
Эрроу, Карлин
Эрроу, Карлин, Скарф

Кларк (Clark H. E.) см. Брауншвейгер, Кларк
Кортанек (Kortanek K.) см. Чарнс, Купер, Кортанек
Крейн М. Г. см. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.
Крелле (Krelle W.) см. Кюнци, Крелле
Кречмер (Kretchmer K. S.) см. Ченери, Кречмер
Кун (Kuhn H. W.) см. Гейл, Кун, Таккер
Купер (Cooper W. W.) см. Чарнс, Купер
Чарнс, Купер, Кортанек
Чарнс, Купер, Хендерсон
Кэнти (Cantey W. E.) см. Болдуин, Кэнти, Майзель, Мак-Дермот
Литльвуд (Littlewood J. E.) см. Харди, Литльвуд, Полиа
Майзель (Maisel H.) см. Болдуин, Конти, Майзель, Мак-Дермот
Мак-Дермот (Mc Dermott J. P.) см. Болдун, Конти, Майзель, Мак-Дермот
Мак-Лейн (Mac Lane S.) см. Биркгофф, Мак-Лейн
Мак-Манус (M. Manus M.) см. Эрроу, Мак-Манус
Манн (Manne A. S.) см. Марковиц, Манн
Маршак (Marschak J.) см. Эрроу, Гаррис, Маршак
Мейберри (Meyberry J. P.) см. Джиллис, Мейберри, фон Нейман
Модильяни (Modigliani F.) см. Хон, Модильяни
Монтгомери (Montgomery D.) см. Эйленберг, Монтгомери
Моргенштерн (Morgenstern O.) см. Кемени, Моргенштерн, Томпсон
фон Нейман, Моргенштерн
фон Нейман (von Neumann J.) см. Браун, фон Нейман
Джиллис, Мейберри, фон Нейман
Нерлав (Nerlove M.) см. Эрроу, Нерлав
Орден (Orden A.) см. Данциг, Орден, Вулф
Пирсон (Pearson E.) см. Нейман, Пирсон
Полиа (Pólya G.) см. Харди, Литльвуд, Полиа
Райфа (Raiffa H.) см. Льюс, Райфа
Моцкин, Райфа, Томпсон, Тролл
Рейтер (Reiter S.) см. Купманс, Рейтер
Рестрепо (Restrepo R.) см. Карлин, Рестрепо
Рутман М. А. см. Крейн М. Г., Рутман М. А.
Саймон (Simon H. A.) см. Хокинс, Саймон
Самуэльсон (Samuelson P. A.) см. Солоу, Самуэльсон
Сарджент (Sargent L. E.) см. Фергюсон, Сарджент
Сенгупта (Sengupta S. S.) см. Арнофф, Сенгупта
Скарф (Scarf H.) см. Эрроу, Карлин, Скарф
Соколовский (Sokolowsky D.) см. Гаддум, Гофман, Соколовский
Сноу (Snow R. N.) см. Шепли, Сноу
Таккер (Tucker A. W.) см. Гейл, Кун, Таккер
Голдман, Таккер
Кун, Таккер
Томпсон (Thompson G. L.) см. Кемени, Моргенштерн, Томпсон
Моцкин, Райфа, Томпсон, Тролл

- Трефетен (Trefethen F. N.) см. Мак-Клоски, Трефетен
Тролл (Thrall R. M.) см. Моцкин, Райфа, Томпсон, Тролл
Удзава (Uzawa H.) см. Ченери, Удзава
Эрроу, Гурвиц, Удзава
Фогель (Vogel W. R.) см. Рейнфельд, Фогель
Фулкерсон (Fulkerson D. R.) см. Форд, Фулкерсон
Хендерсон (Henderson A.) см. Чарнс, Купер, Хендерсон
Херштейн (Herstein I. N.) см. Дебрё, Херштейн
Шепли (Shapley L. S.) см. Боненбласт, Карлин, Шепли
Дрешер, Карлин, Шепли
Карлин, Шепли
Нэш, Шепли
Шенберг (Schoenberg I. J.) см. Радемахер, Шенберг
Шерман (Scherman S.) см. Гейл, Шерман
Шифман (Shiffman M.) см. Беллман, Шифман
Блекуэлл, Шифман
Энтховен (Enthoven A. C.) см. Эрроу, Энтховен
Эрроу (Arrow K. J.) см. Энтховен, Эрроу

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абстрактный ряд Неймана** 521
Аддитивный класс множеств 794
Акселератор (accelerator) 334
Аксиомы выявленного предпочтения (axioms of revealed preference) 317
Активная (essential) стратегия 53
Алгебраическая кратность собственного числа 770
 — — — — матрицы 290
Алгебраическое дополнение 768
Анализ отношений доминирования (dominance structure), примеры 106, 107
 — производственных процессов (activity analysis) 21, 145, 303
 — систем 14
Аналитическая игра 431
Антагонистическая игра 27
 — — решение 53
Апериодическая матрица 299
Аппроксимация полиномами 271
Асколи теорема 792
- Бабочкообразная (butterfly-shaped) игра** 574
Бабочкообразные ядра 574
Базис 743, 744
Безразличный вектор 312
Бесконечномерные пространства стратегий 18
Бесконечные игры, решение 436
Бесшумная дуэль (silent duel) 510
 — — с произвольными функциями меткости 546
Блок-диагональная форма 753
Блочная матрица 777
Брауэра теорема о неподвижной точке 322, 793
- Валовые дополнения (gross complements)** 342
 — заменители (gross substitutes) 342, 355
Вальраса закон 352, 357
Вариационная задача, использование леммы Неймана — Пирсона 627
Вариация знака функции 596
Вектор безразличный 312
 — допустимый (feasible) 308, 344
 — избыточного спроса (excess demand vector) 352
 — осуществимый (admissible) 308
 — спроса (demand vector) 352
 — условных оценок (shadow — price) 146
 — цен (price vector) 352
Векторная задача максимизации (vector maximum problem) 253
 — система для матрицы 217
Векторное пространство вещественное 741
Вероятностная мера 795
Верхнее значение (upper value) игры 34
Внутренняя и относительно внутренняя точки множества 466
Вполне положительные (В. П.) матрицы 778
 — смешанная игра (completely mixed game) 51
 — — матричная игра 69
 — — стратегия 423
Вогнутое (concave) программирование 235
Выбор портфеля ценных бумаг (portfolio selection) 241
Выигрыш (payoff) 29
Выпуклая оболочка 782
 — функция 788

- Выпуклое множество 779
 — ядро 426
 Выпуклые конусы 149
 Выпуклый выигрыш 493
 — конус 785
 Вырожденная (separable) игра 425, 445
 — — структура множества решений 461
 — матрица как предел последовательности невырожденных 770
 Вырожденное ядро 424
 Вырожденные и невырожденные отображения 751
 Вычисление потока в сети 210
 Выявленное предпочтение (revealed preference) 316
- Геометрическая кратность собственного числа 756
 — — — матрицы 290
 Геометрическое представление стратегий 40
 Гиперплоскость 745, 780
 Глобальная устойчивость (global stability) 361
 — — процесса 355
 — — формулировка в терминах разностных уравнений 378
 Градиентный метод Эрроу — Гурвица 249
 Граничные точки (boundary points) 260
- Дважды стохастическая (double stochastic) матрица 162
 Двойственная задача 202
 — — в линейном программировании 145
 — — — — геометрическая интерпретация 149
 Двойственность для выпуклых множеств 259
 — для задачи о потоке в сети 172
 Двойственный конус 786
 — симплекс-алгоритм 203
 Двупальцевая мора (two-finger Morra) 32
 Детерминированные модели 18
 Диагональная матрица 759
 Диагональный блок 753
 Динамическая задача принятия решений 16
 Доминирующая диагональ (dominant diagonal) 372
- Дополнение 744, 745
 — ортонормальное 745
 Допустимая программа (feasible program) 141
 Допустимое число 528
 Допустимые значения 38
 Допустимый вектор 308, 344
 Дополнительные (complementary) товары 358
 Доход компенсированный (compensated income) 317
 Дуэль бесшумная (silent duel) 510
 — — с произвольными функциями меткости 546
 — двух пулеметчиков (the two-machine-gun duel) 643
 — смешанная (silent-noisy duel) 513
 — снайпера с пулеметчиком (the fighter-bomber duel) 632, 636
 — шумная (noisy duel) 508
- Единственность оптимальных стратегий 95
- Жорданова каноническая форма матрицы 753
- Задача аппроксимации полиномалии 271
 Задача вогнутого (concave) программирования 235
 Задача I и задача II — двойственные задачи в линейном программировании 145
 Задача линейного программирования 141
 — — — формулировка 142
 — максимизации минимальной компоненты (minimum component maximum problem) 281
 — Неймана — Пирсона 623
 — нелинейного программирования 141
 — о диете (diet problem) 143
 — о максимальном потоке в сети, алгоритм 210
 — о назначениях (assignment) 21
 — об обороне участка (military situation of area defense) 427
 — об оптимальном назначении (optimal assignment problem) 161
 — — — как частный случай транспортной задачи 168
 — — — сведение к решению игры 162

- Задача о поставщике (caterer's problem) 174
- — — сведение к транспортной задаче 175
 - о потоках в сетях (network flow problem) 169
 - о простой монополии (problem of simple monopoly) 335
 - о рациональном использовании склада (warehouse storage problem) 144, 158
 - о седловой точке для нелинейного программирования 255
 - об управлении запасами (inventory problem) 21
 - поиска (search problem) 654
 - принятия решений в случае более чем одного участника 18
 - — — решения 13
 - — — в случае одного участника 18
 - — — динамическая 16
 - — — классификация 16
 - — — многошаговая (decision problems) 21
 - — — статическая 16
- Задачи динамического программирования 21
- линейного программирования, связь с теорией игр 154
- Закон Вальраса 352, 357
- Заменимость валовая (gross substitutability) 355
- — — строгая 355
- Заменители (substitutes) 355
- Замкнутая функция 256
- Замкнутое множество индексов 298
- Замыкание 257
- Замыкание функции (closing the function) 257
- Значение игры 418
- — — верхнее (upper value) 34
 - — — вычисление при помощи дифференциальных уравнений 224
 - — — нижнее (lower value) 35
 - — — приближенное вычисление (дисcretный метод) 214
 - разреза (value of a cut) в сети 172
- Значения допустимые 38
- Игра** 29
- аналитическая (analytic) 431
 - антагонистическая 20, 27
 - — — решение 53
- Игра, верхнее значение (upper value) 34
- вполне определенная 43
 - — — смешанная (completely mixed) 51, 69
 - в крестики и нолики (ticktacktoe) 28
 - в обобщенной форме (games in extensive form) 31
 - в покер (poker game) 110
 - в прятки (hide-and-seek game) 167
 - выпуклая непрерывная 484
 - вырожденная (separable) 425, 445
 - дуэль снайпера с пулеметчиком (fighter-bomber duel) 433
 - значение 418
 - инвариантная 609
 - — — к группе преобразований 432
 - как тройка $\{X, Y, K\}$ 417
 - колоколообразная (bell-shaped) 431, 599
 - конволюционная (convolution) 609
 - конечная выпуклая 446
 - «красная собака» (Red Dog) 664
 - матричная 30
 - Минковского — Леонтьева, связь с моделью Леонтьева 311
 - на единичном квадрате (on the unit square) 421
 - — — — вырожденная 446
 - — — упорядоченных множествах (ordered set game) 71
 - нижнее значение (lower value) 35
 - нулевая 20
 - обладающая значением 43
 - обобщенно выпуклая 483, 488
 - «опознание своего и неприятеля» (indentification of Friend and Foe — I. F. F. game) 107
 - «подводная лодка и самолет» 431
 - позиционная 31
 - покер 434
 - полиномиальная 426
 - «политическая кампания» 493
 - полковника Блотто (Colonel Blotto game) 106
 - «проходящий туз» (Le Her) 128, 689
 - — — решение 418
 - — — с аналитическим ядром 589
 - — — выбором момента времени (game of timing) 428
 - — — — интегральные уравнения 517
 - — — — класса I 556

- Игра с выбором момента времени с полной информацией (of complete information) 430, 556
- — — нескольких моментов времени 565
 - — выпуклым выигрышем 493
 - — вырожденным (separable) ядром 424
 - — канторовским распределением 591
 - — нулевой суммой (zero-sum) 20, 27
 - седловая точка 424
 - симметричная 51, 424
 - существенная часть (essential part) 84
 - «у кого старше, тот выигрывает» (high hand wind) 693
 - ядро 29
- Игры с выбором нескольких моментов времени (games of timing involving several actions) 565
- — — — — существование решения 571
 - — — единственными оптимальными стратегиями 95
 - — редуцированные (reduced) 84
- Инвариантная стратегия 610
- Инвариантное множество 610
- Инвариантные игры 609
- Индекс полезности (utility index) 312
- собственного числа матрицы 290
- Интеграл Лебега — Стильтьеса 796
- нижний, верхний 796
- Интегральные уравнения для бабочкообразных ядер 579
- — — игр с выбором момента времени 517
 - — с положительными ядрами 526
- Интегральный оператор общий 526
- Интегрируемость относительно вероятностного распределения 796
- Интенсивность базисного технологического способа 304
- экономики 304
- Информация полная (complete information) 430
- Инцидентность 170
- Искусственные переменные (artificial variables) 199
- Источник (source) 170
- Итеративный процесс вычисления значения игры 214
- — — — — скорость сходимости 217
- Какутани теорема о неподвижной точке 793
- Камень, мешок и ножницы (stone, paper and scissors) 45
- Квадратичная форма 763
- Квадратичные формы унитарно-эквивалентные 764
- Квазиопределенная (отрицательно) матрица 356
- Квазиустойчивость 376
- Класс борелевских множеств 794
- Классическая леонтьевская модель производства (classical Leontief production model) 306
- Коллективная торговля (collective bargaining) 120
- Колоколообразная (bell-shaped) игра 431, 599
- Колоколообразное (bell-shaped) ядро 431, 595
- Компенсированное изменение дохода (compensated income change) 317
- Компенсированный доход (compensated income) для цены 317
- Композиция сопряженных функций (composition of conjugate functions) 260
- Конволюционная (convolution) игра 609
- Конечная выпуклая игра 446
- Конечномерные пространства стратегий 18
- Конечные выпуклые игры, метод неподвижной точки 448
- — — соотношения между размерностями 453
- Конечные представления, конструктивный метод получения 278
- Конечный спрос (final demand) 286
- Конкурентное равновесие (competitive equilibrium) 330
- — в случае многих потребителей 345
 - — — одного потребителя 345
- Конструктивный метод получения конечных представлений 278
- Конус двойственный (сопряженный) 785
- — натянутый на множество 785
- Конусы выпуклые многогранные 787
- — — полярные, сопряженные 149
- Крайняя точка (extreme point) 192, 785
- — характеристика 194

Лагранжа форма для задачи линейного программирования 148
 Лебега — Стильтеса интеграл 796
 Лексикографическая упорядоченность 777
 Лемма Неймана — Пирсона 623
 — об отделимости многогранника гиперплоскостями 149
 Леонтьева динамическая модель 394
 Лешательер принцип слабый обобщенный 186
 Линейная оболочка 743
 Линейно независимые векторы 743
 Линейное преобразование 745
 — программирование 141
 — пространство нулей матрицы 87
 Линейные уравнения 749
 Линейный функционал 749
 Локальная устойчивость 356

Мажоранты игры 49
 Максимальная матрица 155
 Маргинальная склонность к импорту (marginal propensity to import) 287
 Матрица 747
 — аperiодическая 299
 — блочная 777
 — вполне положительная (В. П.) 778
 — дважды стохастическая (doubly stochastic) 162
 — жорданова каноническая форма 753
 — инцидентности (incidence matrix) узлов и дуг сети 231
 — капитальных коэффициентов (capital coefficient matrix) 395
 — квадратная 747
 — максимальная 155
 — Метцлера 299
 — минимальная 156
 — Минковского — Леонтьева 69, 70
 — наиболее эффективная 95
 — неразложимая 298
 — норма 771
 — нормальная 761
 — обратная 751
 — ортогональная 762
 — отрицательно квазиопределенная (negative quasi-definite) 356
 — — определенная 385
 — перестановок 298
 — перестановочная (permutation) 161, 298
 — периодическая 299
 — положительная 289

Матрица присоединенная (adj (M)) 66, 770
 — разложимая 298
 — редуцированной (reduced) игры 84
 — седловая точка 42
 — слабо вполне положительная 779
 — сопряженная транспонированная 760
 — стохастическая 760
 — унитарная 762
 — унитарно эквивалентная (унитарно подобная) 762
 — устойчивая 356
 — циклическая 72
 — эрмитова 761
 Матрицы вырожденность, обратимость 751
 — сложение и умножение на скаляр 748
 Матричная игра 30
 — — вполне смешанная (completely mixed matrix game) 69
 — — соответствие с игрой на единичном квадрате 421
 Межотраслевая модель нелинейного программирования (interindustry nonlinear programming model) 242
 Мера вероятностная 795
 — — вырожденная 420
 — спектр 423
 — Хаара 613
 Метод Джекобса, сведения задачи линейного программирования 176
 — Неймана — Пирсона 23
 — неподвижной точки 448
 — сопряженных конусов (method of dual cones) 457
 Метцлера матрицы 299
 Минимальная матрица 156
 Минковского — Леонтьева матрица 69, 70
 Минор 768
 Миноранты игры 49
 Многошаговая модель 16
 Многошаговые задачи принятия решений (multistage decision problems) 21
 Множества производственных возможностей (production possibility sets) 305
 Множество инвариантное 610
 — индексов замкнутое 298
 — оптимальных стратегий (sets of optimal strategies), выпуклость 420
 — — — соотношение размерностей 81, 82

Множество соприкосновения 464 .
 Модели детерминистские 18
 — равновесия нелинейные (nonlinear models of equilibrium) 320
 Модель 14
 — анализа производственных процессов (activity analysis problem) 145
 — — — — двойственная задача 146
 — биржевой игры (price speculation model) 180
 — включающая случайные величины 14
 — динамическая (многошаговая) 16
 — Леонтьева, вычислительные методы 310
 — — динамическая 394
 — — замкнутая (closed Leontief model) 287
 — — — нелинейный анализ 321
 — — классическая 306
 — — открытая (open) 287
 — — связь с играми Минковского — Леонтьева 311
 — покера (poker model) 33, 110
 — — с двумя кругами ставок 676
 — — — несколькими повышениями 683
 — — — — размерами ставки 669
 — — — — одним кругом ставок и одним размером ставки 666
 — равновесия (equilibrium) 14
 — — конкурентной экономики (equilibrium model of a competitive economy) 328
 — расширяющейся экономики фон Неймана (von Neumann model of an expanding economy) 389, 394
 — сбалансированного роста общая 391
 — с переменными ценами (model with variable prices) 322
 — — — — и объемами выпуска (model with variable prices and volumes) 324
 — статическая 16
 — торговли между странами замкнутая 288
 — Эрроу — Дебре 331
 Модулярность конусов 786
 Моменты 467
 — обобщенные 470
 Мультипликатор (multiplier) 334

Наилучшая аппроксимация заданной функции полиномом 273

Натянутый на множество конус 785
 Неймана абстрактный ряд 521
 фон Неймана модель расширяющейся экономики 389, 394
 Неймана — Пирсона задача 623
 — — лемма 623
 — — метод 23
 Нелинейное программирование 234
 Ненормированный процесс 359
 Неотрицательная функция множеств 794
 Неподвижная точка отображения 449
 — — численное нахождение 450
 Непрерывная в точке функция 791
 — выпуклая игра 484
 — на множестве функция 791
 Непрерывное отображение 793
 Неравенство Чебышева 404
 Неразложимая (indecomposable) матрица 298
 Нижнее значение игры 35
 Норма матрицы 771
 Нормальная матрица 761
 Нормированный процесс 354
 Нулевая игра двух лиц 20

Область ставок непрерывная 696
 Обобщенно-выпуклая игра 483, 488
 Обобщенные моменты 470
 Оболочка множества 785
 Обратимые преобразования 751
 Обратная матрица 751
 — — выражение через присоединенную 770
 Общая теорема Вальда об уравнениях равновесия (general theorem of Wald on the equilibrium equations) 325
 Объединение множеств 794
 Ограниченность отображения 331
 Однородная система линейных уравнений 750
 Ожидаемый выигрыш 421
 Опознание своего и неприятеля (identification of Friend and Foe — I. F. F. game) 107
 Опорная гиперплоскость 780
 — функция (support function) 264
 Определитель 768
 Оптимальная программа (optimal program) 141
 — стратегия 418
 — — бабочкообразной игры, свойства 574 и далее

- Оптимальная стратегия выпуклой непрерывной игры 486
 — — геометрическая интерпретация 459
 — — имеющая полный вес (optimal strategy having full weigh) 83
 — — конечного типа, существование 461
 — — обобщенно-выпуклой игры 489
 — — полиномиальной игры 474
 — — свойства 51
 Оптимум Парето 341, 343
 — — характеристизация 347
 Ортогональная матрица 762
 — проекция 762
 — — вектора на гиперплоскость 760
 Ортогональное дополнение 745, 760
 Ортогональные элементы 742
 Ортонормальный базис 744
 Остаточная изменчивость товара (residual variability of the commodity) 319
 Осуществимое (admissible) число 323
 Осуществимый (admissible) вектор 308
 Относительно внутренняя точка множества 466
 Отношение предпочтения (preference relation) 49, 312
 Отношения доминирования (dominance structure), примеры анализа 106, 107
 — R^* и R^* 316
 Отображение вырожденное, невырожденное 751
 — сингулярное 751
 — — точечно-множественное 793
 — — непрерывное 793
 — — полунепрерывное сверху (снизу) 793
 Отрасль (industry) 286

 Парето оптимум 341, 343
 Пересечение множеств 794
 Перестановка (permutation) 161
 Перестановочная (permutation) матрица 161, 298
 Периодическая матрица 299
 План эффективный 396
 Плотность распределения 795
 Подопределитель 769
 Подпространство 743
 Позиционная игра 31
 Покер (poker) 110, 434
 — с двумя кругами ставок 676

 Покер с несколькими повышениями 683
 — — — размерами ставки 669
 — — одним кругом ставок и одним размером ставки 666
 — — одновременными ходами 687
 Полунепрерывная сверху (снизу) в точке функция 791
 Полунепрерывное сверху (снизу) отображение 793
 Полярные конусы 149
 Полиномиальная игра 426, 472
 — — со значением нуль 479
 — — существенная стратегия 473
 — — существование оптимальных стратегий 463
 Полная информация (complete information) 430
 Полное пространство стратегий (full strategy space), пример 110
 Полный вес (full weight) стратегии 83
 Половина точки 469
 Положительные матрицы 289
 Полунепрерывность сверху отображения 331
 Полус матрицы 292
 Построение матрицы по заданным оптимальным стратегиям 90, 94
 Поток в сети (network flow) 169, 170
 Потребляющая единица (consumption unit) 328
 Правильная частота функции
 Предвыборная кампания (election campaign) 116
 Преобразование «на» 750
 Преобразования, вырожденность, обратимость 751
 Пример рекламы (an advertising example) 116
 — торгов (a bargaining example) 120
 Принцип двойственности для выпуклых множеств 259
 — доминирования (dominance principle) 53
 — Лешателье слабый, обобщенный 186
 — минимакса (minimax) 20
 Присоединенная матрица 770
 — — (adj (M)) 66
 Проблема распределения рекламных усилий (the general question of how to distribute advertising effort), пример 116
 Программа допустимая (feasible program) 141

- Программа оптимальная (optimal program) 141
 Программирование линейное, нелинейное 141
 — нелинейное 234
 Проекция 762
 Произведение преобразований 748
 Производственная единица (production unit) 328
 Производственные коэффициенты (production coefficients) 287
 Производство эффективное (efficient) 396
 Пропускная способность (flow capacity) дуги 170
 Прообраз нуля в отображении с матрицей 87
 Пространства стратегий конечномерные, бесконечномерные 18
 Пространство векторное вещественное, унитарное 741
 — E^n 741
 — моментов классическое 467
 — нулей матрицы линейное 87
 — U^n 741
 «Проходящий туз» (Le Her game) 128
 Путь (chain) в сети 172
- Равновесный вектор цен (equilibrium price vector) 352**
 — — — существование для разностных уравнений 378, 379
 Равномерно непрерывная функция 791
 Равностепенно непрерывная функция 792
 Разложимость матриц 298
 Размер (seze) стратегии 463
 Размерность 744
 — грани в точке 464
 — наименьшего линейного многообразия 464
 — соприкосновения в точке 464
 Разность множеств 794
 Разрез (cut) в сети 172
 Ранг 749
 Распределение рекламных усилий (distribution advertising effort), пример 116
 Расширяющаяся экономика (expanding economy) фон Неймана 389, 394
 Регулирование цен во времени при помощи разностных уравнений 378
 Регулярная частота функции Пойа 595
- Редуцированная матрица 95
 Редуцированные (reduced) игры 84
 Решение антагонистической игры 53
 — бесконечных игр 437
 — игры 418
 Ряд Неймана абстрактный 521
- Самуэльсона теорема о замещении 307
 Сбалансированный рост (balanced growth) 389, 393
 Свободные переменные (slack variables) 192
 Седловая точка игры 424
 — — матрицы 42
 — — формы Лагранжа 148
 — — ядра (saddle point of the kernel) 236
 Сеть (network) 169, 170
 Сильвестра теорема 775
 — тождество 773
 Сильная аксиома выявленного предпочтения (strong axiom of revealed preference) 317
 Симметричная игра 51, 424
 Симплекс-алгоритм двойственный 203
 Симплекс-метод (simplex method) 192
 — двойственный 203
 — переход от старой крайней точки к новой 195
 — построение исходной крайней точки 199
 — пример 207
 — случай вырождения 200
 — формализация 197
 Система векторов, образующая конкурентное равновесие 347
 — линейных уравнений 749
 Слабая аксиома выявленного предпочтения (weak axiom of revealed preference) 317
 — сходимость 797
 — * сходимость 797
 Смешанная дуэль (silent-noisy duel) 513
 — стратегия (mixed strategy) 30
 Собственное подпространство 744
 — число, алгебраическая кратность 770
 — — геометрическая кратность 756
 — — значение 752
 Собственный вектор 752
 Сопряженная транспонированная матрица 760
 Сопряженный конус 149, 786

- Сообщающиеся (to communicate) индексы 396
- Соотношения ортогональности преобразования 87
- Сопряженная функция 258
- Сопряженное множество (conjugate set) 257
- Сопряженные вогнутые функции 266
- множества, пересечение, прямая сумма, построение выпуклой оболочки 260—263
- Спектральный радиус матрицы 292
- Спектр меры 423
- Сравнение монет (matching pennies) 32
- Статистическая теория принятия решений (statistical decision theory) 22
- Статическая задача принятия решений 16
- Сток (sink) 170
- Стохастические матрицы 760
- модели 18
- Стратегия (strategy) 27
- активная (essential) 53
- вполне смешанная (completely mixed) 423
- геометрическое представление 40
- инвариантная 610
- как вероятностная смесь (probability mixture) чистых стратегий 421
- конечного типа 423
- оптимальная 418, 474
- смешанная (mixed strategy) 30
- существенная (relevant to) 53, 473
- — допустимая (essential) 423
- — с весом 423
- употребляемая с положительной вероятностью 53
- устойчивая (equalizer) 424, 438, 478
- частично устойчивая (part equalizers) 439
- чистая (pure) 30
- ϵ -оптимальная 419
- Строго выпуклая (вогнутая) функция 788
- Строка 53
- уравнивающая (to be an equalizer) стратегию 53
- Существенная (eligible) в интервале строка 219
- (relevant to) стратегия 53
- — полиномиальной игры 473
- часть (essential part) игры 84
- Существенный (eligible) в интервале столбец 219
- Существование базиса векторного пространства 744
- Сходимость слабая * (в основном) 797
- Темп сбалансированного роста 393
- Теорема Асколи 792
- Брауэра о неподвижной точке 793
- Вальда об уравнениях равновесия общая (general theorem of Wald on the equilibrium equations) 325
- двойственности (duality theorem) в линейном программировании 152
- — для выпуклых многогранных конусов 787
- — линейного программирования 152
- — — обращение 155
- Какутани о неподвижной точке 793
- о единственности оптимальной стратегии 96
- — максимальном потоке и минимальном разрезе (maximal-flow, minimal-cut theorem) 172
- — минимакс 40
- — общая 42
- — покрытия (covering theorem) 275
- — связи между решением задачи I и седловыми точками формы Лагранжа 150
- — существовании положительных собственных значений и строго положительных собственных функций 528
- Самуэльсона о замещении 307
- Сильвестра 775
- существования для линейного программирования 152
- Хелли 270
- — о сходимости 797
- Теоремы двойственности для нелинейного программирования 267
- квазиустойчивости 377
- Теория игр 20
- потребительского выбора (theory of consumer choice) 312
- принятия решений статистическая (statistical decision theory) 22
- программирования 21
- сопряженных (conjugate) функций 256

Теория сопряженных функций, приложение к выпуклым множествам 270
 Технологические способы (activity analysis) 303
 — — базисные 304
 Технологический процесс (activity) 286
 Тождество Сильвестра 773
 Точечно-множественное отображение 793
 Точка крайняя (экстремальная, угловая) 785
 — множества внутренняя 466
 — — относительно внутренняя 466
 — окружения 464
 — эффективная 308
 Транспортная задача (transportation problem) 143, 167
 — — двойственная задача 147
 — — с целыми компонентами 169

Угловая точка 785
 Унитарная матрица 762
 Унитарное пространство 741
 Унитарно-эквивалентные квадратичные формы 764
 Уравновешивающая (to be an equalizer) строка 53
 Условие доминирующей диагонали (condition of dominant diagonal) 372
 Условная оценка (shadow-price) 146
 Устойчивая матрица 356
 — стратегия 424, 438
 — — в полиномиальной игре 478
 Устойчивость глобальная 355
 — в целом (stability in large) 361
 — ненормированного процесса 359
 — нормированного процесса 354
 — с учетом ожидаемых изменений 382, 387

Форма Лагранжа для задачи линейного программирования 148
 Функция выигрыша (payoff function) 29
 — выпуклая вогнутая 788
 — замкнутая (closure) 256
 — множеств неотрицательная 794
 — непрерывная в точке 791
 — — на множестве 791
 — опорная (support) 264
 — полунепрерывная сверху (снизу) в точке 791

Функция равномерно непрерывная 791
 — равномерно непрерывная 792
 — распределения 795
 — сопряженная (conjugate) 258
 — спроса для соотношения предпочтения (demand function for the preference relations) 315
 — строго выпуклая, строго вогнутая 788
 Функции вогнутые сопряженные (conjugate concave) 266
 — от матриц 765
 Функционал линейный 749

Хаара мера 613
 Характеризация оптимумов Парето 347
 Характеристическое уравнение 770
 Хелли теорема 270
 — — о сходимости 797

Целевая функция (criterion function) 141
 Цены, ожидаемые в будущем (anticipated future prices) 381
 Циклическая матрица 72

Частное распределение 796
 Частота функции Пойа — Ч. Ф. П. (Polya frequency function — P. F. F.) 595
 — — — правильная
 — — — регулярная 595
 Чебышева неравенство 404
 «Черный валет» (blackjack) 661
 Число допустимое 528
 Чистая (pure) стратегия 30

Шумная дуэль (noisy duel) 508

Экономика благосостояния (welfare economics) 341, 343
 Экстремальная точка 785
 Эластичность ожиданий (elasticity of expectations) 387
 Эрмита матрица 761
 Эрроу — Гурвица градиентный метод 249
 Эрроу — Дебре модель 331
 Эффективная точка (efficient point) 216, 308

Эффективное (efficient) производство 396

Эффективный (efficient) план 396

Явление сбалансированного роста (phenomenon of balanced growth) 389

Ядра типа бабочки (butterfly kernels) 583

Ядро аналитическое 431

— бабочкообразное (butterfly-shaped) 574

Ядро выпуклое 426

— вырожденное 424

— игры 29

— инвариантное к группе преобразований 432

— колоколообразное (bell-shaped) 431, 595

— оператора 463

— преобразования 746

— решения, соответствующее крайним точкам 64

— типа Грина

— — — Пойа

$A(i_1, i_2, \dots, i_r)$ — подопределитель $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ 769

A_p — блочная $\binom{n}{p} \times \binom{n}{p}$ -матрица 777

$\text{adj}(A)$ — матрица, присоединенная к A 770

D^n — n -мерное классическое пространство моментов 467

$\det A$ — определитель матрицы A 768

$\dim V$ — размерность V 744

$\tilde{C}$ — линейное расширение множества C в пространстве E^n 258

f^0 — замыкание функции f 257

$[f^0, C^0]$ — замыкание $[f, C]$ 257

$[f_\alpha, C_\alpha]$ — семейство замкнутых выпуклых множеств 262

M -матрицы 299

m -матрицы 358

$R(B), \lambda(B)$ — ранг матрицы B 87

S — аддитивный класс множеств 794

$\bar{v}$ — верхнее значение игры 34

v — нижнее значение игры 34

v — значение игры 35

$U(A)$ — окрестность матрицы A 96

ϵ -оптимальные стратегии 419

μ_x — вырожденная вероятностная мера 420

$\eta(B)$ — линейное пространство нулей матрицы B 87

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аккофф 48, 189, 232, 813
 Алле 402, 798
 Аллен 48, 233, 338, 798
 Андерсон 338
 Арнофф 48, 189, 232, 798
 Африат 798
 Ашкенази В. О. 815

Бак 95
 Баранкин 103, 814
 Бароне 337
 Бегл 50, 793, 798
 Бекман 190
 Беллман 17, 233, 444, 554, 656, 657,
 702, 798
 Бельзер 444, 554, 555, 798
 Берж 443, 799
 Биркгоф 741, 799
 Блекетт 127, 799
 Блекуэлл 48, 49, 103, 132, 443, 444,
 554, 555, 587, 621, 656, 657, 720,
 728, 799, 814
 Блок 402, 403, 814
 Болдуин 702, 799
 Боненбласт 80, 103, 104, 284, 339, 444,
 505, 506, 555, 702, 799
 Борель 48, 50, 80, 443, 701, 799
 Браун 80, 191, 233, 283, 444, 799, 800
 Брауншвейгер 800
 Булавский В. А. 800
 Бут 800
 Бэтчелор 800

Вагнер 232, 233, 800
 Вайда 48, 189, 800, 815
 Вальд 17, 22, 338, 340, 443, 656, 800,
 803
 Вальрас 337—340, 354, 402, 800

Ван-дер-Панне 810
 Вегнер 800
 Вейль 188, 800
 Вейс 656
 Вилд 801
 Виль 50, 443, 701, 801
 Вильямс 48, 801
 Вольд 338
 Воробьев 801, 815
 Вуд 189, 801
 Вудбери 80
 Вулф 48, 50, 232, 283, 444, 587, 704,
 801, 803, 810, 811, 815

Гаддум 190, 801
 Гантмахер 338, 411, 620, 741
 Гарвин 801
 Гаррис 814
 Гасс 189, 232, 233, 801, 809
 Гейл 48, 80, 103, 104, 128, 189, 190,
 339, 340, 403, 482, 801, 802
 Гиббс 656
 Гилман 802
 Гирш 233, 802
 Гиршик 48, 49, 443, 444, 554, 555, 587,
 621, 720, 728, 798, 799
 Гликсберг 50, 443, 444, 506, 554, 586,
 587, 594, 620, 621, 656, 725, 798, 802,
 811
 Голдман 104, 702, 802
 Гофман 190, 506, 801, 803, 811
 Грейвз 741, 793, 802
 Гросс 104, 233, 407, 443, 444, 482, 506,
 587, 594, 620, 621, 656, 725, 798, 802
 Гурвиц 338, 402, 403, 801, 802, 814

Данскин 656, 657, 802, 803
 Данциг 189—191, 232, 233, 656, 801—
 803

Дебрё 50, 339, 340, 401, 402, 802, 814
 Деннис 803
 Джевонс 337, 339
 Джекобс 176, 803
 Джиллис 444, 702, 803
 Джилмен 656, 657, 803
 Джорджеску-Реген 403, 803
 Дорн 803
 Дорфман 189, 232, 338, 339, 804
 Дрешер 48, 80, 103, 127, 128, 444, 481,
 482, 702, 804, 815

Зойтендейк 804

Иенч 555

Какутани 50, 804
 Канторович Л. В. 189, 303, 804
 Капланский 80, 804
 Карлин 50, 80, 103, 104, 190, 283, 284,
 339, 443, 444, 482, 505, 554, 555, 586,
 587, 620, 656, 702, 724, 725, 799, 804,
 805, 814
 Кейнс 337
 Келли 805
 Кифер 621, 805
 Кларк 800
 Клейн 338, 805
 Контти 702, 799
 Корбут А. А. 805
 Кортанек 813
 Котелянский Д. М. 339, 805
 Коульс 189
 Крейн М. Г. 338, 339, 555, 620, 801,
 805
 Крелле 806
 Кречмер 283, 805, 813
 Кудо 621, 805
 Кун 48, 49, 80, 104, 128, 189, 190, 233,
 235, 282—284, 339, 340, 702, 802,
 805, 806, 815
 Купер 189, 190, 232, 284, 812, 813
 Купман 657, 806
 Купманс 189, 338, 339, 401, 656, 806,
 815
 Курно 337
 Куртийо 806
 Кюнцци 806

Лемке 232, 806
 Леонтьев 189, 303, 337, 338, 806
 Литлвуд 741, 812
 Лумис 50, 807
 Льюс 48, 49, 80, 443, 807, 816

Маданский 807
 Майзель 702, 799
 Мак-Дермот 702, 799
 Мак-Дональд 48, 807
 Мак-Кензи 339, 340, 807
 Мак-Кинси 48, 80, 443, 482, 620, 807
 Мак-Клоски 48, 807
 Мак-Лейн 741, 799
 Мангасарян 807
 Манн 189, 807
 Мак-Манус 402, 815
 Марковиц 283, 807
 Мартин 506
 Маршак 17, 338, 814
 Маршалл 337, 339, 351
 Мейберри 444, 702, 803
 Менгер 337
 Метцлер 339, 402, 403, 443, 805, 807
 Миллс 104, 807
 Модильяни 283, 812
 Мозак 339, 402, 807
 Монтгомери 50, 793, 814
 Моргенштерн 48, 49, 79, 80, 104, 189,
 338, 339, 702, 808
 Моришима 402, 403, 808
 Моцкин 80, 188, 808

Найт 808
 Негиси 808
 фон Нейман 37, 48, 49, 50, 79, 80,
 162, 165, 188—190, 232, 233, 283,
 342, 389, 394, 402, 443, 444, 656, 701,
 702, 803, 808
 Нейссер 403
 Немчинов В. С. 808, 815
 Нерлав 402, 815
 Никайдо 403, 808
 Ньюман 809
 Ньютон 337
 Нэш 587, 702, 809

Орден 232, 803

Паксон 506
 Пантолеони 337
 Парето 337
 Пейсаков 621, 809
 Перлис 741, 809
 Пигу 337
 Пинни 587
 Пирсон 656, 808
 Питман 621, 809
 Пойа (Полиа) 620, 741, 812

- Прагер 809
 Прошен 656, 657

Радемахер 284, 809
Райли 809
Райфа 48, 49, 80, 443, 807, 808
Рейнфельд 189, 809
Рейтер 189, 283, 806, 809
Рестрепо 444, 587, 702, 724, 725, 805, 809
Робертсон 337
Робинсон 233, 809
Рубин 338
Рудин 741, 809
Рутман 339, 555, 805

Савидж 284, 621, 809
Саймон 339, 812
Сайон 443, 444, 587, 704, 809, 810
Самуэльсон 189, 190, 232, 283, 338—340, 401—403, 804, 810
Сапс 810
Саргент 189, 811
Сенгупта 798
Симонар 810
Скарф 283, 814
Слуцкий 286, 339, 810
Смит 190, 810
Сноу 80, 813
Соколовский 190, 801
Солоу 189, 232, 338, 339, 403, 804, 810
Стейн 621
Стиглер 189
Стоун 702
Сьютс 403, 810

Таккер 48, 80, 104, 189, 190, 235, 282—284, 339, 802, 806, 815, 816
Тейл 810
Тинберген 338
Тодхантер 689
Томпсон 80, 104, 134, 403, 443, 805, 808, 810
Трефетен 48, 807
Тролл 80, 808
фон Тюнен 337

Удзава 189, 190, 283, 284, 339, 340, 402, 403, 810, 813, 814
Уолнер 233

Фань Цзи 50, 443, 506, 811
Фаркаш 188, 811
Феллер 339, 811

Фенхель 235, 283, 482, 506, 741, 811
Филип 811
Флеминг 443, 811
Флуд 189, 811
Фогель 189, 809
Форгюсон 189, 811
Форд 189, 190, 233, 811
Франк 811
Фробениус 338, 555, 811
Фуллерсон 189, 190, 233, 811

Хаавельмо 338
Хадли 812
Хан 402, 812
Хант 621
Харди 741, 812
Харрис 17
Хаутэккер 283, 340, 812
Хейберехтс 95
Хельмер 481, 812
Хендерсон 189, 232, 813
Херштейн 339, 803
Хикс 337, 339, 402, 812
Хилдрет 284, 812
Хичкок 189, 812
Хокинс 339, 812
Хон 283, 812

Чарнс 189, 190, 232, 284, 812
Чебышев 284
Чева 337
Ченери 283, 813
Чёрчман 48, 189, 813
Чипмэн 813

Шепли 48, 50, 80, 103, 104, 233, 284, 444, 482, 506, 554, 587, 702, 799, 804, 805, 809, 813
Шерман 80, 103, 482, 802, 813
Шёнберг 284, 596, 620, 813
Шенфельд 813
Шифман 50, 444, 554, 555, 657, 798, 799, 813, 818
Штиглер 814

Эджворт 337, 351
Эйзема 232, 814
Эйзенберг 814
Эйленберг 50, 793, 814
Энтховен 402, 814, 815
Эрроу 17, 103, 190, 283, 339, 340, 401—403, 814, 815

Якоби 658

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора	5
Предисловие	9
Введение. Сущность математической теории процессов решения	13
1. Общие замечания	13
2. Классификация математического аппарата задач принятия решений	16
3. Основные дисциплины	19
Обозначения	23

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР

Глава 1. Определение игры и теорема о минимаксе	27
1.1. Введение. Игры в нормальной форме	27
1.2. Примеры	32
1.3. Выбор стратегий	34
1.4. Теорема о минимаксе для конечных матричных игр	37
1.5. Общая теорема о минимаксе	42
1.6. Задачи	45
Комментарии и библиография к главе 1	48
Глава 2. Свойства оптимальных стратегий матричных игр	51
2.1. Свойства оптимальных стратегий	51
2.2. Виды строгого доминирования	53
2.3. Нахождение оптимальных стратегий	57
2.4. Описание крайних оптимальных стратегий	61
2.5. Вполне смешанные матричные игры	69
2.6. Симметричные игры	74
2.7. Задачи	76
Комментарии и библиография к главе 2	79
Глава 3. Соотношения размерностей для множеств оптимальных стратегий	81
3.1. Основная теорема	81
3.2. Доказательство теоремы 3.1.1	82

3.3. Доказательство теоремы 3.1.2	87
3.4. Обращение теоремы 3.1.2	90
3.5. Единственность оптимальных стратегий	95
3.6. Задачи	101
Комментарии и библиография к главе 3	103
Глава 4. Решения некоторых матричных игр	105
4.1. Игра полковника Блотто	106
4.2. Опознание своего и неприятеля	107
4.3. Игра в покер	110
4.4. Один пример рекламы	116
4.5*. Пример торгов	120
4.6. Задачи	125
Комментарии и библиография к главе 4	127
Решения задач из глав 1—4	129

ЧАСТЬ II

ЛИНЕЙНОЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Глава 5. Линейное программирование	141
5.1. Формулировка задачи линейного программирования	142
5.2. Задача линейного программирования и двойственная ей задача	145
5.3. Основные теоремы линейного программирования (предварительные результаты)	147
5.4. Основные теоремы линейного программирования (продолжение)	152
5.5*. Связь между задачами линейного программирования и теорией игр	154
5.6*. Обобщения теоремы двойственности	155
5.7. Задача о рациональном использовании склада	158
5.8. Задача об оптимальном назначении	161
5.9. Транспортная задача и задача о потоке	167
5.10. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе	172
5.11*. Задача о поставщике	174
5.12*. Модель биржевой игры	180
5.13. Задачи	184
Комментарии и библиография к главе 5	188
Глава 6. Вычислительные методы линейного программирования и теории игр	191
6.1. Симплекс-метод	192
6.2*. Вспомогательные варианты симплекс-метода	202
6.3. Пример применения симплекс-метода	207
6.4*. Вычисление потока в сети	210
6.5. Метод приближенного вычисления значения игры	214
6.6*. Доказательство сходимости	217

6.7. Метод определения значения игры при помощи дифференциальных уравнений	224
6.8 Задачи	228
Комментарии и библиография к главе 6	232
Г л а в а 7. Нелинейное программирование	234
7.1. Вогнутое программирование	235
7.2. Примеры вогнутого программирования	240
7.3*. Градиентный метод Эрроу — Гурвица	249
7.4. Векторная задача максимизации	253
7.5*. Сопряженные функции	256
7.6*. Композиция сопряженных функций	260
7.7*. Сопряженные вогнутые функции	265
7.8*. Теоремы двойственности для нелинейного программирования	266
7.9*. Приложения теории сопряженных функций к выпуклым множествам	270
7.10. Задачи	279
Комментарии и библиография к главе 7	282
Г л а в а 8. Математические методы в изучении экономических моделей	285
8.1. Открытые и замкнутые линейные модели Леонтьева	286
8.2. Теория положительных матриц	289
8.3. Приложения теории положительных матриц к изучению линейных моделей равновесия и обмена	300
8.4. Теория производства	303
8.5. Эффективные точки модели леонтьевского типа	307
8.6*. Теория потребительского выбора	311
8.7. Нелинейные модели равновесия	320
8.8*. Модель равновесия конкурентной экономики (Эрроу — Дебре)	328
8.9. Задачи	333
Комментарии и библиография к главе 8	337
Г л а в а 9. Математические методы в изучении экономических моделей (продолжение)	341
9.1*. Экономика благосостояния	343
9.2. Устойчивость конкурентного равновесия	351
9.3. Локальная устойчивость	356
9.4. Глобальная устойчивость процесса регулирования цен	361
9.5*. Глобальная устойчивость (продолжение)	372
9.6*. Формулировка глобальной устойчивости в терминах разностных уравнений	378
9.7. Устойчивость и ожидания (модель I)	381
9.8. Устойчивость и ожидания (модель II)	386
9.9. Модель расширяющейся экономики фон Неймана	389
9.10. Общая модель сбалансированного роста	391
9.11. Задачи	397
Комментарии и библиография к главе 9	401
Решения задач к главам 5—9	404

Ч А С Т Ь III

ТЕОРИЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ИГР

Глава 10. Природа и структура бесконечных игр	417
10.1. Введение	417
10.2. Игры на единичном квадрате	421
10.3. Классы игр на единичном квадрате	424
10.4. Бесконечные игры, у которых пространства стратегий являются известными функциональными пространствами	432
10.5. Как решать бесконечные игры	436
10.6. Задачи	440
Комментарии и библиография к главе 10	443
Глава 11*. Вырожденные и полиномиальные игры	445
11.1. Конечные выпуклые игры общего вида	445
11.2. Метод неподвижной точки для конечных выпуклых игр	448
11.3. Соотношения между размерностями для конечных выпуклых игр	453
11.4. Метод сопряженных конусов	457
11.5. Структура множеств решений вырожденных игр	461
11.6. Общие замечания о выпуклых множествах в пространстве E^n	463
11.7. Пространства обобщенных моментов	467
11.8. Полиномиальные игры	472
11.9. Задачи	479
Комментарии и библиография к главе 11	481
Глава 12. Игры с выпуклыми и обобщенно-выпуклыми ядрами	483
12.1. Введение	483
12.2. Непрерывные выпуклые игры	484
12.3*. Обобщенно-выпуклые игры	488
12.4. Игры с выпуклой функцией выигрыша в E^n	493
12.5*. Одна теорема о выпуклых функциях	500
12.6. Задачи	503
Комментарии и библиография к главе 12	505
Глава 13. Игры с выбором момента времени при однократном действии каждого игрока	507
13.1. Примеры игр с выбором момента времени	508
13.2. Интегральные уравнения для игр с выбором момента времени и их решения	517
13.3*. Интегральные уравнения с положительными ядрами	526
13.4. Доказательство существования	532
13.5. Бесшумная дуэль с произвольными функциями меткости	546
13.6. Задачи	551
Комментарии и библиография к главе 13	554

Глава 14. Игры с выбором момента времени (продолжение)	556
14.1. Игры с выбором момента времени; класс I	556
14.2. Примеры	557
14.3*. Доказательство теоремы 14.1.1	560
14.4*. Игры с выбором нескольких моментов времени	565
14.5*. Бабочкообразные ядра	574
14.6. Задачи	584
Комментарии и библиография к главе 14	586
Глава 15*. Различные игры	588
15.1. Игры с аналитическими ядрами	589
15.2. Колоколообразные ядра	594
15.3. Колоколообразные игры	599
15.4. Другие типы непрерывных игр	606
15.5. Инвариантные игры	609
15.6. Задачи	615
Комментарии и библиография к главе 15	620
Глава 16. Бесконечные классические игры, разыгрываемые не на единичном квадрате	622
16.1. Предварительные результаты (леммы Неймана — Пирсона)	623
16.2*. Приложение леммы Неймана — Пирсона к вариационной задаче	626
16.3. Дуэль снайпера с пулеметчиком	632
16.4*. Решение дуэли снайпера с пулеметчиком	636
16.5*. Дуэль двух пулеметчиков	643
16.6. Задачи	653
Комментарии и библиография к главе 16	656
Глава 17. Покер и общие салонные игры	658
17.1. Упрощенная игра „черный валет“	661
17.2. Модель покера с одним кругом ставок и одним размером ставки	666
17.3. Модель покера с несколькими размерами ставки	669
17.4. Модель покера с двумя кругами ставок	676
17.5*. Модель покера с k повышениями	683
17.6. Покер с одновременными ходами	687
17.7. Игра „проходящий туз“	689
17.8*. „У кого старше, тот выигрывает“	693
17.9. Задачи	698
Комментарии и библиография к главе 17	701
Решения задач к главам 10—17	703
Приложения	740
Приложение А. Векторные пространства и матрицы	741
А. 1. Евклидовы и унитарные пространства	741
Упражнения	742

А. 2. Подпространства, линейная независимость, базис, прямые суммы, ортогональные дополнения	743
Упражнения	745
А. 3. Линейные преобразования, матрицы и линейные уравнения	745
Упражнения	751
А. 4. Собственные значения. Собственные векторы. Каноническая форма Жордана	752
Упражнения	759
А. 5. Транспонированные, нормальные и эрмитовы матрицы; ортогональные дополнения	760
Упражнения	763
А. 6. Квадратичные формы	763
Упражнения	765
А. 7. Функции от матриц	765
Упражнения	768
А. 8. Определители, миноры, алгебраические дополнения	768
Упражнения	771
А. 9. Некоторые тождества	771
А. 10. Блочные матрицы	777
Упражнения	779
Приложение Б. Выпуклые множества и выпуклые функции	779
Б. 1. Выпуклые множества в E^n	779
Упражнения	782
Б. 2. Выпуклые оболочки множеств и крайние точки выпуклых множеств	782
Упражнения	785
Б. 3. Выпуклые конусы	785
Упражнения	788
Б. 4. Выпуклые и вогнутые функции	788
Упражнения	790
Приложение В. Различные вопросы	790
В. 1. Полунепрерывные и равномерно непрерывные функции	790
В. 2. Теоремы о неподвижной точке	793
В. 3. Функции множеств и распределения вероятностей	793
Библиография	798
Предметный указатель	819
Именной указатель	830

С. Карлин

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В ТЕОРИИ ИГР, ПРОГРАММИРОВАНИИ
И ЭКОНОМИКЕ

Редакторы *Е. М. ДМИТРЕНКО*
и *А. А. РЫВКИН*

Художник *Л. Г. Ларский*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*

Технический редактор *А. Д. Хомяков*

Корректор *Е. В. Кочегарова*

Сдано в производство 21/X 1963 г.

Подписано к печати 13/V 1964 г.

Бумага $60 \times 90^{1/16} = 26,3$ бум. л. 52,5 печ. л.

Уч.-изд. л. 49,1. Изд. № 1/2257. Цена 3 р. 59 к.

Зак. 1789.

Темплан 1964 г. Изд-ва „ИЛ“, пор. № 7.

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени
Евгении Соколовой «Главполиграфпрома»

Государственного комитета Совета

Министров СССР по печати.

Измайловский проспект, 29.